

MECHANIKA STOSOWANA

KINEMATYKA

**LECH MURAWSKI
WYDZIAŁ MECHANICZNY
KPT**

**lemur@wm.am.gdynia.pl
pok. A213**

Funkcja wektorowa

Funkcją wektorową nazywamy wektor którego zarówno wielkość jak i zwrot jest zmienny w czasie.

$$\vec{w} = \vec{w}(t)$$

w zapisie wersorowym (i, j, k):

$$\vec{w} = w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k}$$

gdzie:

$$w_x = w_x(t)$$

$$w_y = w_y(t)$$

$$w_z = w_z(t)$$

Matematyczny opis ruchu punktu

Ruchem punktu nazywamy zmianę położenia punktu w czasie, względem wybranego układu odniesienia (np. Ziemia).

Równania ruchu punktu są to współrzędne punktu (względem wybranego układu współrzędnych) podane w funkcji czasu.

$$x = x(t);$$

$$y = y(t);$$

$$z = z(t).$$

Tor punktu jest to krzywa łącząca miejsca geometryczne chwilowych położenia poruszającego się punktu.

Równania ruchu punktu są to jednocześnie równania parametryczne toru punktu. Nieparametryczne równanie krzywej po której porusza się punkt można otrzymać po redukcji parametru t z równań toru punktu.



Wektor wodzący

Wektor wodzący punktu jest to wektor którego początkiem jest początek wybranego układu współrzędnych a koniec jest związany z poruszającym się punktem.

Ruch punktu można określić zmiennym w czasie wektorem wodzącym.

Wektor wodzący jest wektorową funkcją czasu:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

Współrzędne wektora wodzącego są jednocześnie równaniami ruchu punktu. Tor ruchu punktu jest jednocześnie hodografem wektora wodzącego.



Prędkość punktu materialnego

Pierwsza pochodna względem czasu, wektora wodzącego jest równa prędkości ruchu punktu materialnego.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t) \cdot \vec{i} + \dot{y}(t) \cdot \vec{j} + \dot{z}(t) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

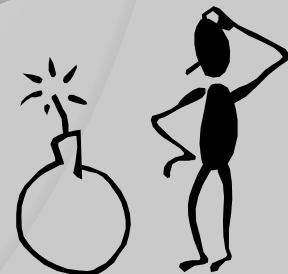
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Przykład:

$$\vec{r} = \frac{1}{2} t^2 \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j} + (2t - 3) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = t \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$$

Co to za ruch?



Przyśpieszenie punktu materialnego

Chwilowe przyśpieszenie punktu materialnego jest równe pochodnej wektora prędkości względem czasu.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t) \cdot \vec{i} + \ddot{y}(t) \cdot \vec{j} + \ddot{z}(t) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = \dot{v}_x \cdot \vec{i} + \dot{v}_y \cdot \vec{j} + \dot{v}_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Przykład2:
ruch po okręgu

Przykład:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}t^2 \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j} + (2t - 3) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = t \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = \vec{i}$$

Ruch krzywoliniowy

$$\bar{a} = \frac{d}{dt} [v \cdot \bar{\tau}] = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + v \frac{d\bar{\tau}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \bar{n}$$

Pierwsza składowa powoduje zmianę długości wektora prędkości natomiast druga składowa jest odpowiedzialna za zmianę kierunku wektora prędkości.

gdzie \bar{n} to jednostkowy wektor normalny \perp do wektora $\bar{\tau}$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \bar{n}$$

$$\frac{ds}{dt} = v; \quad \frac{d\theta}{ds} = K = \frac{1}{\rho}$$

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$$

Ruch krzywoliniowy

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$$

a_t – przyśpieszenie styczne wynikające ze zmiany modułu wektora prędkości;

a_n – przyśpieszenie normalne wynikające ze zmiany kierunku wektora prędkości;

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$



Ruch krzywoliniowy

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$$

Wersor τ określa kierunek przyśpieszenia stycznego; zwrot wektora stycznego może być zgodny lub przeciwny do wektora prędkości.

Wersor n określa kierunek przyśpieszenia normalnego; zwrot wektora normalnego jest skierowany w kierunku chwilowego punktu obrotu.

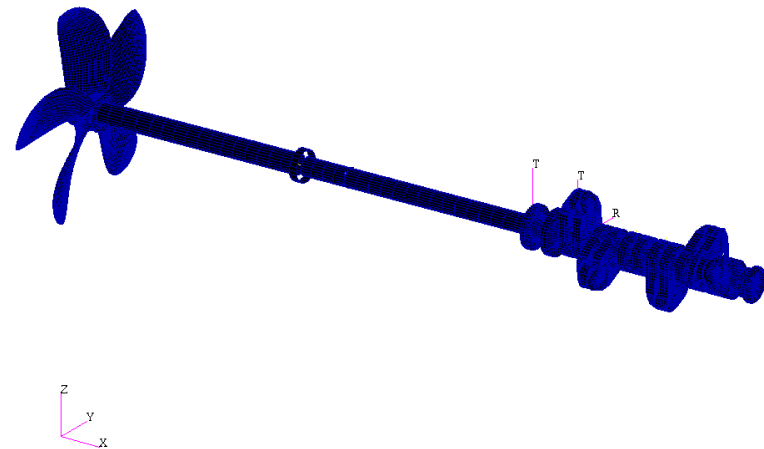
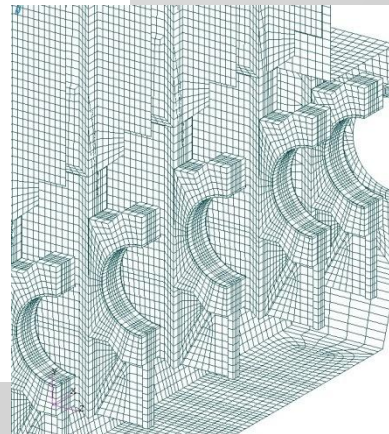
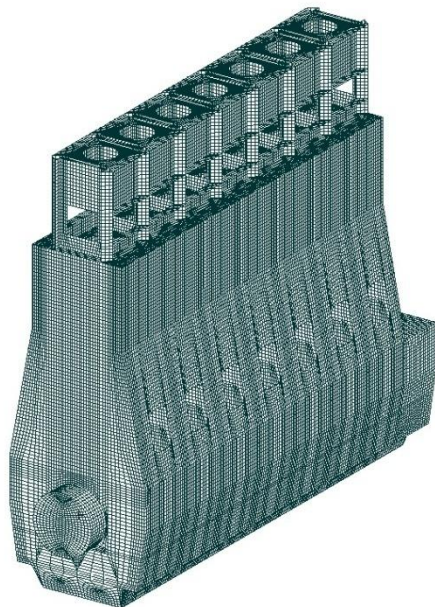
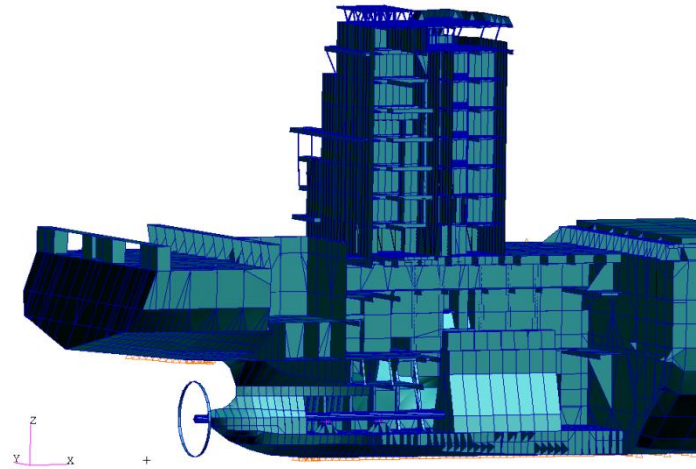
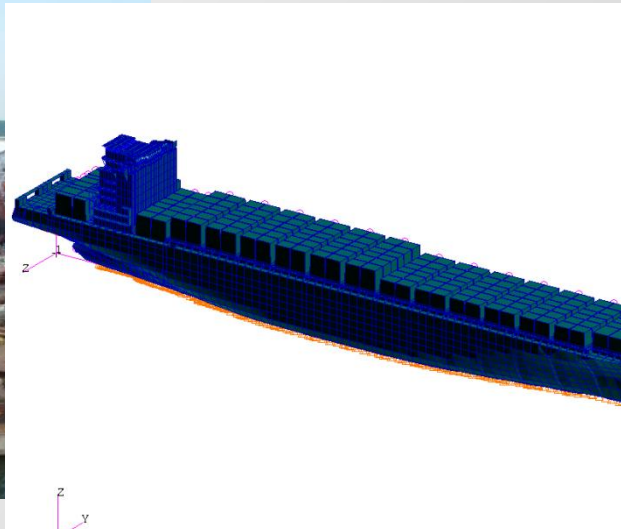
Jeżeli ruch jest jednostajny ($v = \text{const.}$) to $a_t = 0$

Jeżeli ruch jest prostoliniowy ($\rho = \infty$) to $a_n = 0$ i wtedy całkowite przyśpieszenie:

$$a = a_t = \frac{dv}{dt}$$



Modelowanie



Układ napędowy kontenerowca

SILNIK GŁÓWNY:

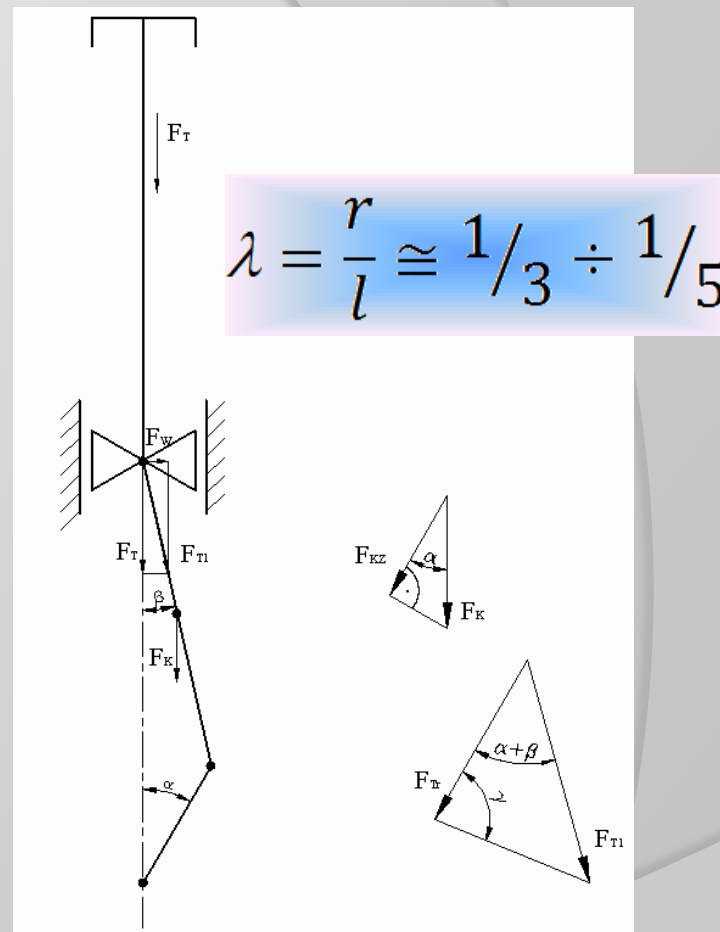
- Typ	8 RTA 96C
- Moc	43920 kW
- Prędkość obrotowa	100 rpm
- Średnie ciśnienie indykowane	19.3 bar
- Skok	2500 mm
- Średnica cylindra	960 mm
- Masa oscylująca jednego cylindra	17834 kg
- Współczynnik λ	0.434
- Koło zamachowe	19100 kgm ²
- Średnica czopa głównego	990 mm
- Średnica czopa korbowego	990/400 mm
- Kolejność zapłonu	18347256

LINIA WAŁÓW:

- Średnica wału pośredniego	695 mm
- Średnica wału śrubowego	845 mm

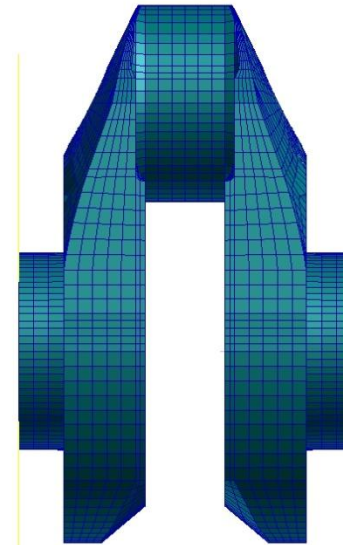
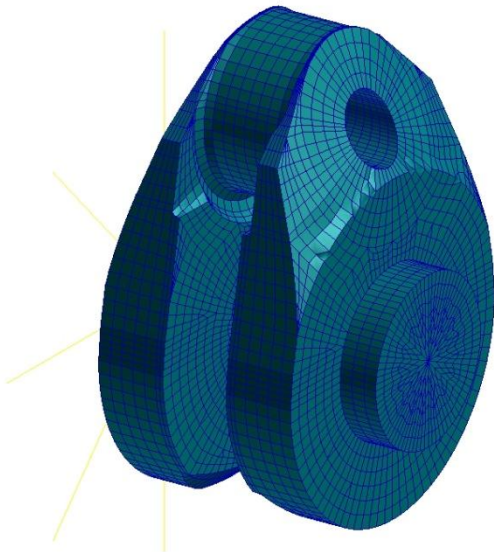
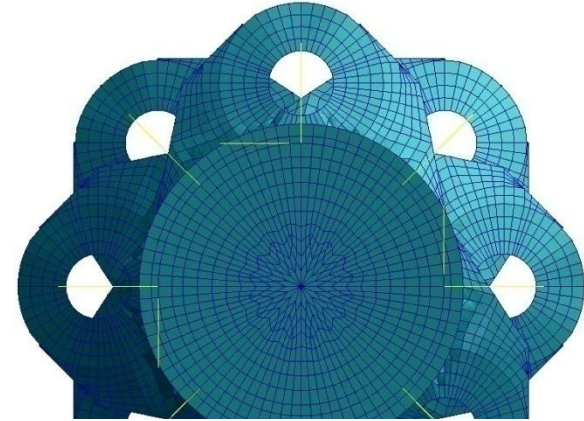
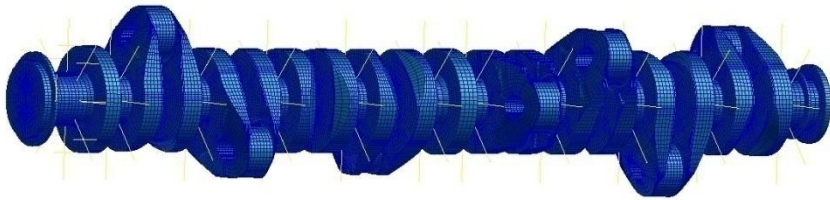
ŚRUBA NAPĘDOWA:

- Średnica	8.40 m
- Liczba skrzydeł	5
- Współczynnik posuwu	0.9367
- Współczynnik powierzchni	0.8505
- Masa	73785 kg
- Masowy moment bezwładności w pow.	247620 kgm ²



Tłok z tłoczyskiem	5 970 kg
Wodzik – komplet	7460 kg
Korbowód – komplet	7 900 kg

Ruch posuwisto-zwrotny tłoka silnika



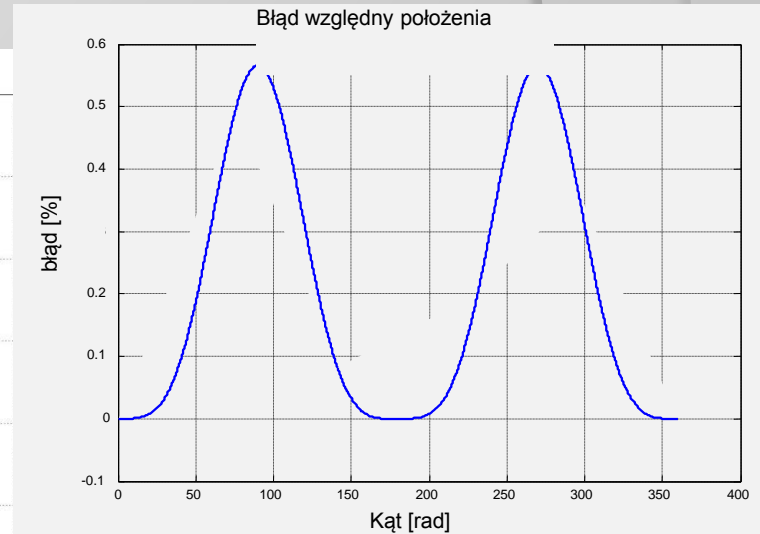
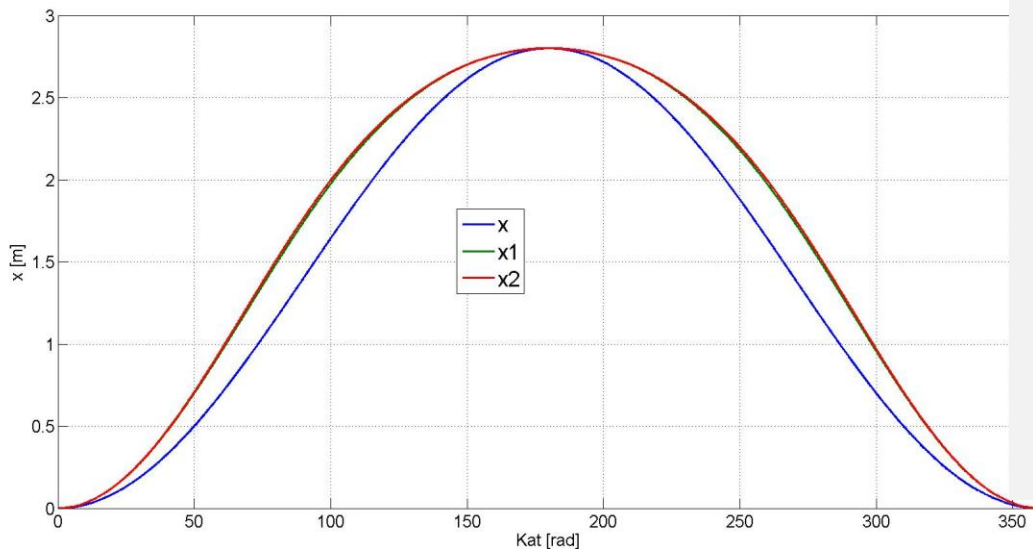
Ruch posuwisto-zwrotny tłoka silnika

$$x = R \cdot (1 - \cos\alpha) + L(1 - \cos\beta)$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha} \approx 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2\alpha$$

$$x_1 = R \cdot \left[1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^2\alpha \right]$$

$$x_2 = L \left[1 + \lambda(1 - \cos\alpha) - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha} \right]$$

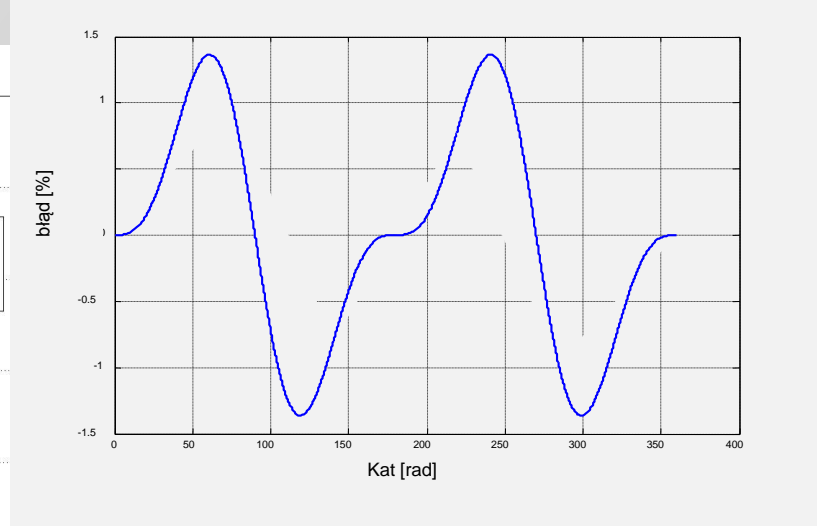
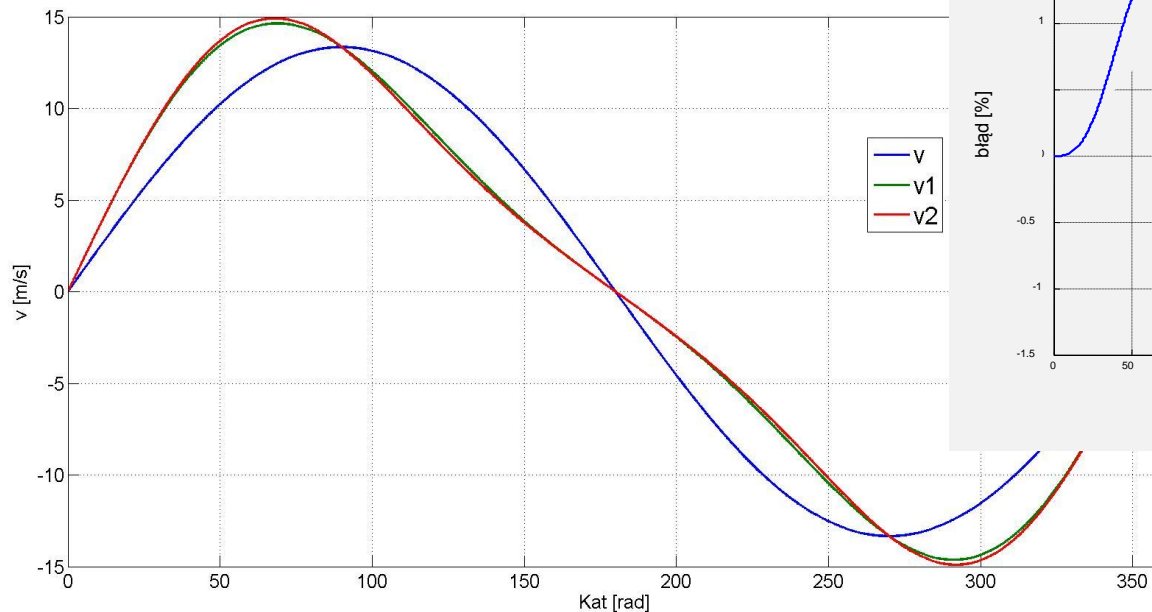


Ruch posuwisto-zwrotny tłoka silnika

$$x_1 = R \cdot \left[1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^2\alpha \right]$$

$$x_2 = L \left[1 + \lambda(1 - \cos\alpha) - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha} \right]$$

$$v_1 = R\omega \cdot \left[\sin\alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha \right] \quad v_2 = L\lambda\omega \cdot \frac{\sin\alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}}$$

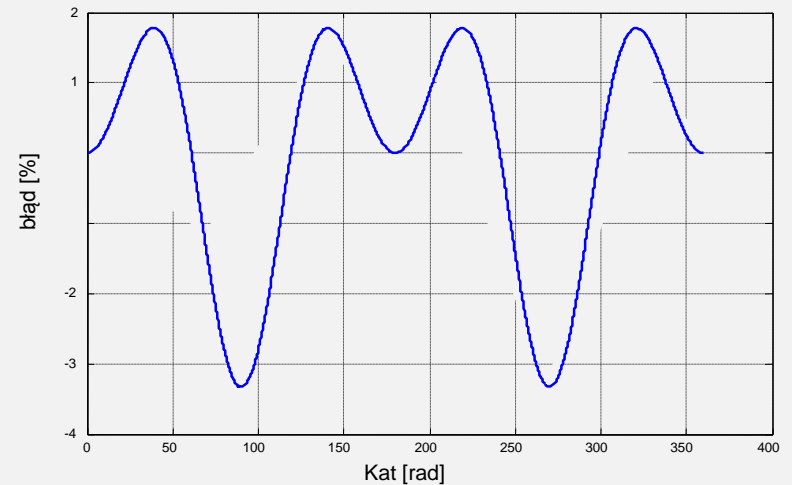
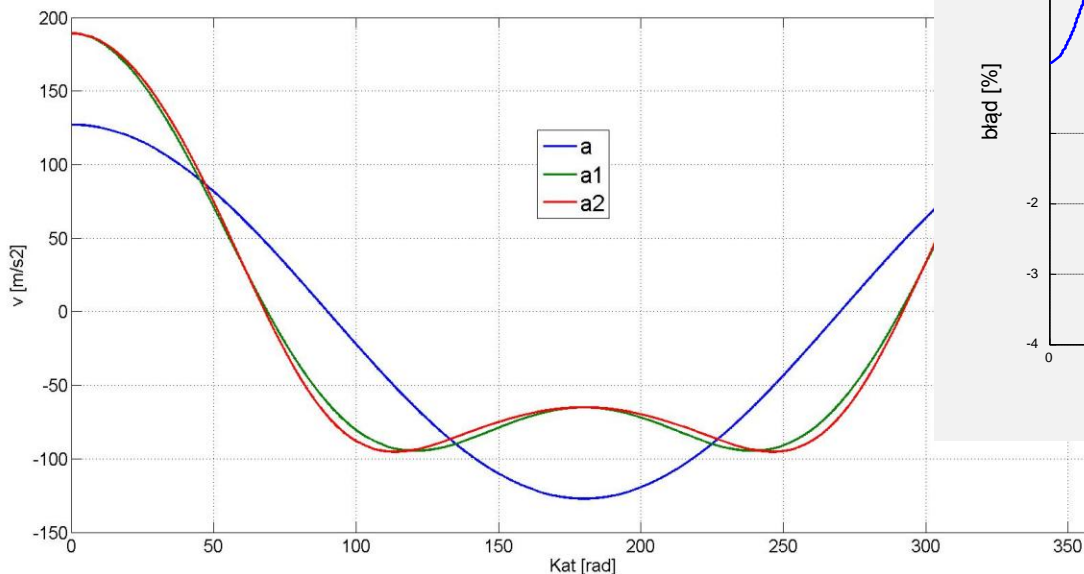


Ruch posuwisto-zwrotny tłoka silnika

$$v_1 = R\omega \cdot \left[\sin\alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha \right] \quad v_2 = L\lambda\omega \cdot \frac{\sin\alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}}$$

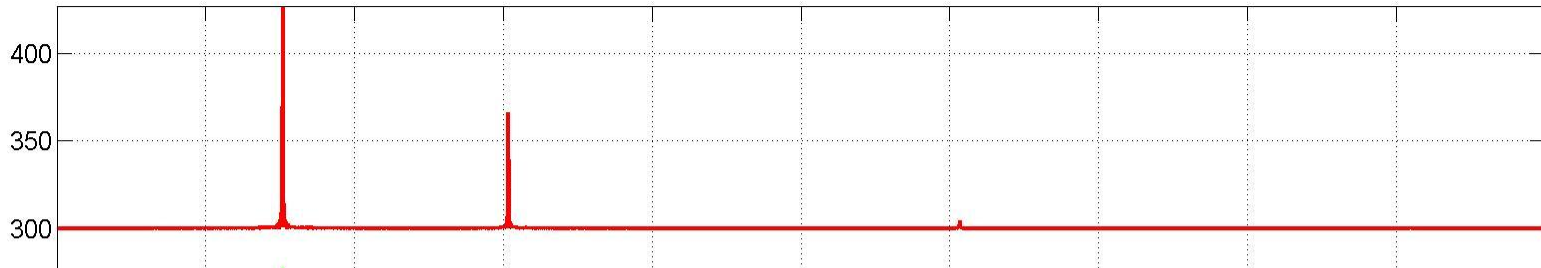
$$a_1 = R\omega^2 \cdot [\cos\alpha + \lambda \cos 2\alpha]$$

$$a_2 = L\lambda\omega^2 \cdot \left[\cos\alpha + \frac{\lambda \cos 2\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}} + \lambda^3 \frac{\sin^2 2\alpha}{\sqrt[3]{\frac{3}{2} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}}} \right]$$

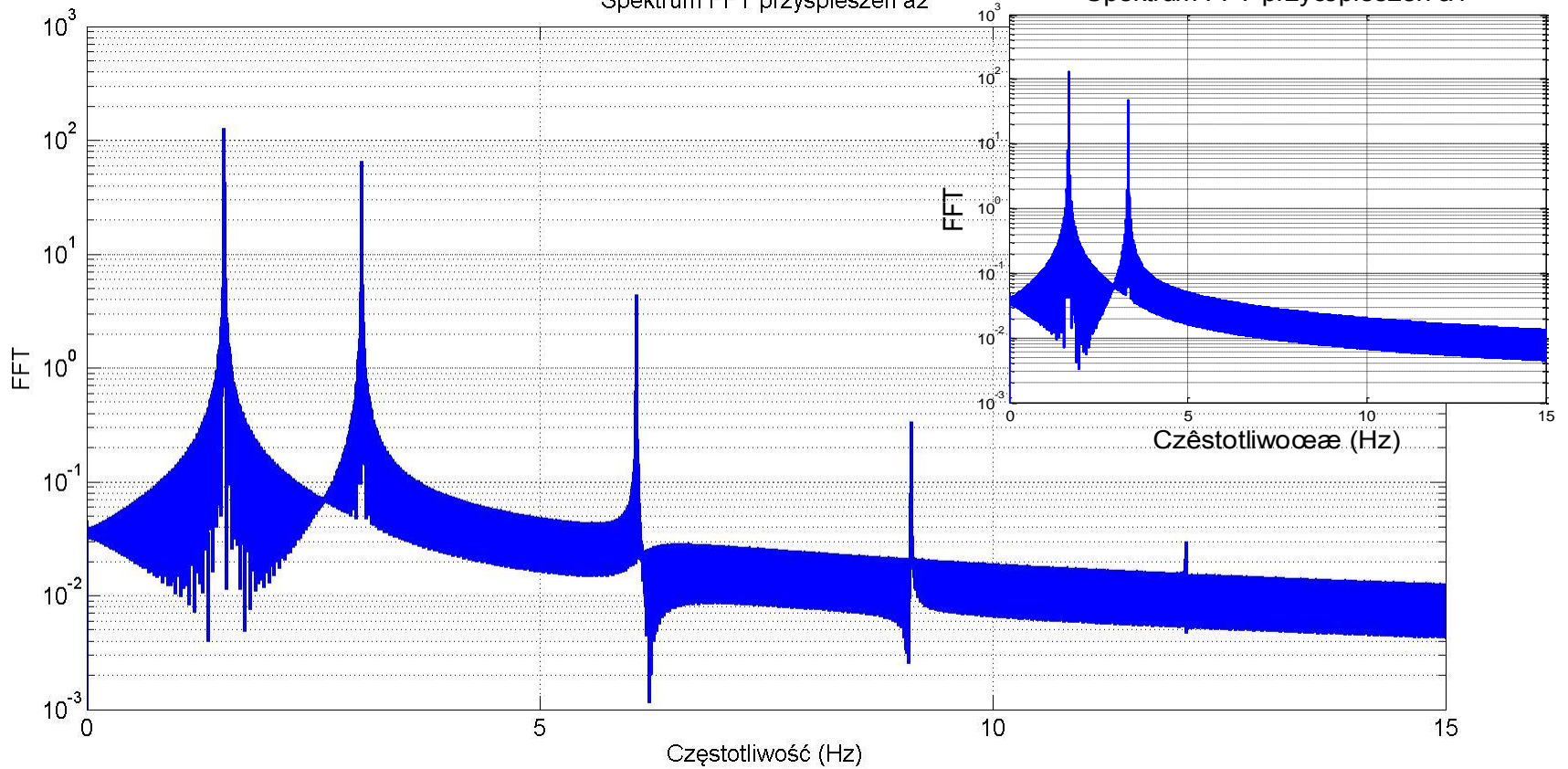


Ruch posuwisto-zwrotny tłoka silnika

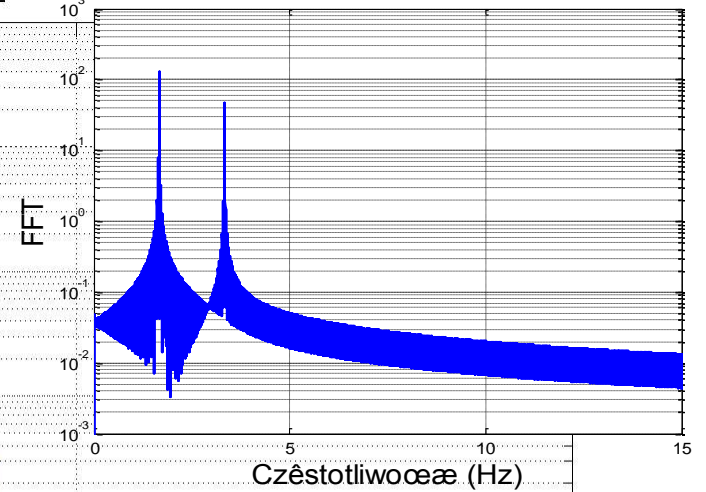
Spektrum FFT przyspieszeń



Spektrum FFT przyspieszeń a2



Spektrum FFT przyspieszeń a1





Dziękuję za uwagę!