

MECHANIKA ANALITYCZNA

Drgania

LECH MURAWSKI

l.murawski@wm.umg.edu.pl

pok. A213

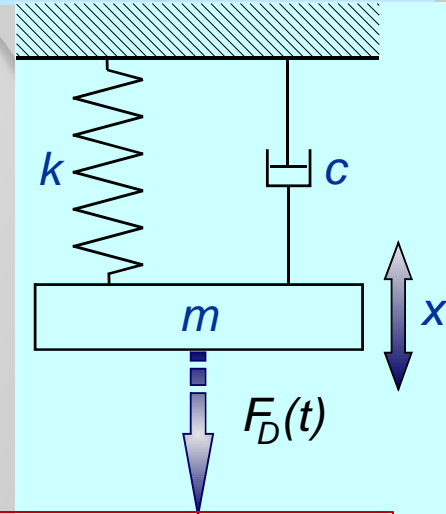
Przykład układu mechanicznego z więzami

Siły zewnętrzne
i wynikające z więzów:

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$$

$$F(x, \dot{x}, t) = F_1(x) + F_2(\dot{x}) + F_3(t)$$



$$F_1(x)$$

Oddziaływania sprężyste, np. sprężyna

Sztywność: $F=k \cdot x$

$$F_2(\dot{x})$$

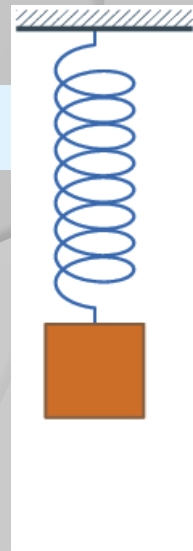
Opory ruchu liniowego - tłumik drgań

Tłumienie: $F=c \cdot dx/dt$

$$F_3(t) \equiv F_D(t)$$

Wymuszenie zewnętrzną siłą zmienną w czasie

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_D(t)$$

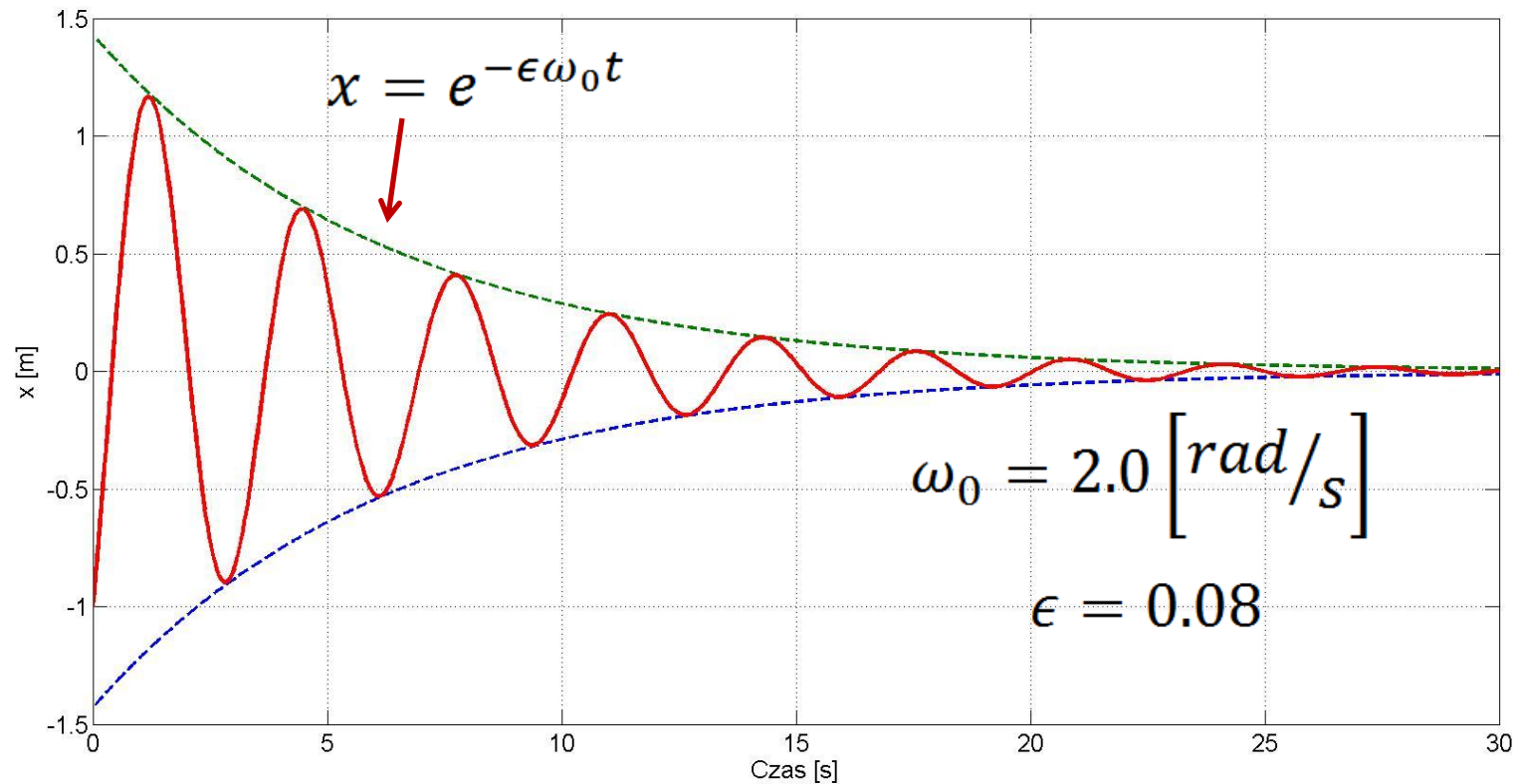


Rozwiązanie dla układu bez zewnętrznych sił wymuszających - drgania własne (małe tłumienie!)

$$c < 2\sqrt{km}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x = e^{-\epsilon\omega_0 t} \cdot \left\{ C_1 \sin \left[\sqrt{1 - \epsilon^2} \cdot \omega_0 t \right] + C_2 \cos \left[\sqrt{1 - \epsilon^2} \cdot \omega_0 t \right] \right\}$$



Rozwiązanie dla układu z wymuszeniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_D(t)$$

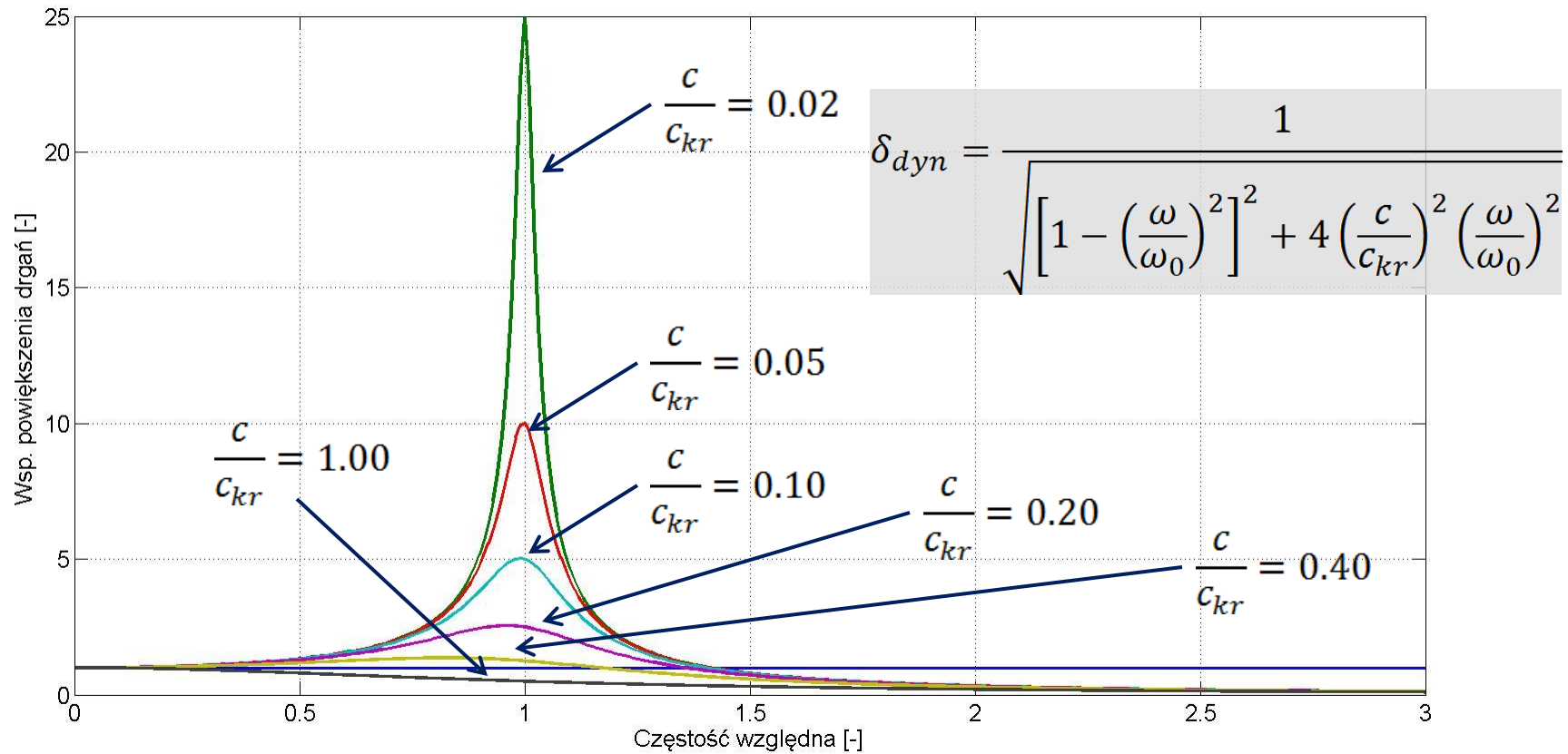
$$A = \frac{\Delta L_{st}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4 \left(\frac{c}{c_{kr}}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\delta_{dyn} = \frac{A}{\Delta L_{st}}$$

$$\delta_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4 \left(\frac{c}{c_{kr}}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Drgania wymuszone tłumione

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_D \sin(\omega t)$$

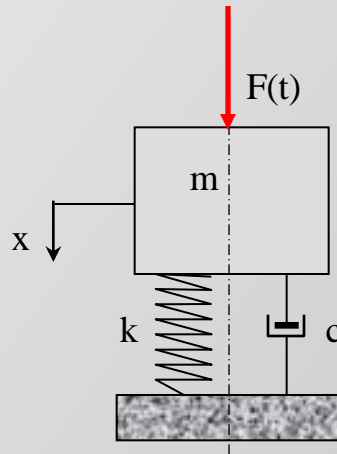


Przykład

Sformułować równanie ruchu drgań wymuszonych o jednym stopniu swobody z uwzględnieniem sił dyssypacyjnych z zastosowaniem równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

Rozwiązanie

Do tego zadania wykorzystuje się model drgań wymuszonych z tłumieniem.



Równanie Lagrange'a dla tego modelu będzie miało postać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

a)

gdzie

$$Q_x = Q_x^P + Q_x^* + Q_x(t)$$

b)

$$Q_x^P = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

- siła uogólniona od sił potencjalnych

$$Q_x^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}}$$

- uogólniona siła dyssypacyjna (R – funkcja dyssypacyjna Rayleigha)

$$Q_x(t) = \frac{\delta A}{\delta x}$$

- uogólniona siła wymuszająca

Wielkości T, U, R, i δA wyrażają się wzorami:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad U = \frac{kx^2}{2}, \quad R = \frac{c\dot{x}^2}{2}, \quad \delta A = \mathbf{F}(t) \cdot \delta \mathbf{x} = F(t)\delta x$$

c)

Wykonując na funkcjach (c) powyższe operacje różniczkowania, otrzymuje się:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d(m\dot{x})}{dt} = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad Q_x^P = -kx, \quad Q_x^* = -c\dot{x}, \quad Q_x(t) = F(t)$$

d)

Wstawiając wzór (d) do (a), z wykorzystaniem wzoru (b), otrzymuje się następujące równanie drgań wymuszonych tłumionych:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = F(t)$$

e)

Równanie (e) jest identyczne z równaniem różniczkowym drgań wymuszonych tłumionych otrzymanym innym sposobem.

Drgania - s.9

Drgania w większości przypadków są zjawiskiem niepożądanym i i szkodliwym. W tym również na okręcie - drgania kadłuba i jego elementów konstrukcyjnych, drgania silników i urządzeń maszynowych, uzbrojenia oraz aparatury pomiarowej, sterującej itp. Ich źródłem jest praca silników spalinowych tłokowych oraz tłokowych maszyn pomocniczych, niewyważenie maszyn wirnikowych, złe wykonanie przekładni zębatych, uderzenia fal morskich.

Drgania powodują zmęczenie materiału, z którego są zbudowane maszyny i konstrukcje nośne, szybsze zużywanie się maszyn (zwłaszcza powierzchni trących) i niszczenie ich elementów, niesprawność działania aparatury.

W przypadkach powstania rezonansu mogą powstawać bardzo poważne uszkodzenia zagrażające bezpieczeństwu okrętu i jego załogi. Drgania kadłuba wpływają szkodliwie na ustrój człowieka, a hałasy wywołane drganiami maszyn na jego system nerwowy.

Ponieważ w większości przypadków nie można zlikwidować źródeł drgań, dlatego stosuje się różne sposoby tłumienia i eliminowania drgań, izolację i ochronę przeciwdrganiową. Za pomocą różnego rodzaju amortyzatorów zmniejsza się amplitudy drgań (przez co łagodzi się ich szkodliwe oddziaływanie) oraz unika się pracy maszyn w obszarze przyrezonansowym, jak również ogranicza się rozprzestrzenianie się drgań na otoczenie.

W niektórych urządzeniach drgania są wykorzystywane celowo, jak np. we wstrząsarkach, urządzeniach udaro- wibracyjnych, urządzeniach ultradźwiękowych.

Technikę wibracyjną wykorzystuje się też w niektórych procesach technologicznych. Szczególne znaczenie mają, drgania w akustyce i radiotechnice.

Każdy inżynier-mechanik, a zwłaszcza mechanik okrętowy musi dobrze poznać problematykę drganiową z zakresu drgań mechanicznych. Dlatego musi poznać teoretyczne podstawy drgań, rodzaje drgań i ich charakterystykę, metody obliczeń częstości drgań własnych jako częstości rezonansowych, sposoby tłumienia i eliminowania drgań. Inżynier-mechanik musi znać, jak poprzez dobór wymiarów, kształtów i właściwości sprężystych materiału oraz rozmieszczenie mas układu można wpływać na częstość drgań układu konstrukcyjnego.

Drgania mechaniczne są zjawiskiem fizycznym obserwowanym jako ruch układu materialnego wokół punktu równowagi statycznej.

W procesie drgań występuje przepływ energii mechanicznej i magazynowanie (akumulowanie) jej na przemian w postaci energii kinetycznej i potencjalnej. Przepływ energii powstaje wskutek oddziaływania na układ mechaniczny jednej lub wielu sił zmiennych w czasie lub na skutek oswobodzenia układu z więzów, które wprowadziły początkowe przemieszczenia elementów układu wytracając go z położenia równowagi statycznej.

W pierwszym przypadku występują drgania wymuszone, a w drugim drgania swobodne w zadanych warunkach początkowych bez oddziaływania sił zewnętrznych.

*** W mechanice mamy do czynienia z drganiami układów masowych, głównie układów sprężystych, gdzie drgające masy powiązane sprężystością przemieszczają się odpowiednio wykonując ruchy drgające.**

*** W akustyce rozpatruje się drgania ośrodka:**

➤ gazowego,

związane z rozchodzeniem się fal akustycznych

➤ ciekłego,

polegają na zagęszczaniu i rozrzedzaniu cząstek

➤ stałego.

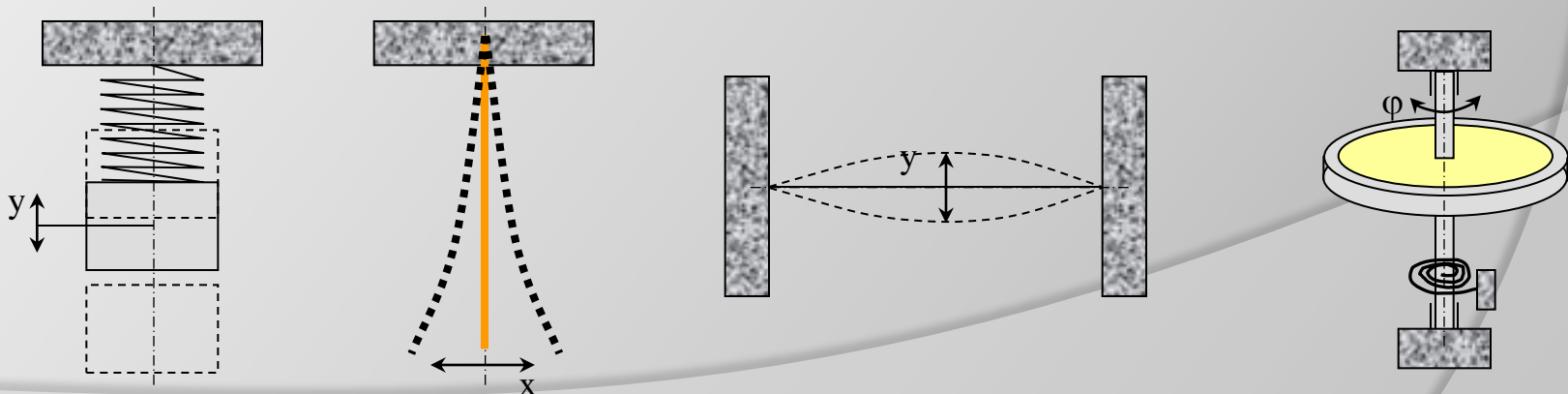
materii ośrodka.

- ✦ W elektrotechnice występują drgania prądu elektrycznego.
zmiany wartości napięcia lub natężenia w obwodach elektrycznych
lub zmiany pola elektromagnetycznego

Definicja

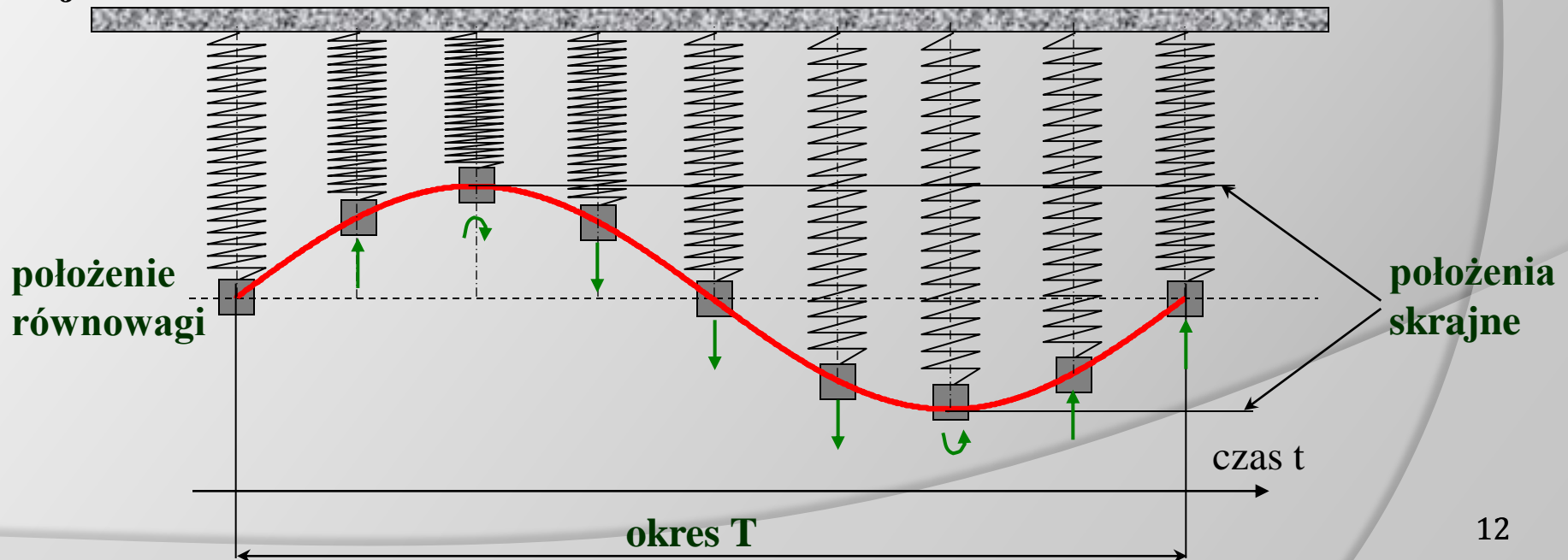
Drganiami nazywamy okresowe zmiany stanu układu zachodzące dookoła pewnego stanu równowagi (lub stanu zerowego) pod wpływem energii dostarczonej do tego układu z zewnątrz lub wielokrotnie okresowo.

Drganiami mechanicznymi nazywamy okresowe zmiany położenia masy zachodzące dookoła pewnego położenia równowagi pod wpływem energii dostarczonej do tego układu jednorazowo lub wielokrotnie okresowo.



Wielkości opisujące drgania - definicje

Cykiem drgań nazywamy szereg kolejno po sobie następujących w sposób ciągły położeń masy – poczynając od położenia równowagi (położenie zerowe), z którego masa przemieszcza się na jedną jego stronę aż do położenia skrajnego, następnie powraca w kierunku położenia równowagi i po jego osiągnięciu przemieszcza się na drugą jego stronę aż do położenia skrajnego po tej stronie, po czym powraca ponownie w kierunku położenia równowagi i osiągając go kończy pełny cykl drgania, a jednocześnie zaczyna następny. Oprócz położenia równowagi, za początek cyklu przyjmuje się bardzo często położenia skrajne.



Okres drgań – jest to czas trwania 1 cyklu drgań. Okres drgania oznacza się przez literę **T** i jest mierzona w sekundach **T [s]**.

Częstość (częstotliwość) drgań – jest to liczba cykli drgań odbywających się w jednostce czasu, najczęściej w jednej sekundzie czasami w 1 minucie. Częstość drgań oznaczamy literą **f [s⁻¹]**, **n [min⁻¹]**. Jednostką częstości drgań jest herc [Hz]. Jeden herc odpowiada częstości drgań wynoszącej jeden pełny cykl (okres) w czasie 1 sekundy.

$$f=1/T;$$

Częstość kołowa (częstość kątowna) oznaczana przez literę **$\omega = 2\pi f$ [s⁻¹]**.

Wychylenie (x, y) – jest to wielkość przemieszczenia masy w ruchu drgającym w stosunku do położenia równowagi, czyli jest to chwilowa odległość masy od położenia równowagi.

$$x=x(t) [m]; y=y(t) [m]; \varphi=\varphi(t) [rad];$$

Amplituda drgań – jest to maksymalne wychylenie, czyli odległość masy w położeniu skrajnym od położenia równowagi. Amplitudę oznacza się tym samym oznaczeniem co wychylenie, dodając indeks dolny „a”

$$x_a [m]; y_a [m]; \varphi_a [rad];$$

Drgania są zjawiskiem **czasowym** są jednocześnie zjawiskiem cyklicznym (okresowym).

Drgania są zjawiskiem **kinematycznym** gdyż masa drgająca wykonuje określone ruchy w każdym cyklu drgań związane ze zmianą jej położenia.

Drgania są zjawiskiem **dynamicznym** gdyż ruchy drgające są ruchami zmiennymi co do kierunku i co do wartości prędkości. Występują zatem przyspieszenia, którym podlega masa drgająca, działają więc na nią siły dynamiczne (bezwładnościowe).

Drgania są zjawiskiem **energetycznym**. Masa drgająca znajdująca się w ruchu z określoną prędkością posiada odpowiednią energię kinetyczną.

Straty energii na pokonywanie oporów ruchu powodują, że **drżania ulegają wygaszeniu** (zanikaniu). Oddziaływanie oporów na wygaszanie drgań nazywa się **tłumieniem**.

Drgania swobodne

Jeżeli do układu złożonego z masy i wiązania sprężystego, przyłożyć jednorazowo impuls wywołujący drgania tego układu, to drgania odbywają się dalej bez udziału sił zewnętrznych, a jedynie dzięki siłom sprężystym występującym w układzie, dzięki ciągłym przemianom energii potencjalnej wiązania sprężystego w energię kinetyczną drgającej masy.

Drgania swobodne odbywają się z pewną, właściwą dla danego układu drgającego, zależną od jego masy i sprężystości, częstością drgań zwaną **częstością drgań własnych**.

Częstość drgań własnych oznacza się przez dodanie indeksu „n” – f_n ; ω_n .

Jeżeli do układu przykłada się impulsy wielokrotnie poprzez okresowo zmieniającą się siłę zwaną siłą wymuszającą, to tak wywołane drgania nazywa się **drganiami wymuszonymi**.

Kolejne impulsy (wymuszenia) podtrzymują drgania nawet wówczas, jeżeli występują opory i są straty energii w układzie, gdzie każdy impuls doprowadza do układu pewną ilość energii.

W przypadku **drgań wymuszonych**, jeżeli **częstość wymuszeń jest równa częstości drgań własnych** układu

$$f=f_n; \omega=\omega_n,$$

to powstaje znaczny wzrost amplitudy drgań. Zjawisko to nazywa się **rezonansem** i dlatego częstość drgań własnych jest też nazywana **częstością rezonansową**.

Drgania swobodne i wymuszone mogą się odbywać w przypadku braku lub przy istnieniu oporów, a w konsekwencji bez lub przy występowaniu strat energii układu.

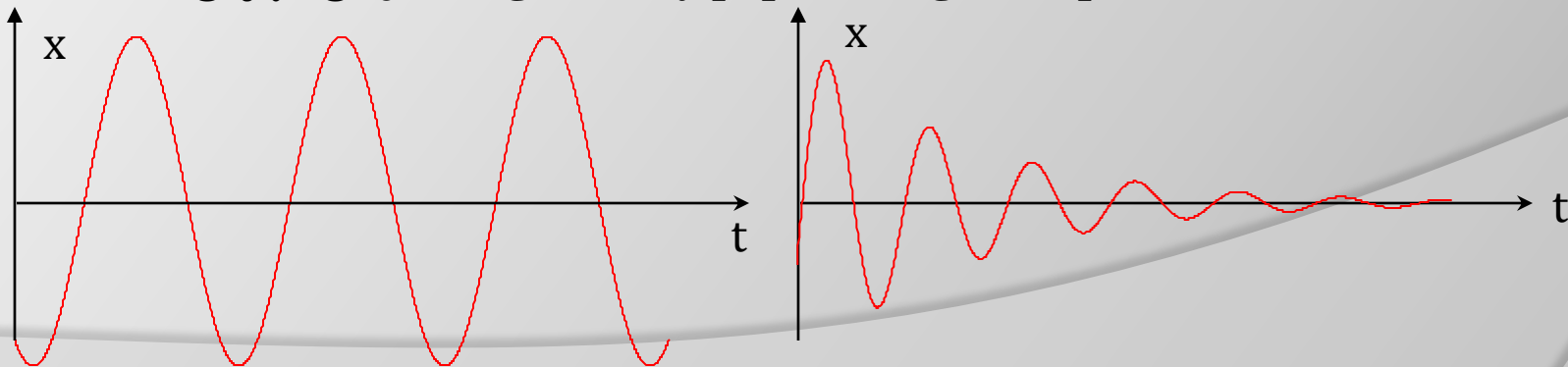
Zespół oporów pochodzących od tarcia wewnętrznego odkształcanego wiązania sprężystego, od tarcia ośrodka, w którym układ drga lub od specjalnie wytwarzanych dodatkowych sił oporu nazywa się **tłumieniem**. Dlatego rozróżnia się:

- **drżania bez tłumienia lub nietłumione, niegasnące;** (w zasadzie przypadek teoretyczny)
- **drżania z tłumieniem lub tłumione, gasnące.**

Drgania nietłumione swobodne zachowują stałą amplitudę drgań, są niegasnące. Natomiast w drżaniach tłumionych, wskutek strat (rozpraszania) energii układu drżającego, amplituda maleje z każdym następnym cyklem drgań, czyli są to drżania gasnące.

Drgania parametryczne – zachodzą tylko w układach niestacjonarnych i są wynikiem zmian w czasie parametrów układu.

Drgania samowzbudne – pojawiają się w układach niezachowawczych. Dopływ energii do układu drżającego jest regulowany poprzez drżania i pochodzi od układu niedrżającego.



Masa zamocowana sprężysto może drgać przemieszczając się w kierunku lub kierunkach odpowiadających stopniom swobody. Dotyczy to również każdej masy wchodzącej w skład układu masowego, w którym masy są połączone między sobą więzami sprężystymi. Stąd liczba stopni swobody układu jest zależna od liczby mas występujących w układzie oraz od liczby stopni swobody poszczególnych mas. Dlatego rozróżnia się:

- ✱ drgania układów o jednym stopniu swobody,
- ✱ drgania układów o wielu stopniach swobody.

Ze względu na kierunek przemieszczenia się mas w stosunku do wymiarów głównych konstrukcji czy elementów konstrukcji rozróżnia się:

- drgania wzdłużne lub podłużne,
- drgania poprzeczne (giętne),
- drgania obrotowe (skrętne).

Drgania są opisywane za pomocą równań różniczkowych. W zależności od charakteru równania różniczkowego drgań rozróżnia się na:

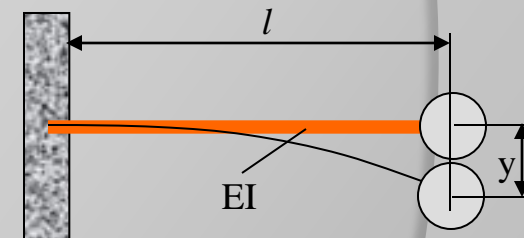
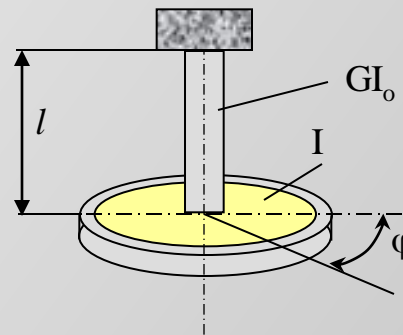
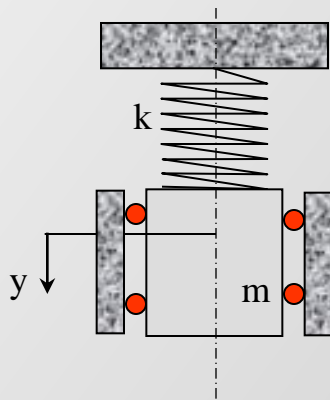
- ★ drgania liniowe,
- ★ drgania nieliniowe.

Drgania własne - s.18

Drgania własne układów liniowych o jednym stopniu swobody nietłumione i tłumione. Tłumienie krytyczne. Logarytmiczny dekrement tłumienia. Częstość drgań własnych.

Generalnie rozróżnia się dwa podstawowe rodzaje układów o jednym stopniu swobody.

- Ciało sztywne podparte sprężynie wykonuje ruch prostoliniowy postępowy.
- Ciało sztywne wykonuje ruch obrotowy, a bezmasowe elementy sprężyste oddziałują na ciało momentem sił.



Ciało o masie m jest podparte na bezmasowej sprężynie o stałej k zwanej współczynnikiem sztywności układu.

$$k = G \cdot d^4 / (8D^3n);$$

$$k = 3EI / l^3$$

G – moduł sprężystości materiału, D – średnica sprężyny, d – średnica drutu, n – liczba zwojów

Układ znajduje się w polu grawitacyjnym, a więc jego położenie równowagi jest określone przez wielkość ugięcia statycznego:

$$y_{st} = mg/k$$

Wychylenie z położenia równowagi spowoduje pojawienie się siły oporu $k \cdot y$ która jest równoważona przez siłę bezwładności P_b .

Po zrzutowaniu wektorów sił na oś pionową otrzymujemy równanie:

$$-m\ddot{y} + mg - k(y_{st} + y) = 0$$



$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\ddot{y} \equiv \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$$

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = P_a \sin(\omega t)$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = P_a \sin(\omega t)$$

★ drgania swobodne nietłumione $- P_a=0; c=0; \Rightarrow$

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = 0$$

★ drgania swobodne tłumione $- P_a=0; c \neq 0; \Rightarrow$

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0$$

★ drgania wymuszone nietłumione $- P_a \neq 0; c=0; \Rightarrow$

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = P_a \sin(\omega t)$$

★ drgania wymuszone tłumione $- P_a \neq 0; c \neq 0; \Rightarrow$

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = P_a \sin(\omega t)$$

$$m\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu ma rozwiązanie ogólne w postaci:

$$y = e^{rt} \quad \text{przy równaniu charakterystycznym} \quad r^2 + \omega_n^2 = 0$$

stąd otrzymujemy rozwiązania szczególne:

$$y_1 = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} = \cos(\omega_n t); \quad y_2 = \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2} = \sin(\omega_n t)$$

Rozwiązanie ogólne przyjmie postać:

$$y = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

gdzie: A, B – stałe całkowania wyznaczone są z warunków początkowych

$$y = y_a \cos(\omega_n t - \beta); \quad y = y_a \sin(\omega_n t + \beta); \quad y_a = (A^2 + B^2)^{0.5}, \quad \text{tg}(\beta) = B/A$$

y_a – amplituda drgań; β – kąt przesunięcia fazowego.

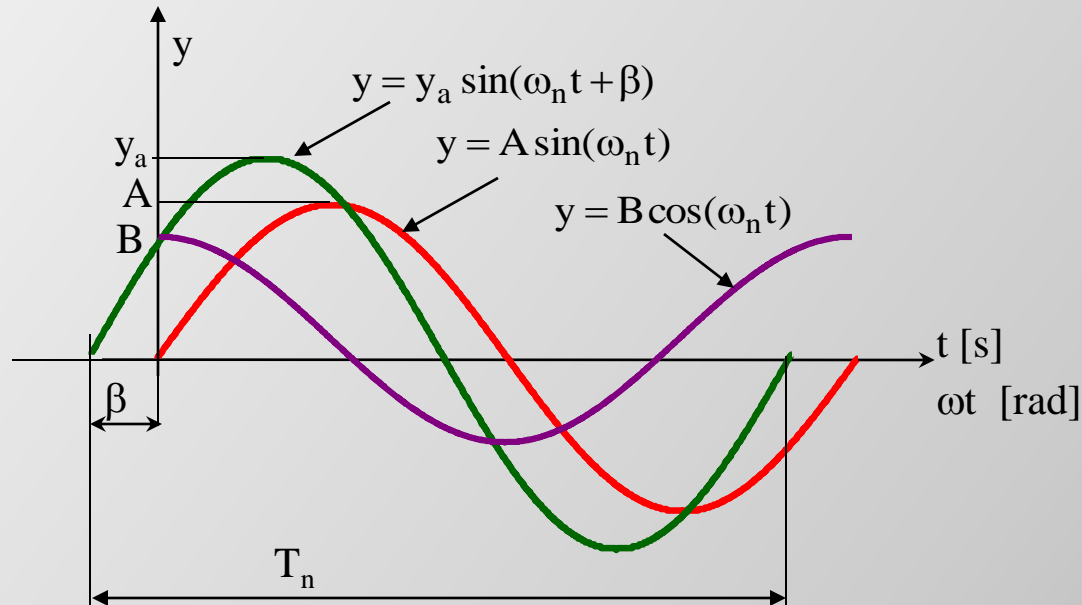
$$T = 2\pi/\omega_n$$

Dla warunków początkowych postaci:

$$y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$$

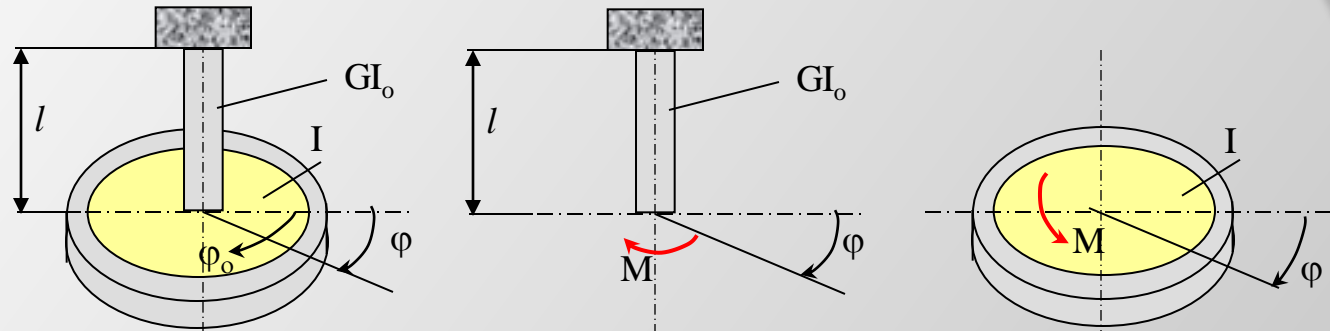
$$y_a = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n}\right)^2}; \quad \beta = \arctg\left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_n y_0}\right)$$

Powyższy opis jest opisem ruchu **harmonicznego**.



$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \text{częstość i okres drgań własnych}$$

Drgania obrotowe (skrętne)



Sztywność skręcania pręta jest określona tak, by pomnożona przez kąt skręcenia dawała moment pozycyjnych sił sprężystych:

$$k_s \varphi = M$$

$$k_s = M / \varphi = GI_o / l$$

Przyjmując warunki początkowe dla $t=0$: $\varphi = \varphi_0$; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$;

$$B\ddot{\varphi} + k_s \varphi = 0; \quad \ddot{\varphi} + \alpha_n^2 \varphi = 0$$

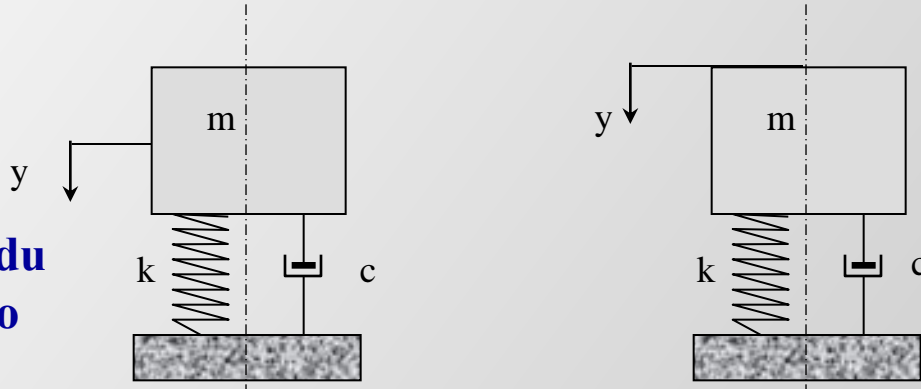
$$\alpha_n = \sqrt{\frac{k_s}{B}}; \text{ częstość kołowa drgań własnych; } B - \text{masowy moment bezwładności}$$

$$\varphi = \varphi_a \cos(\alpha_n t) + \frac{\dot{\varphi}_a}{\alpha_n} \sin(\alpha_n t) = \Phi_a \cos(\alpha_n t - \beta)$$

$$\Phi_a = \sqrt{\varphi_a^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_a}{\alpha_n}\right)^2}; \quad \beta = \arctg \frac{\dot{\varphi}_a}{\alpha_n \cdot \varphi_a}; \quad T = \frac{2\pi}{\alpha_n} = 2\pi \sqrt{\frac{B}{k_s}} = 2\pi \sqrt{\frac{Bl}{GI_o}}$$

W układach rzeczywistych drgających występują opory ruchu, które powodują zanikanie drgań. Często siły tłumiące mogą być przybliżone siłą proporcjonalną do prędkości.

model układu drgającego



schemat ilustrujący równowagę sił podczas ruchu prostoliniowego z tłumieniem wiskotycznym

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = 0$$

równanie drgań

przy dalszych przekształceniach otrzymujemy:

$$\ddot{y} + 2h \cdot \dot{y} + \omega_n^2 \cdot y = 0; \quad h = c / 2m$$

h - jednostkowy wsp. tłumienia

Równanie różniczkowe jednorodne drugiego rzędu ma rozwiązanie ogólne w postaci:

$y = e^{rt}$ przy równaniu charakterystycznym postaci $r^2 + 2hr + \omega_n^2 = 0$ otrzymujemy:

$$r_{1,2} = -h \pm i\lambda$$

$$\lambda = \sqrt{\omega_n^2 - h^2} \quad i^2 = -1$$

Rozwiązanie ogólne będzie postaci:

$$y = A \frac{e^{r_1 t} + e^{r_2 t}}{2} + B \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2i}$$

co prowadzi do rozwiązania w formie:

$$y = e^{-ht} [A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t)]; \quad y = y_a \cos(\lambda t - \beta)$$

$$y_a = e^{-ht} \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \operatorname{tg}(\beta) = \frac{B}{A}$$

gdzie: A, B – stałe całkowania wyznaczone z warunków początkowych

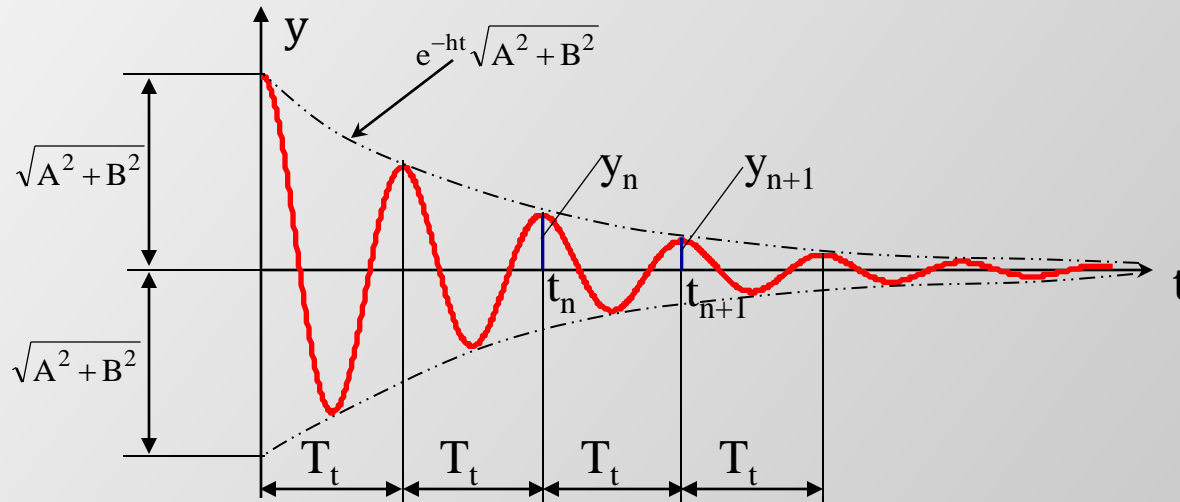
Warunki początkowe: $y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$, stąd otrzymujemy stałe:

$$A = y_0; \quad B = \frac{\dot{y}_0 + hy_0}{\lambda}$$

Okres drgań swobodnych tłumionych:

$$T_t = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - h^2}}; \quad f = \frac{1}{T_t} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_n^2 - h^2}}{2\pi}$$

Przebieg drgań tłumionych układu liniowego o jednym stopniu swobody



Logarytmiczny dekrement tłumienia jest to logarytm naturalny stosunku bezwzględnych kolejnych wartości maksymalnych wychyleń – jest wielkością stałą

$$\delta = \ln \frac{|y_n|}{|y_{n+1}|} = \ln \frac{|y(t_n)|}{|y(t_n + T)|} = hT_t = \frac{2\pi c}{\sqrt{c_{kr}^2 - c^2}} = \frac{2\pi c}{\sqrt{4k \cdot m - c^2}}$$

Wskaźnik ten służy do oceny tłumienia drgań – jest wielkością stałą

W zależności od wzajemnej relacji dwóch parametrów h i ω_n ruch analizowanego układu jest różny.

Jeśli $h < \omega_n$; $h^2 < \omega_n^2$ to równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki nierzeczywiste i ruch jest ruchem drgającym.

Jeśli $h > \omega_n$; $h^2 > \omega_n^2$ to równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste i ruch nie jest ruchem drgającym.

Tłumienie w przypadku $h > \omega_n$ nazywa się **nadkrytycznym**.

$$y(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}; \quad s_1 < 0; \quad s_2 < 0;$$

Jeśli $h = \omega_n$ mówimy o **tłumieniu krytycznym**.

Wówczas mamy rozwiązanie ogólne w postaci:

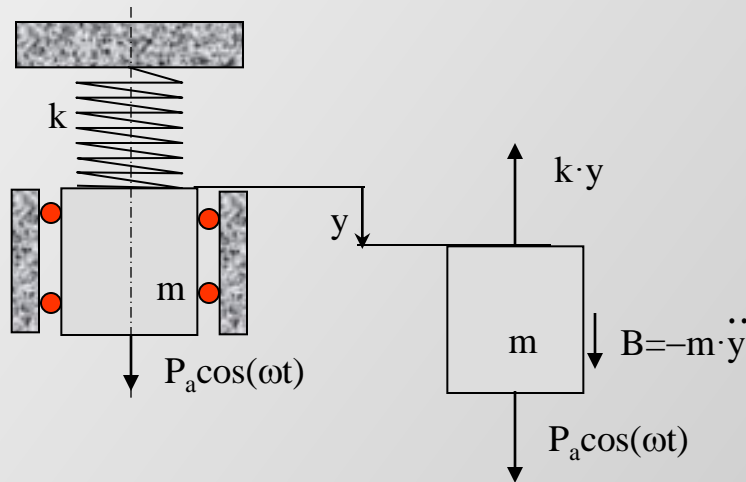
$$y(t) = e^{-ht} [C_1 + C_2 t] \quad C_1, C_2 - \text{stałe}$$

$$c_{kr} = 2 \cdot h_{kr} \cdot m = 2\sqrt{k \cdot m}$$

Drgania wymuszone - s.27

Drgania wymuszone układów liniowych o jednym stopniu swobody nietłumione i tłumione.
Proces ustalania się drgań. Charakterystyki amplitudowe i fazowe. Pojęcie rezonansu.

Rozpatrzmy układy o jednym stopniu swobody wykonujące **drżania wymuszone harmoniczne bez tłumienia**.



Ciało o masie m jest podparte na bezmasowej sprężynie o współczynniku sztywności k . Do masy przyłożona jest siła wymuszająca.

Równanie ruchu ma postać:

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = P_a \cos(\omega t)$$

gdzie: P_a – amplituda harmonicżnej siły wymuszającej.

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$m\ddot{y} + \omega_n^2 y = q_a \cos(\omega t) \quad (*)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad q_a = \frac{P_a}{m}$$

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego przedstawionego w Wykładzie 2 i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Ponieważ w rzeczywistym układzie drgania własne zanikają wskutek istniejącego w układzie rzeczywistym tłumienia to **warunkach rzeczywistych**, po pewnym czasie, obserwuje się **drgania harmoniczne o częstości siły wymuszającej**.

Będziemy szukać rozwiązania o postaci: $y = y_a \cos(\omega t)$

Po podstawieniu tego równania do równania (*) otrzymujemy:

$$(\omega_n^2 - \omega^2) y_a = q_a$$

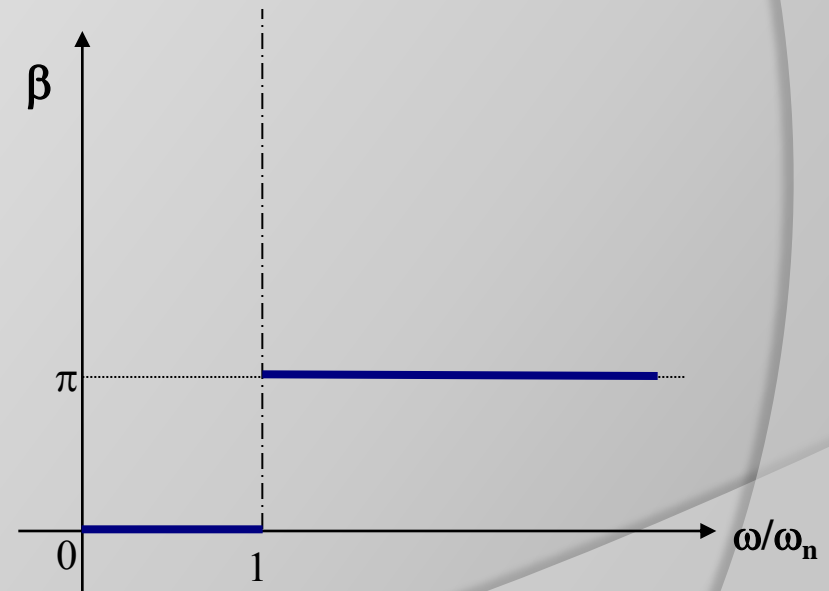
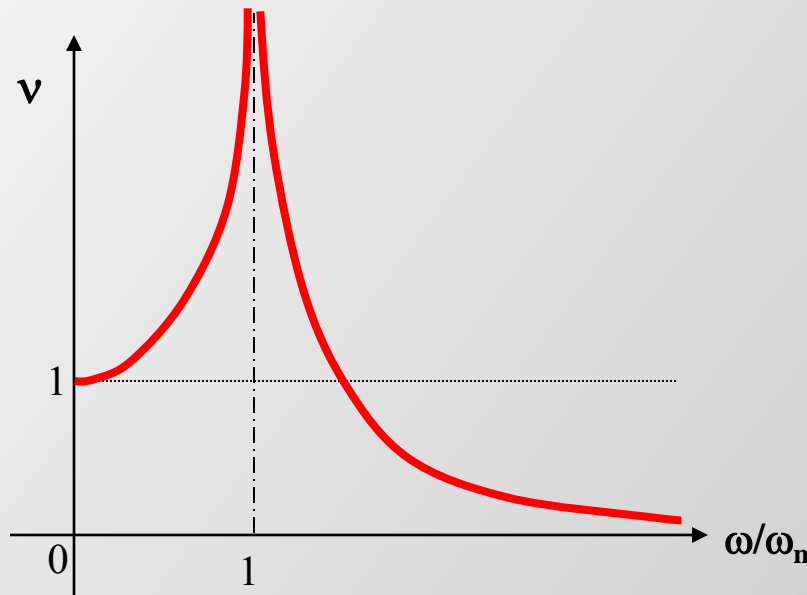
Amplituda drgań wynosi:

$$y_a = \frac{q_a}{\omega_n^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]} = \frac{y_{st}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

$y_{st}=P_a/k$ – odkształcenia sprężyste sprężyny wywołane działaniem siły P.

Definiując **współczynnik zwiększający drgania** jako y_a/y_{st} możemy narysować wykres na podstawie zależności:

$$v = \left| \frac{y_a}{y_{st}} \right| = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$



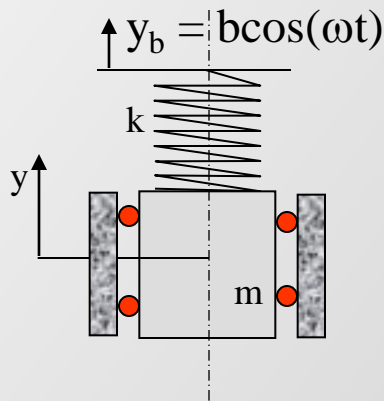
Wykres ma dwie asymptoty – prostą pionową przechodzącą przez punkt $\omega/\omega_n=1$ oraz prostą poziomą pokrywającą się z osią odciętych.

Dla $\omega = \omega_n$ amplituda drgań rośnie do nieskończoności co jest bardzo niebezpiecznym zjawiskiem. Mówimy wówczas o zjawisku **rezonansu**, a częstość wymuszenia ω równą częstości drgań własnych nazywamy **częstością rezonansową**.

Należy tak projektować urządzenia mechaniczne, aby $\omega/\omega_n \ll 1$ lub $\omega/\omega_n \gg 1$, gdy zależy nam na **minimalizacji drgań**.

Po przejściu przez rezonans faza zmienia się o wartość π .

❖ **Drgania wymuszone kinematycznie** – ruchy elementów maszyn lub urządzeń pomiarowych są wzbudzane przez element sprężysty, którego koniec poruszając się oddziałuje na masę układu drgającego.



Równanie ruchu ma postać:

$$m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y + k \cdot y_b$$

uwzględniając, że $y_b = b \cos(\omega t)$ otrzymujemy:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = q_a \cos(\omega t)$$

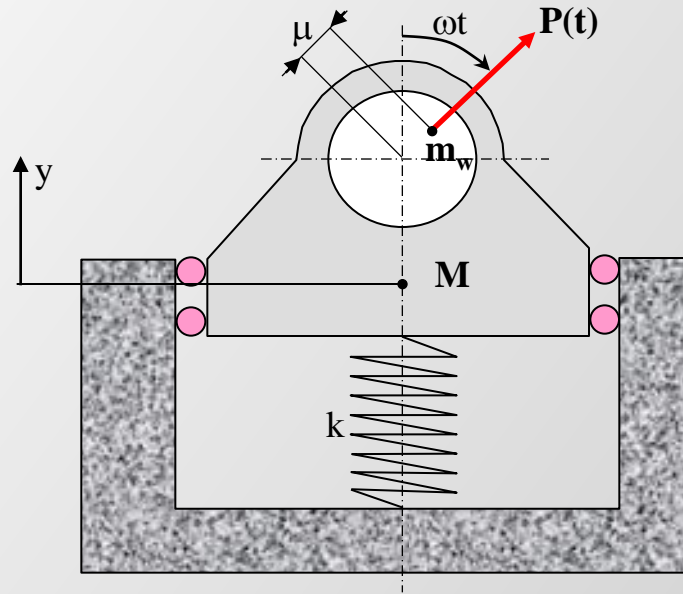
gdzie:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad q_a = \frac{k \cdot b}{m}$$

wykres rezonansowy z zależności

$$v = \left| \frac{y_a}{b} \right| = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

❖ Drgania wymuszone siłą odśrodkową



Pionowe drgania silnika wymuszone są siłą odśrodkową $P(t)$, która zrzutowana na oś pionową wynosi.

$$P(t) = m_w \mu \omega^2 \cos(\omega t)$$

m_w – masa wirnika

$$M \cdot \ddot{y} + k \cdot y = m_w \mu \omega^2 \cos(\omega t)$$

M – masa całego silnika, ω – częstość obrotów wirnika, k – współczynnik sztywności podparcia

$$\ddot{y} + \omega_n^2 \cdot y = q_a \cos(\omega t)$$

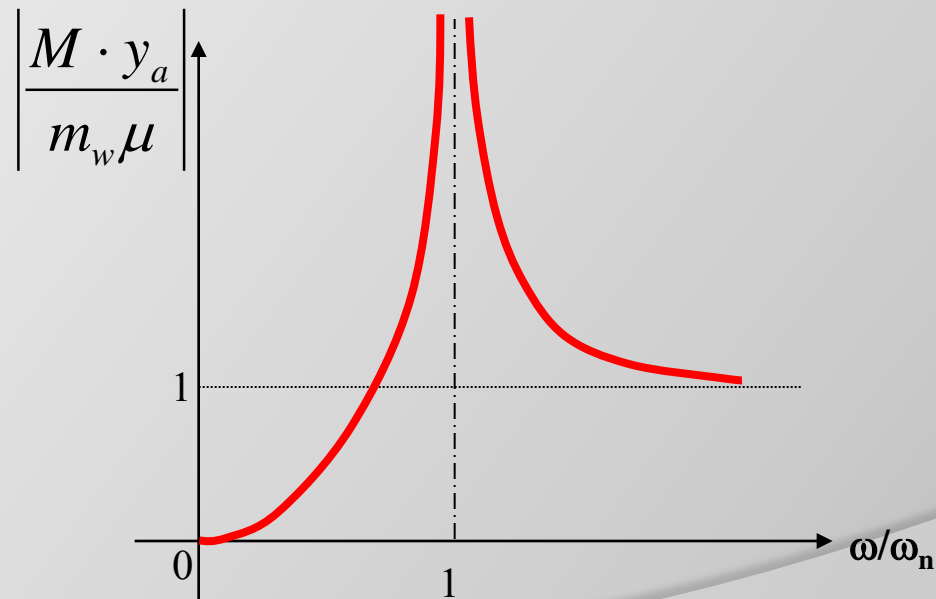
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}; \quad q_a = \frac{m_w \cdot \mu \cdot \omega^2}{M}$$

Zakładając rozwiązanie w postaci równania $y=y_a \cos(\omega t)$ otrzymujemy:

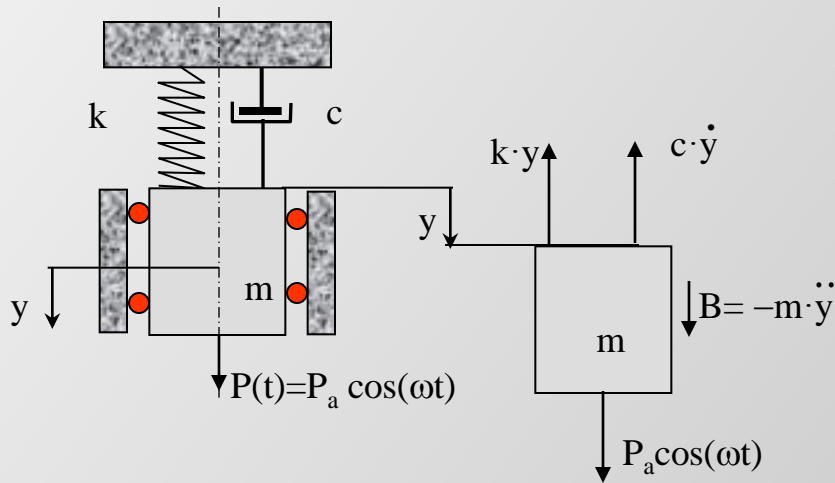
$$y_a = \frac{\frac{m_w \mu \omega^2}{M}}{\omega_n^2 - \omega^2} = \frac{\frac{m_w \mu}{M} \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$v = \left| \frac{M \cdot y_a}{m_w \mu} \right| = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

współczynnik zwiększający drgania



*Rozpatrzmy teraz ogólny model układu o jednym stopniu swobody tj. **drżania wymuszone siłą harmoniczną** o stałej amplitudzie układu z tłumieniem wiskotycznym.



Równanie drżañ ma postać:

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = P_a \cos(\omega t)$$

$$\ddot{y} + 2h \cdot \dot{y} + \omega_n^2 \cdot y = q_a \cos(\omega t)$$

gdzie:

$$2h = \frac{c}{m}; \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}; \quad q_a = \frac{P_a}{m}$$

Rozwiązanie ogólne jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego oraz rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Ze względu na to, że drgania swobodne po pewnym czasie się wytlumiają rozpatrywane będzie tylko rozwiązanie szczególne które przyjmiemy w postaci:

$$y = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Po dwukrotnym zróźniczkowaniu a następnie podstawieniu do równania różniczkowego i przyrównaniu wyrażen stojących przy członach $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(\omega_n^2 - \omega^2)A + 2h\omega B &= q_a \\ -2h\omega A + (\omega_n^2 - \omega^2)B &= 0\end{aligned}$$

Z tego układu równań wyznaczamy niewiadome A i B:

$$A = \frac{q_a}{\omega_n^2} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\omega_n}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}; \quad B = \frac{q_a}{\omega_n^2} \frac{2\frac{h}{\omega_n} \frac{\omega}{\omega_n}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\omega_n}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci:

$$y = y_a \cos(\omega t - \beta)$$

mamy:

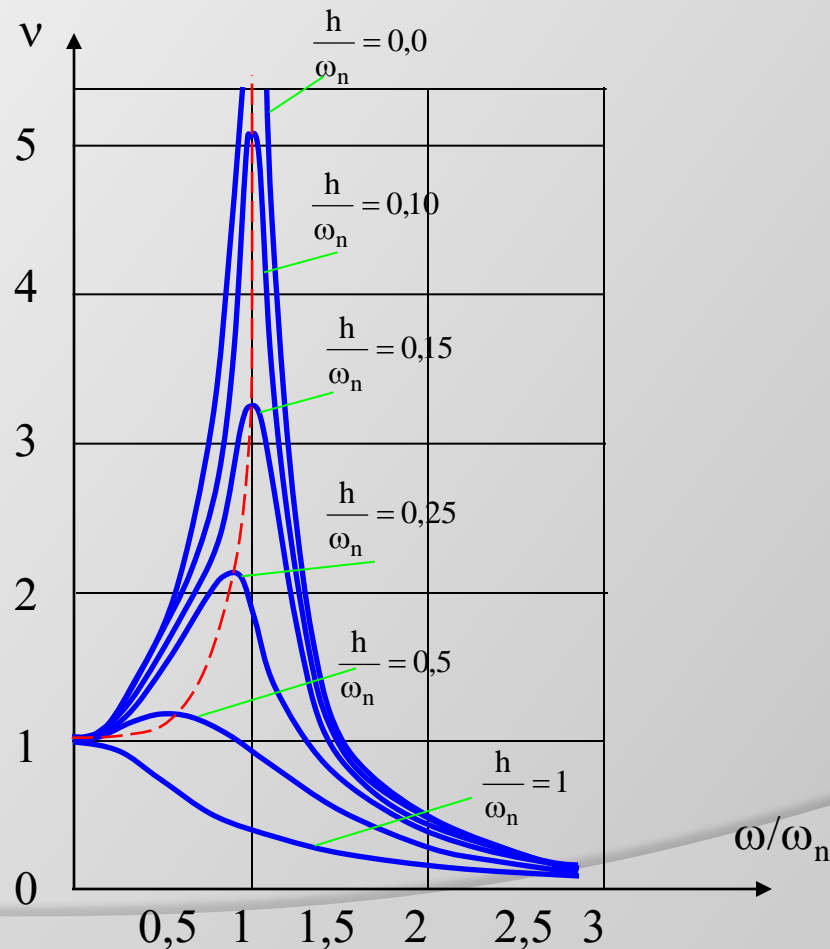
$$y_a = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{q_a}{\omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\omega_n}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}};$$

$$\beta = \arctg \frac{2 \frac{h}{\omega_n} \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2};$$

Po wprowadzeniu wielkości $y_{st} = q_a / \omega_n^2$ współczynnik zwiększający drgania v wynosi:

$$v = \left| \frac{y_a}{y_{st}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\omega_n}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Współczynnik v wyraża stosunek największego wychylenia (amplituda a) do wychylenia statycznego. Wykres zależności $v(\omega/\omega_n)$ nazywamy wykresem rezonansowym dla układu o jednym stopniu swobody z tłumieniem wiskotycznym. Przedstawia on bezwymiarowe amplitudy drgań przy różnych stosunkach ω/ω_n dla kolejnych stałych wartości h/ω_n .



Z wykresu widać, że amplituda drgań jest wrażliwa na tłumienie w zakresie $0,5 < \omega/\omega_n < 1,4$, a szczególnie wrażliwa $\omega/\omega_n \approx 1$.

Po przekroczeniu tego zakresu amplituda gwałtownie spada i przy $\omega \rightarrow \infty$ dąży do zera.

W przeciwieństwie do wykresu rezonansowego bez tłumienia maksimum amplitudy drgań jest nieznacznie przesunięte w lewo ponieważ występuje ono dla wartości:

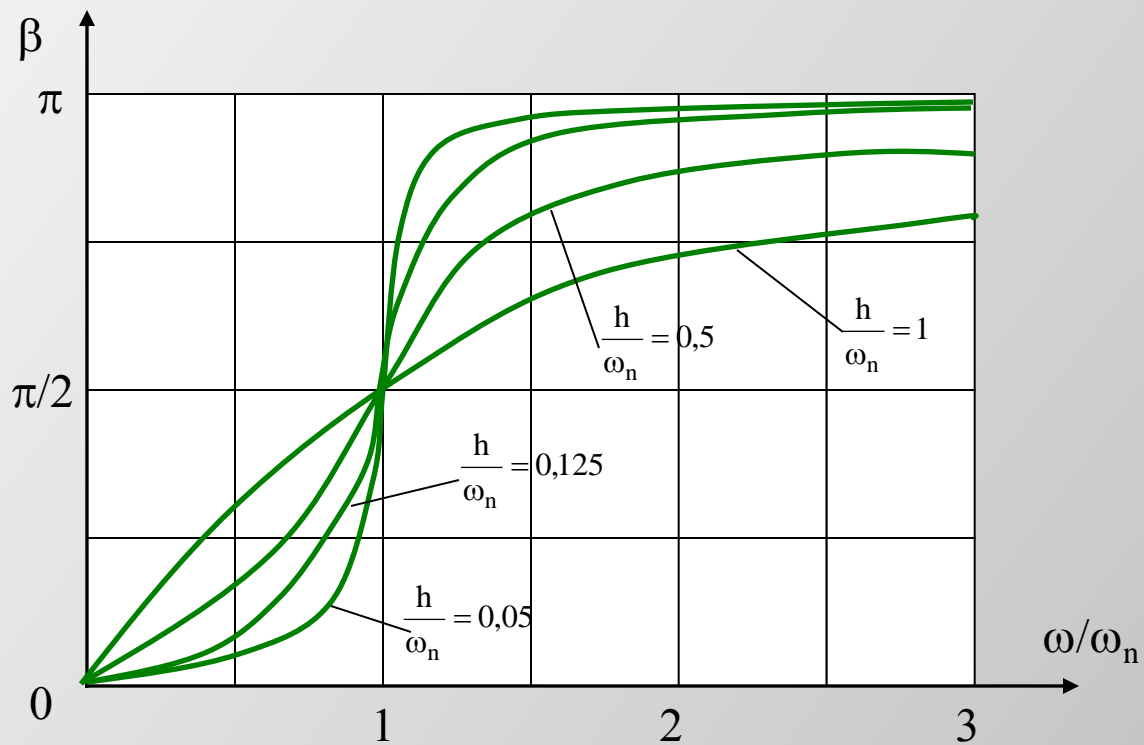
$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2 \left(\frac{h}{\omega_n} \right)^2}$$

Dla bardzo dużego tłumienia $h/\omega_n > 0,707$ wymienione maksimum nie istnieje i amplituda drgań wymuszonych maleje monotonicznie.

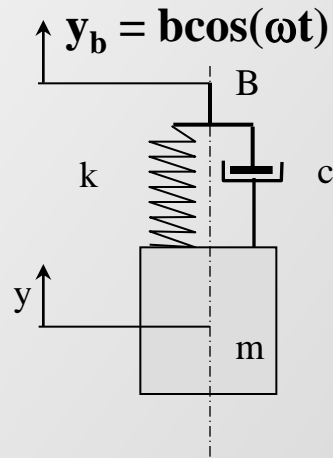
Kąt β jest miarą opóźnienia fazy drgań względem fazy siły wymuszającej i jest nazwany **kątem opóźnienia fazy drgań**.

Jak widać przy zbliżaniu się do rezonansu $\omega = \omega_n$ opóźnienie w fazie gwałtownie rośnie, i to tym gwałtowniej, im mniejsze jest tłumienie. Dla $\omega/\omega_n \ll 1$ oraz $\omega/\omega_n \gg 1$ zmiany kąta β są o wiele mniej wrażliwe na zmianę tłumienia i odpowiednio wartości kąta opóźnienia fazy drgań są albo bliskie zeru, albo 180° .

Drgania wymuszone - s.38



* Drgania wymuszone kinematycznie



Równania drgań dla tego przypadku mają postać:

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = k \cdot y_b + c \cdot \dot{y}_b$$

gdzie y_b jest przemieszczeniem punktu B o amplitudzie b i częstotliwości ω , a po przekształceniu otrzymujemy:

$$\ddot{y} + 2h \cdot \dot{y} + \omega_n^2 \cdot y = p_a \sin(\omega t) + q_a \cdot \cos(\omega t)$$

$$2h = \frac{c}{m}; \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}; \quad p_a = -\frac{c \cdot \omega \cdot b}{m} \quad q_a = \frac{k \cdot b}{m}$$

Rozwiązanie powyższego liniowego równania różniczkowego wykonamy zasadą superpozycji, tzn. jako sumę rozwiązań wyznaczonych dla każdego z wymuszeń osobno:

$$\ddot{y}_1 + 2h \cdot \dot{y}_1 + \omega_n^2 \cdot y_1 = q_a \cdot \cos(\omega t)$$

$$\ddot{y}_2 + 2h \cdot \dot{y}_2 + \omega_n^2 \cdot y_2 = p_a \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Rozwiązania równań mają postać:

$$y_1 = y_{a1} \sin\left[\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \beta_1\right]; \quad y_2 = y_{a2} \sin\left[(\omega t) - \beta_2\right]$$

gdzie:

$$y_{a1} = \frac{q_a}{\sqrt{[\omega_n^2 - \omega^2]^2 + 4h^2 \omega^2}}; \quad y_{a2} = \frac{p_a}{\sqrt{[\omega_n^2 - \omega^2]^2 + 4h^2 \omega^2}}$$

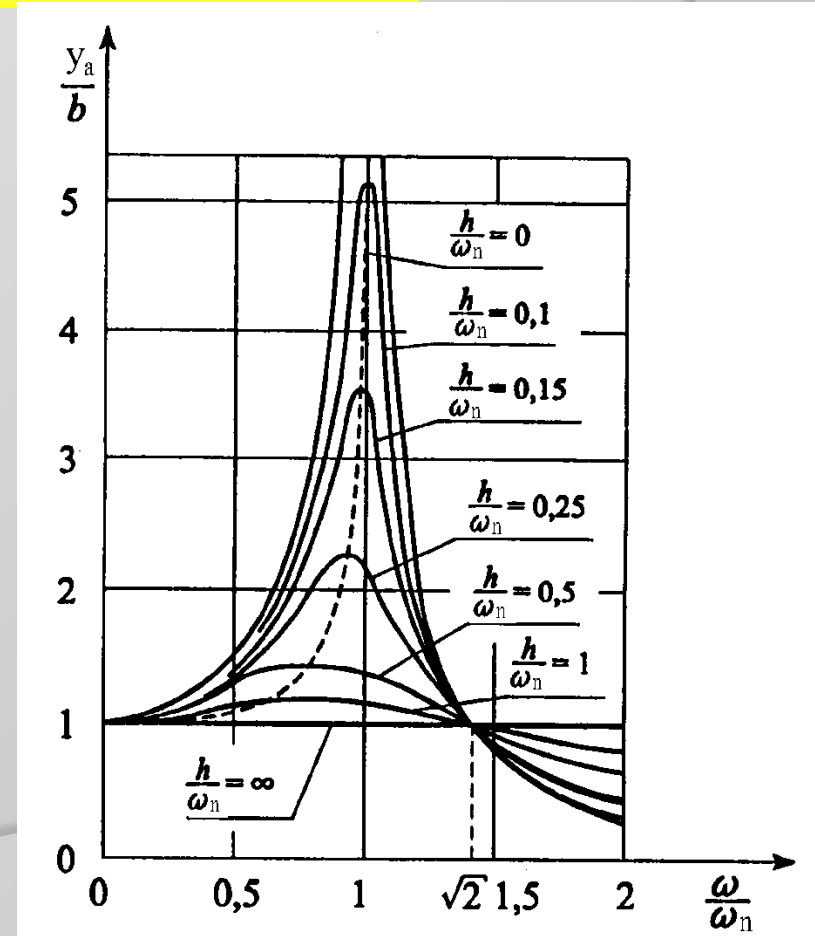
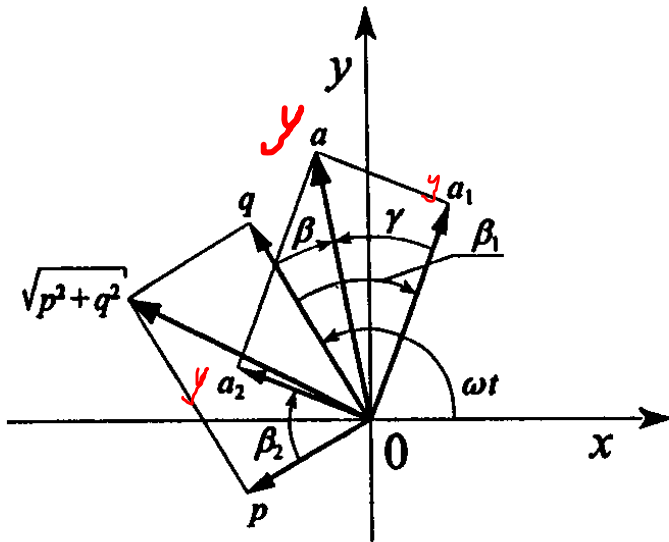
$$\beta_1 = \beta_2 = \arctg \frac{2h\omega}{\omega_n^2 - \omega^2};$$

Przyjmujemy rozwiązanie w postaci: $y = y_a \sin(\omega t - \beta)$ gdzie:

$$y_a = \sqrt{y_{a_1}^2 + y_{a_2}^2}; \quad \beta = \beta_1 + \gamma = \beta_1 + \arctg \frac{y_{a_2}}{y_{a_1}}$$

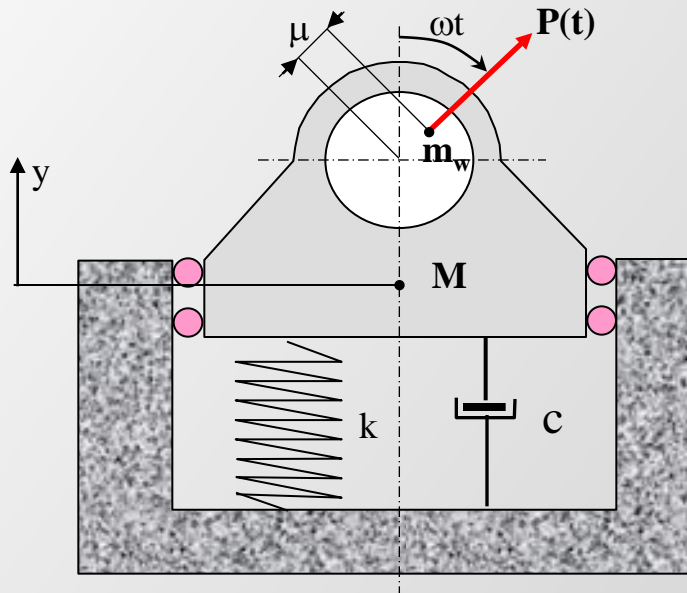
oraz

$$\frac{y_a}{b} = \frac{\sqrt{1 + 4\left(\frac{h}{\omega_n}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{h}{\omega_n}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$



Zasadnicza różnica pomiędzy tym wykresem a wykresem rezonansowym wcześniej przedstawionym polega na tym, że wszystkie krzywe rezonansowe przecinają się dla $\omega/\omega_n=2^{0,5}$ w tym samym punkcie.

* Drgania wymuszone siłą odśrodkową



Dodatkowo przyjmujemy, że między silnikiem a podłożem znajduje się tłumik o tłumieniu wiskotycznym c .

Równanie ruchu ma postać:

$$M \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + k \cdot y = m_w \mu \omega^2 \cos(\omega t)$$

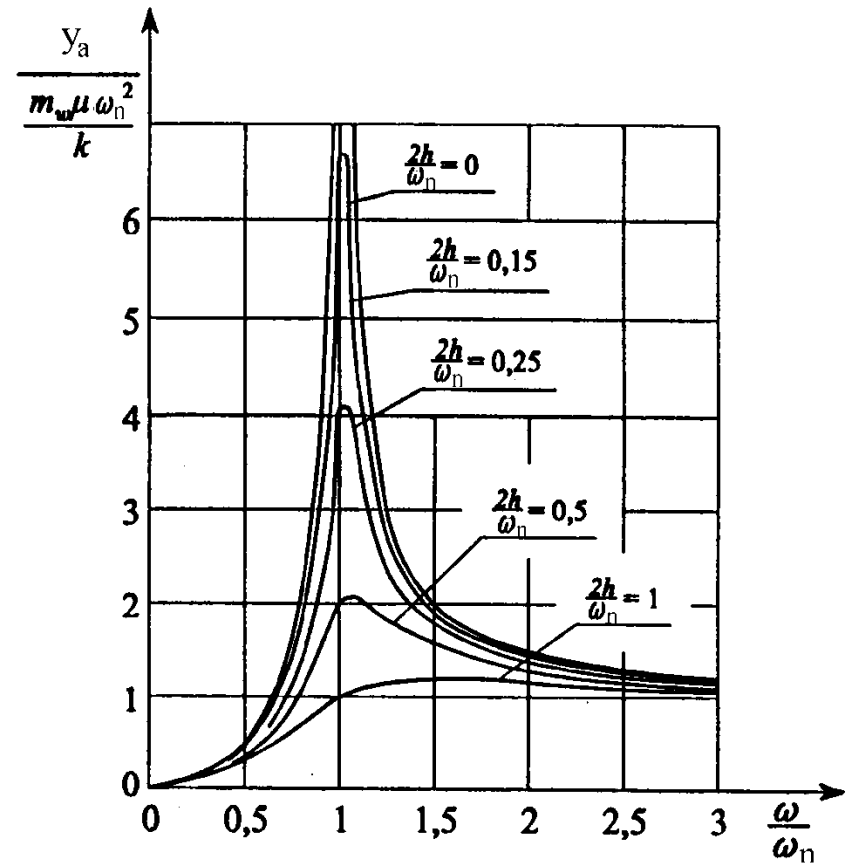
μ – niewyważenie silnika

$$\ddot{y} + 2h \cdot \dot{y} + \omega_n^2 \cdot y = q_a \cos(\omega t)$$

$$2h = \frac{c}{M}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}; \quad q_a = \frac{m_w \cdot \mu \cdot \omega^2}{M}$$

$$y_a = \frac{m_w \mu \omega^2}{M} \frac{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4 \frac{h^2}{\omega_n^2} \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

Cechą charakterystyczną tego wykresu, różniącą go od dwóch poprzednich jest to, że dla $\omega \rightarrow \infty$ mamy $y_a = m_w \mu \omega_n^2 / k$ co odpowiada ugięciu statycznemu układu.



Drgania wymuszone złożonymi wymuszeniami. Wymuszenia kinematyczne. Rezonans statyczny i dynamiczny.

Sztywność zastępcza.

W wielu zagadnieniach złożona odkształcalność układu mechanicznego może być przedstawiona za pomocą prostego elementu sprężystego, którego sztywność musi być tak określona, by zachodziła równoważność między obu układami: rzeczywistym i zastępczym.

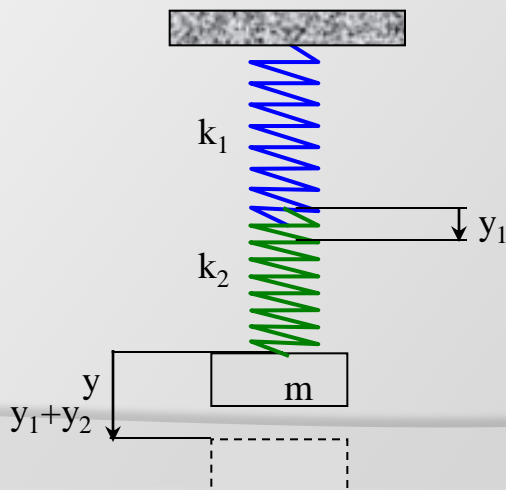
Zastosowanie powyższych rozwiązań jest szczególnie celowe, gdy w układzie występuje kilka połączonych elementów sprężystych lub gdy element bardziej złożony może być zastąpiony prostszym.

Spośród możliwych rodzajów można wydzielić dwa podstawowe:

1. Układ szeregowy

$$y_1 + y_2 = y$$

Siła w sprężystości P w dwóch sprężynach $P = k_1 y_1 = k_2 y_2$; $y = P/k$



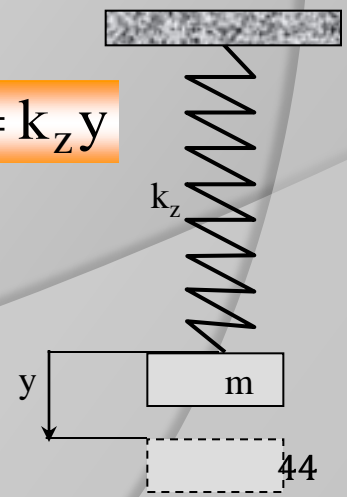
stąd

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots = \frac{1}{k_z}$$

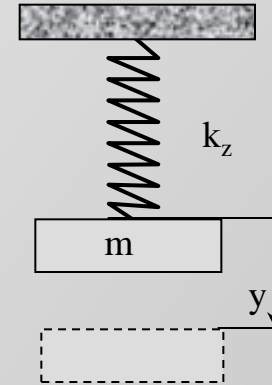
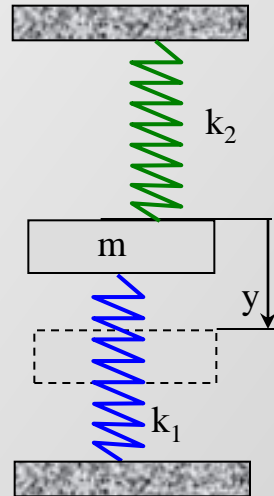
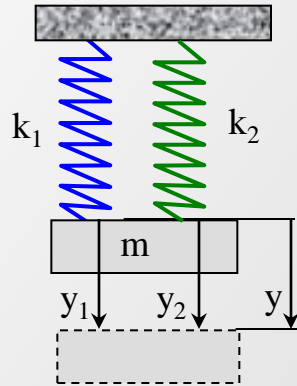
$$k_z = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Dla układu zastępczego

$$P = k_z y$$



2. Układ równoległy



$$y_1 = y_2 = y$$

$$P = k_1 y_1 + k_2 y_2 = k_z y$$

$$k_z = k_1 + k_2$$

Tłumienie i tłumienie zastępcze

W praktyce wyróżniamy 4 rodzaje tłumienia:

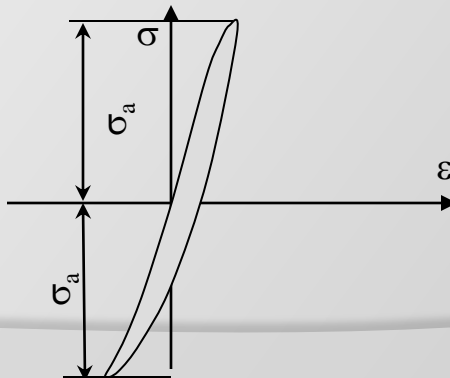
1. Tłumienie tarciem wewnętrznym.
2. Tarcie ciał stałych.
3. Tłumienie hydrodynamiczne.
4. Tłumienie wiskotyczne.

Tłumienie tarciem wewnętrznym jest związane z **rozpraszaniem energii** układu drgającego wskutek **histerezy sprężystej elementów sprężystych**.

Na każdy cykl drgań zostaje rozproszona energia w odniesieniu do jednostki objętości

$$H = \sigma \varepsilon$$

Siły tłumiące są proporcjonalne do naprężenia a więc i do odkształcenia. Zależą więc od przemieszczenia y , (x) układu.



Tłumienie tarciem ciał stałych. W tym przypadku siły oporu nie zależą praktycznie ani od przemieszczenia ani (w przybliżeniu) od prędkości i są stałe co do wartości i zawsze mają przeciwny zwrot do kierunku prędkości.

$$T = \pm T_0 = \text{const}$$

Tłumienie hydrodynamiczne. Opór hydrodynamiczny jest proporcjonalny do kwadratu prędkości:

$$T = \beta \cdot \dot{y}^2$$

Tłumienie wiskotyczne. Opór jest proporcjonalny do prędkości

$$T = -c \cdot \dot{y}$$

Tłumienie zastępcze.

Jeden rodzaj tłumienia jest równoważny drugiemu jeśli ilość energii rozproszonej w czasie jednego cyklu drgań **jest w obu przypadkach jednakowa**. Przebieg drgań będzie w każdym cyklu inny, ale ich zanikanie będzie następować w tym samym tempie. Z uwagi na prostotę rozwiązania **zawsze zastępuje się inne rodzaje tłumienia - tłumieniem wiskotycznym**.

W celu wyznaczenia wartości c_z - **współczynnika tłumienia zastępczego – wiskotycznego** – wyznacza się **ilość energii rozproszonej** w czasie jednego cyklu drgań układu.

Ogólnie będzie:

$$E = \int_0^T T(y, \dot{y}) dy = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} T(y, \dot{y}) \dot{y} dt$$

Zakładając drgania harmoniczne $y=y_0\cos(\omega t)$, $\dot{y}=-y_0\omega\sin(\omega t)$ będzie:

$$E = - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} T(y, \dot{y}) y_0 \omega \sin(\omega t) dt$$

Dla tłumienia wiskotycznego $T=-c\dot{y}=cy_0\omega\sin(\omega t)$ będzie więc:

$$E = cy_0^2\omega^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t) dt = \pi cy_0^2\omega$$

W przypadku tłumienia tarciem wewnętrznym $E=H$

$$c_z = \frac{H}{\pi y_0^2 \omega}$$

W przypadku tłumienia tarciem ślizgowym ciał stałych jest $T=\pm T_0$

$$E = 4 \int_0^{\frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega}} T_0 y_0 \omega dt = 4 y_0 T_0$$

$$c_z = \frac{4T_0}{\pi y_0 \omega}$$

W przypadku tłumienia hydrodynamicznego jest: $T = \beta \cdot \dot{y}^2$

$$E = 4 \int_0^{\frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega}} \beta y_0^2 \omega^3 \sin^3(\omega t) dt$$

$$E = \frac{8}{3} \beta y_0^3 \omega^2 = \pi c_z y_0^2 \omega$$

stąd

$$c_z = \frac{8}{3\pi} \beta y_0 \omega$$

Drgania złożone - s.50

Drgania złożone

Zasada superpozycji: **wychylenie jest sumą wychyleń wywołanych przez poszczególne czynniki osobno.** Zasada wynika z liniowości związku między wychyleniem a siłą.

Superpozycja sił wymuszających

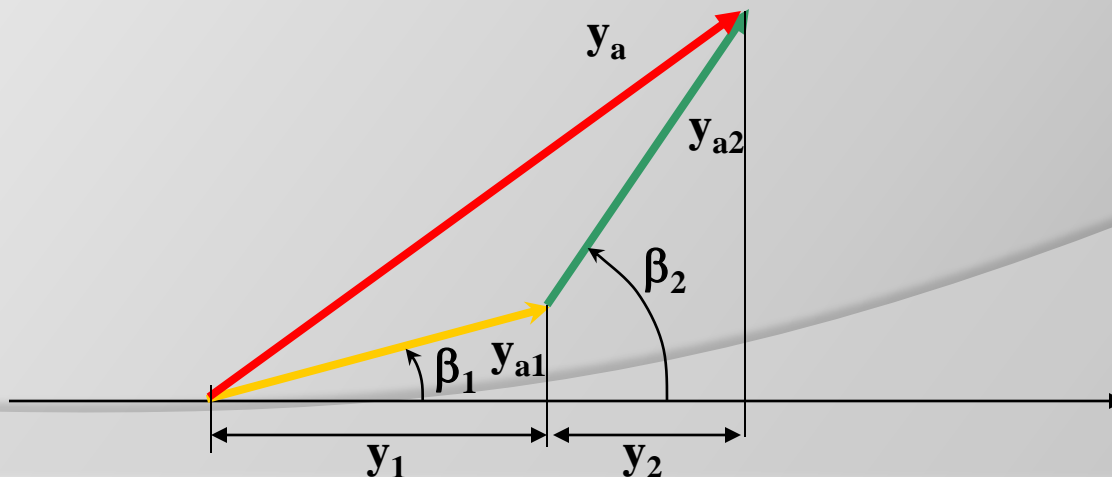
$$m \ddot{y} + 2h \dot{y} + \omega_n^2 \cdot y = p_a \cos(\omega t + \beta_1) + q_a \cos(\omega t + \beta_2)$$

$$\beta_1 \neq \beta_2$$

Gdy $q_a=0 \Rightarrow y_1$; $p_a=0 \Rightarrow y_2$

$$y=y_1+y_2$$

Zasada superpozycji



Jeżeli siły wymuszające są koherentne (spójne, ta sama częstość wymuszenia, stała w czasie różnica faz) to

$$y_a^2 = y_{a1}^2 + y_{a2}^2 + 2y_{a1}y_{a2} \cos(\beta_2 - \beta_1)$$

Dla $p_q = q_a \Rightarrow$

$$y_a^2 = 2y_{a1}^2 [1 + \cos(\beta_2 - \beta_1)]$$

Jeżeli siły wymuszające nie są koherentne

$$y_a > y_{a1}; y_{a2}$$

- superpozycja konstruktywna

$$y_a < y_{a1}; y_{a2}$$

- superpozycja destruktywna

$$\beta_2 - \beta_1 = \pm\pi$$

- całkowicie destruktywna

$$\beta_2 = \beta_1$$

- całkowicie konstruktywna

Superpozycja dwu drgań harmoniczych prostych:

1. Ten sam kierunek, ta sama częstość.

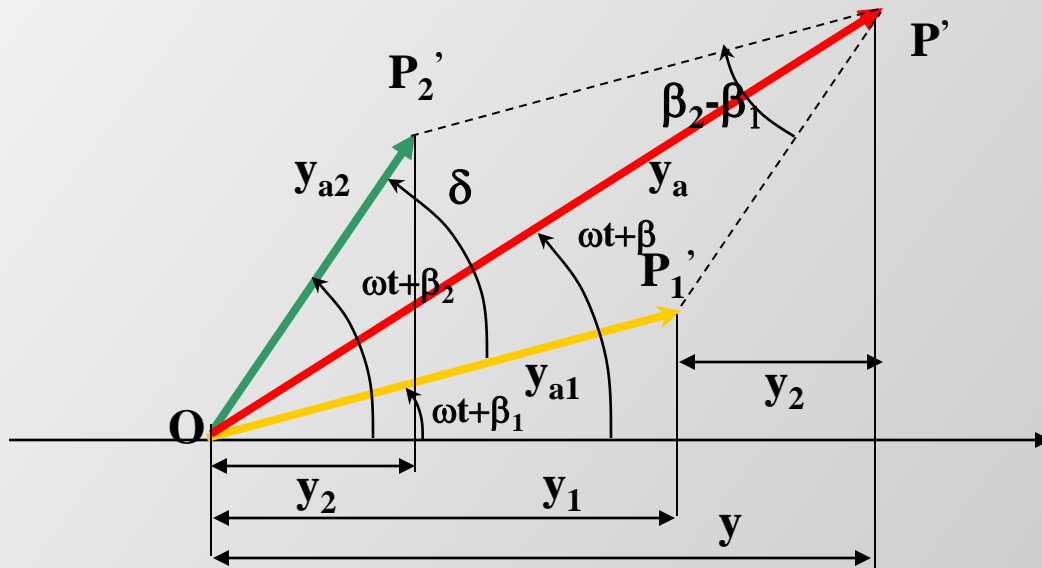
$$y_1 = y_{a1} \cos(\omega t + \beta_1) ; y_2 = y_{a2} \cos(\omega t + \beta_2)$$

Wychylenie wypadkowe:

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = y_{1a} \cos(\omega t + \beta_1) + y_{a2} \cos(\omega t + \beta_2)$$

Wychylenie w ruchu harmonicznym jako składowa y-owa wirującego wektora \overline{OP}' .



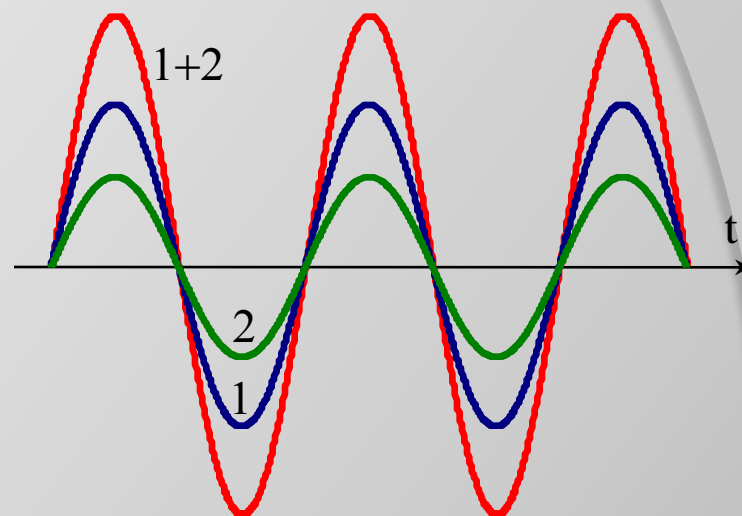
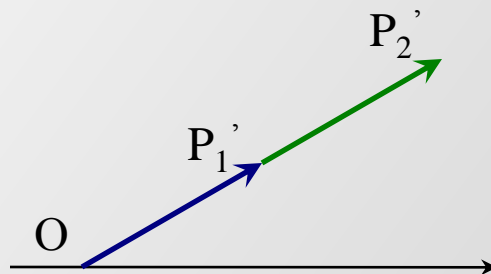
Wektor \overline{OP}' , będący sumą \overline{OP}_1 i \overline{OP}_2 ma stałą długość i wiruje wokół O z prędkością kątową ω

$$y = y_a \cos(\omega t + \beta)$$

$$y_a = (y_{a1}^2 + y_{a2}^2 + 2y_{a1}y_{a2} \cos \delta)^{1/2}$$

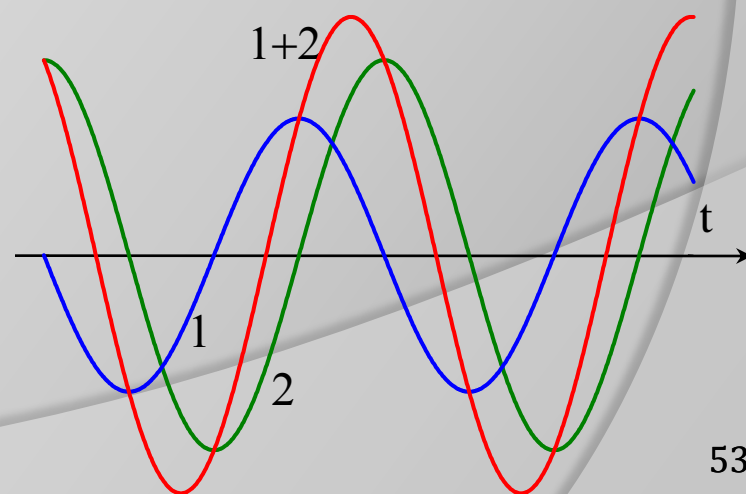
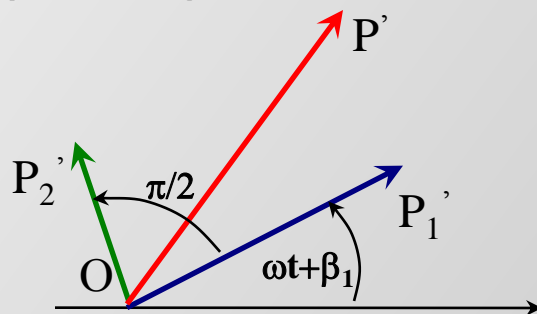
$$\text{tg } \beta = \frac{y_{a1} \sin \beta_1 + y_{a2} \sin \beta_2}{y_{a1} \cos \beta_1 + y_{a2} \cos \beta_2}$$

Dla $\beta_2 = \beta_1 \Rightarrow \delta = 0$.



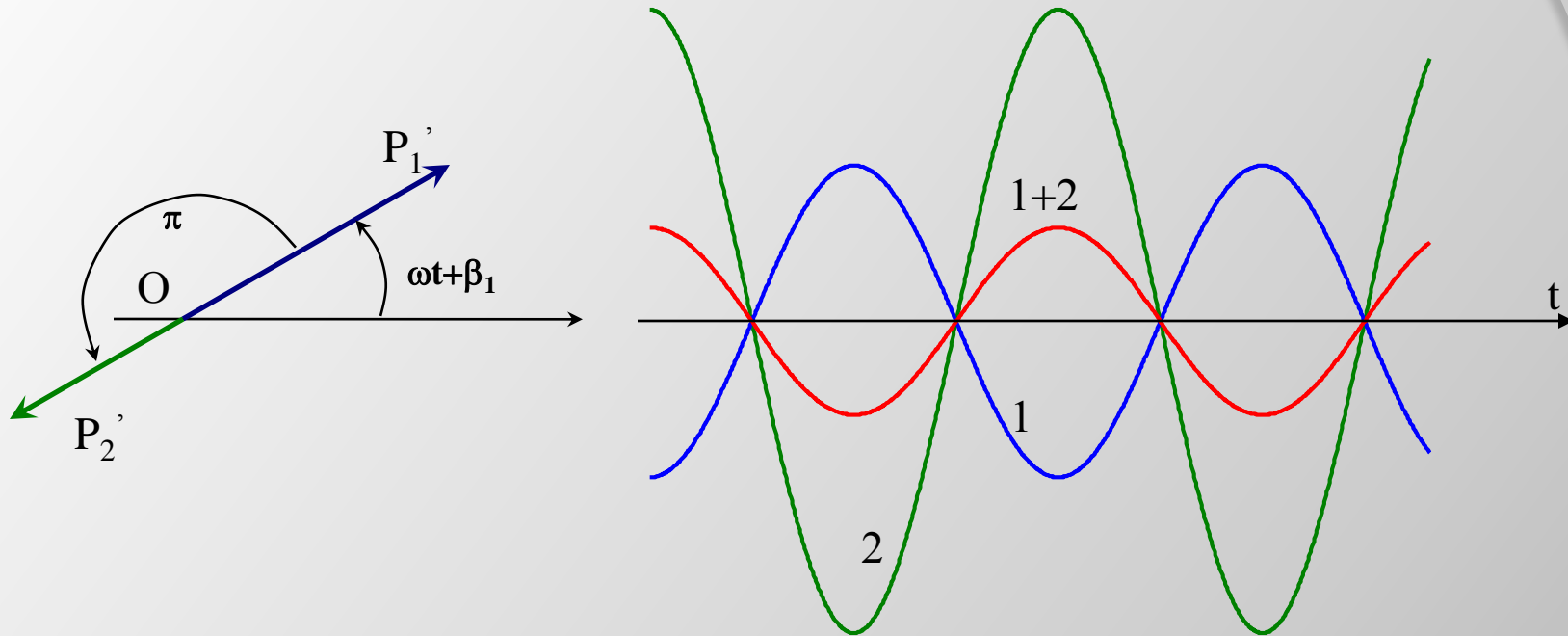
$$y_a = y_{a1} + y_{a2};$$

Dla $\beta_2 = \beta_1 + \pi/2; \delta = \pi/2$



$$y_a = \left[(y_{a1})^2 + (y_{a2})^2 \right]^{1/2};$$

Dla $\beta_2 = \beta_1 + \pi; \delta = \pi$



$$y_a = y_{a1} - y_{a2}$$

Dla $y_{a1} = y_{a2} \Rightarrow 0$

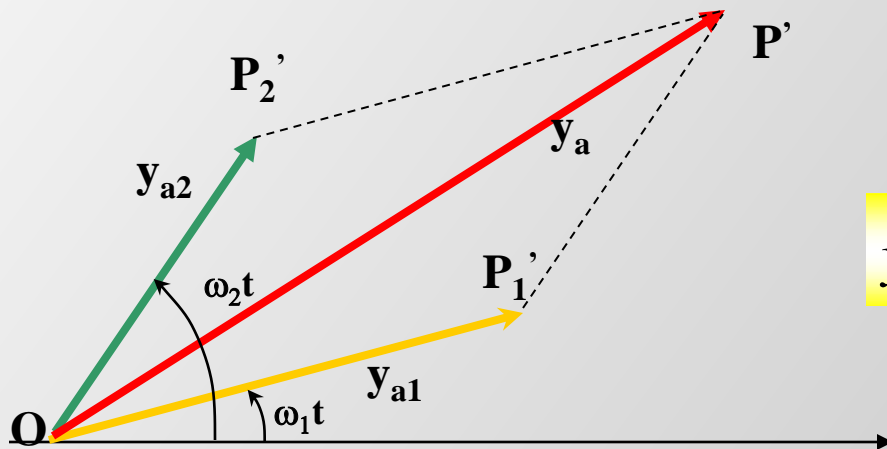
2. Ten sam kierunek, różne częstotliwość.

$$y_1 = y_{a1} \cos(\omega_1 t + \beta_1) ; y_2 = y_{a2} \cos(\omega_2 t + \beta_2)$$

Wychylenie wypadkowe:

$$y = y_1 + y_2$$

Wychylenie nie jest prostym ruchem harmonicznym.



Amplituda jest zmodulowana z częstotliwością:

$$y_a = \left[y_{a1}^2 + y_{a2}^2 + 2y_{a1}y_{a2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t \right]^{1/2}$$

Oscyluje pomiędzy $y_a = y_{a1} + y_{a2}$ - dla $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$ a $y_a = |y_{a1} - y_{a2}|$ - dla $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi + \pi$

$$v = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = v_1 - v_2$$

Wektor $\overline{OP'}$ ma zmienną długość i nie obraca się ze stałą prędkością kątową ω .

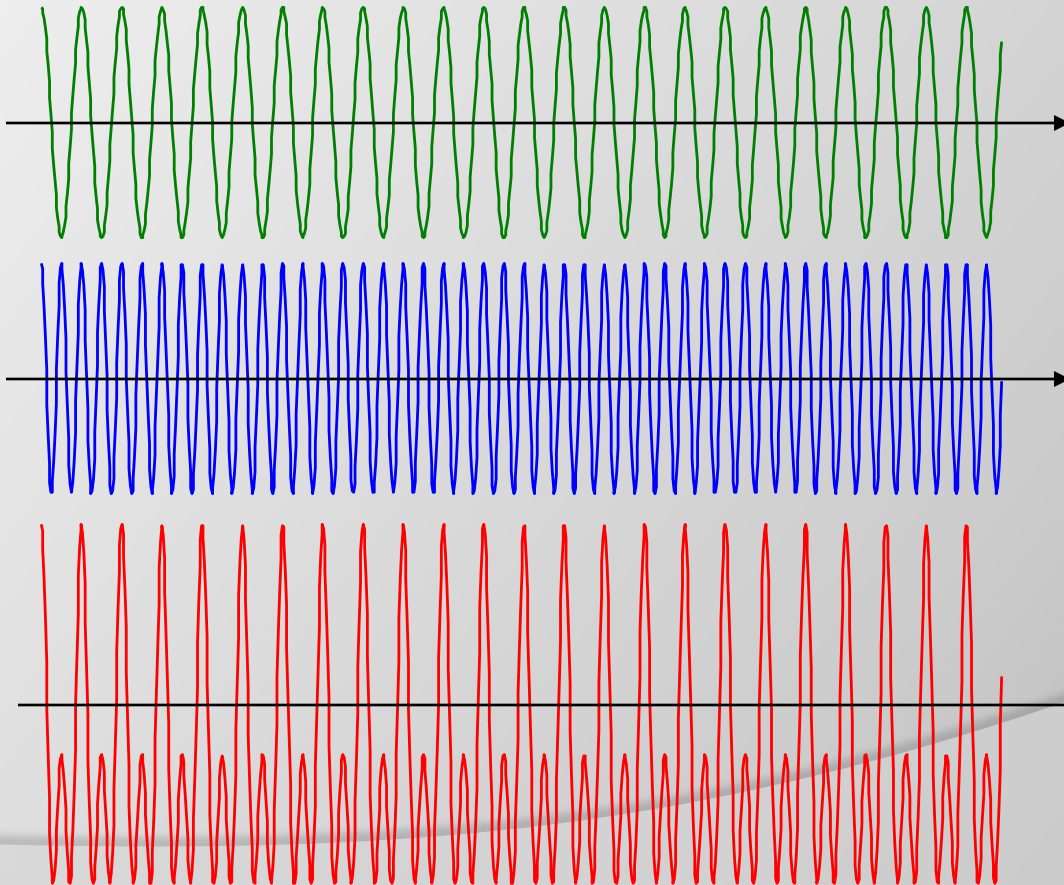
Amplituda

Dla $y_{a1} = y_{a2}$

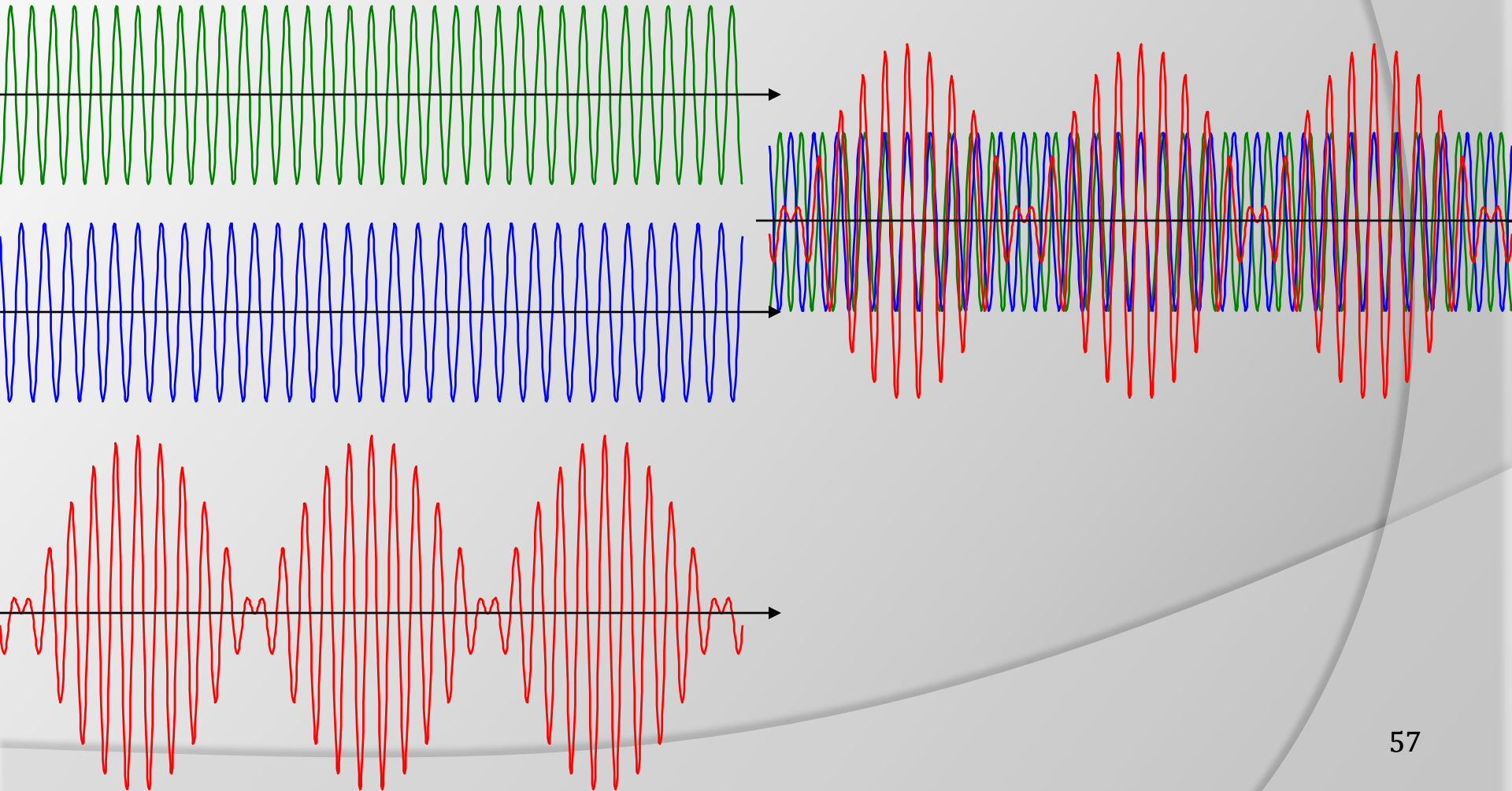
$$y = y_1 + y_2 = y_{a1} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$$

$$y = 2y_{a1} \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right] \cdot \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$

Ruch drgający o częstotliwości $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ i amplitudzie $y_a = 2y_{a1} \cos[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t]$



Dla $\omega_1 \cong \omega_2$ **dudnienie** z częstością $(\omega_1 - \omega_2)$ maleje gdy $\omega_1 \rightarrow \omega_2$



Zasada superpozycji obowiązuje także dla liczby drgań >2 . Szczególny przypadek - dodawanie drgań o tym samym kierunku i o częstościach: ω (podstawowa lub pierwsza harmoniczna), 2ω (druga harmoniczna), 3ω , 4ω , itd., tzn. o okresach T ; $T/2$; $T/3$; $T/4$; itd. Drgania wypadkowe, pochodzące ze złożenia takich drgań z dowolnymi amplitudami i fazami początkowymi \Rightarrow drgania o okresie T , **ale nieharmoniczne**.

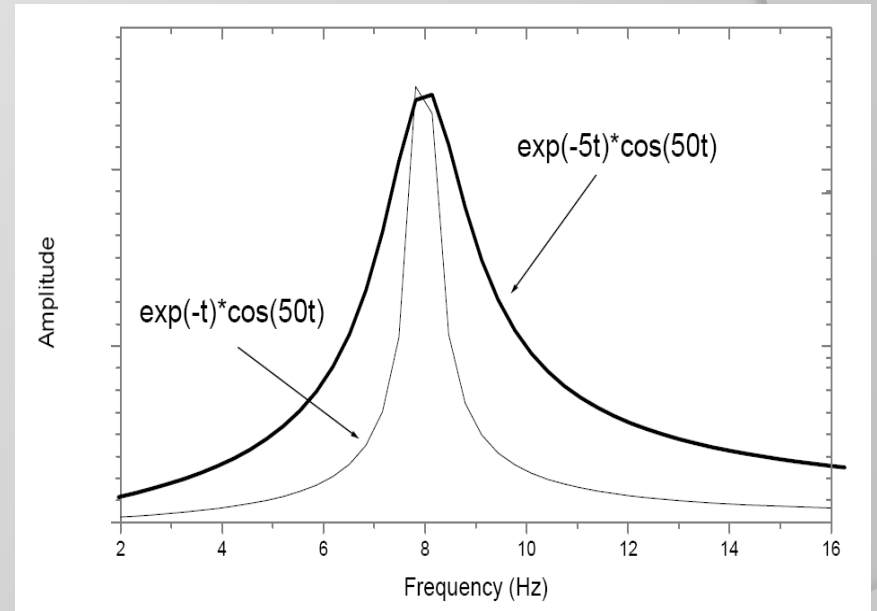
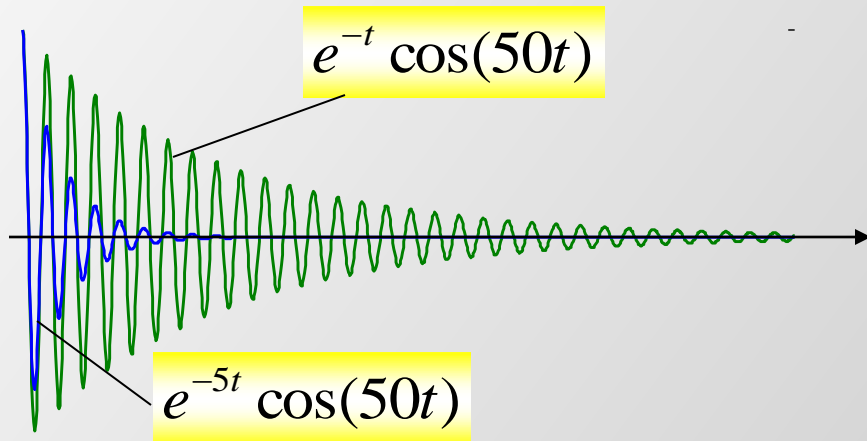
Twierdzenie Fouriera: Niesinusoidalną funkcję periodyczną o częstości ω można wyrazić jako sumę algebraiczną stałej oraz funkcji sinusoidalnych o częstościach ω , 2ω , 3ω itd. dobierając odpowiednio ich liczbę, amplitudy i fazy.

$$x = X_0 + X_1 \sin(\omega t + \theta_1) + X_2 \sin(2\omega t + \theta_2) + X_3 \sin(3\omega t + \theta_3) + \dots ;$$

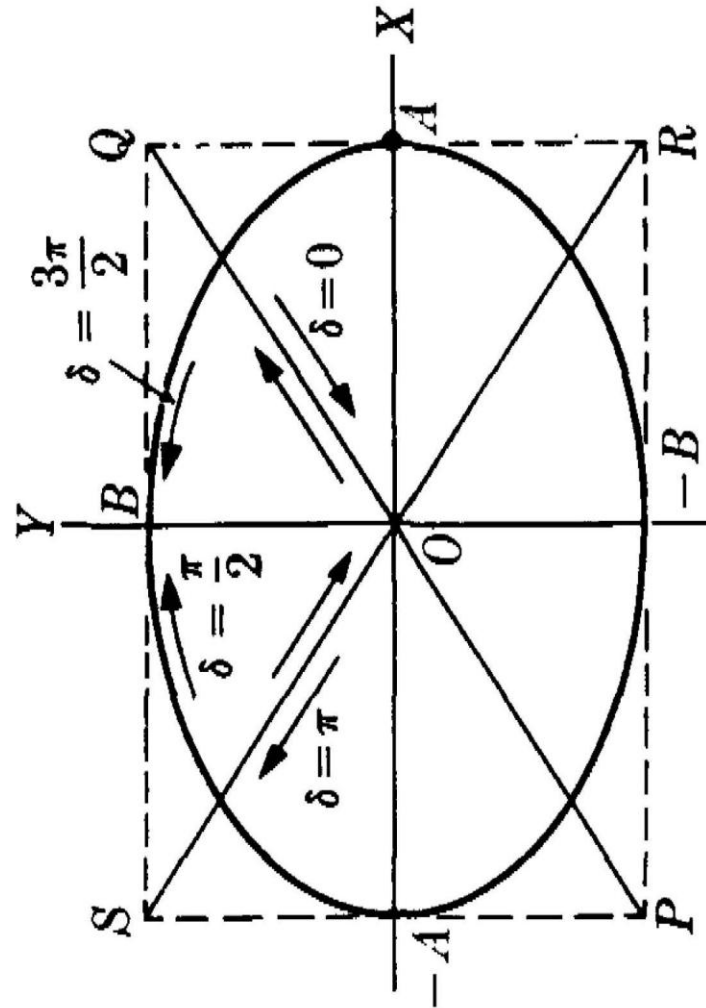
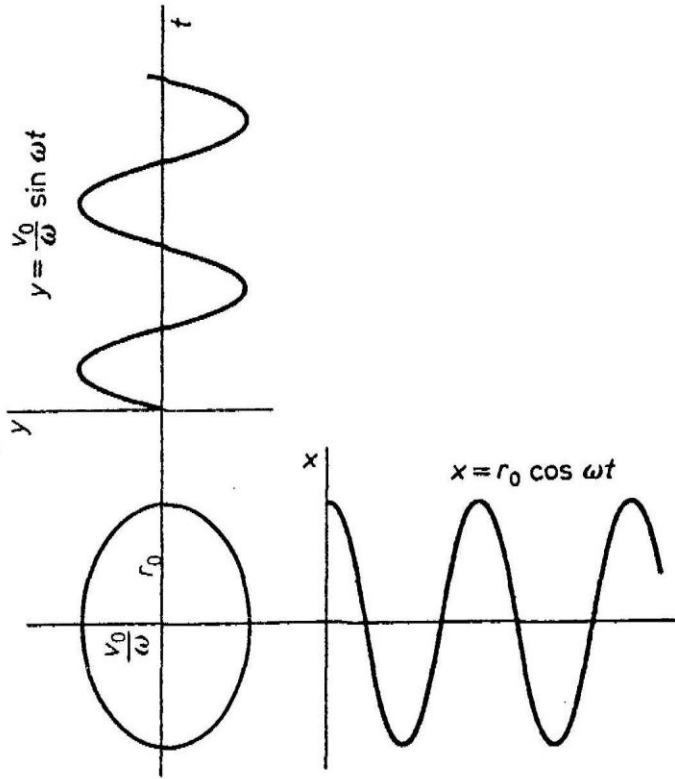
$$x = X_0 + A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t) + A_3 \sin(3\omega t) + \dots + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + \dots$$

Ruchu nieperiodycznego nie da się przedstawić w postaci szeregu Fouriera dla nieciągłego rozkładu częstości ω , 2ω , 3ω itd. Może być on rozłożony na nieskończoną liczbę ruchów harmonicznym o sąsiednich częstościach nieskończenie bliskich i amplitudach nieskończenie małych.

Drgania złożone - s.59



3. Kierunki prostopadłe



a) $v_1=v_2 \Rightarrow x = A \cos(\omega t), y = B \cos(\omega t + \delta)$

Niech $\delta = 0$

$$y = B \cos[\omega t] \Rightarrow y = \left(\frac{B}{A}\right)x \quad \text{- Równanie prostej PQ}$$

Przesunięcie wzdłuż PQ wynosi

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} = (A^2 + B^2)^{1/2} \cos(\omega t)$$

- Ruch harmoniczny prosty o amplitudzie $(A^2+B^2)^{1/2}$

$$y = -B \cos[\omega t] \Rightarrow y = -\left(\frac{B}{A}\right)x \quad \text{- Równanie prostej RS}$$

Złożenie dwu prostopadłych drgań harmonicznnych prostych o tej samej częstotliwości gdy $\delta=0$ lub π daje w wyniku drgania spolaryzowane („uporządkowane“) liniowo.

Niech $\delta = \pi/2$

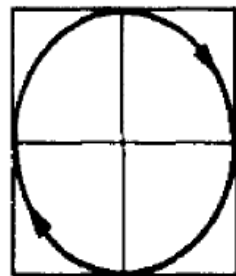
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad \text{- Równanie elipsy o półosiach A i B}$$

Dla $\delta = 3\pi/2$ lub $(-\pi/2)$ ta sama elipsa, ale kierunek obiegu przeciwny.

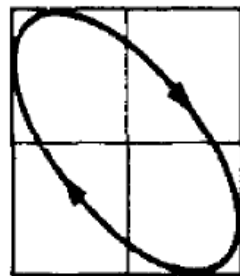
Złożenie dwu prostopadłych drgań harmonicznycch o tej samej częstotliwości gdy $\delta = \pm \pi/2$ daje w wyniku drgania spolaryzowane eliptycznie. Osie elipsy są równoległe do kierunków drgań.

Dla $A=B$ elipsa przechodzi w okrąg - polaryzacja kołowa.

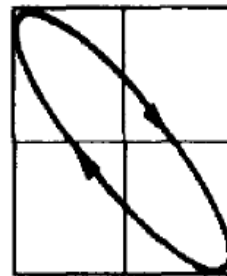
Dla δ dowolnego – drgania eliptyczne, osie elipsy obrócone względem X, Y.



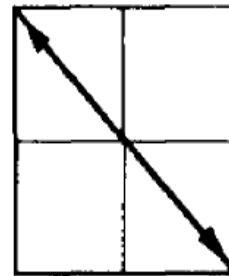
$\delta = 90^\circ$



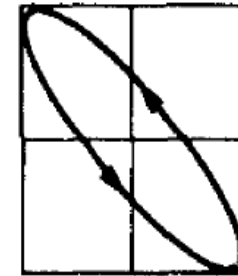
$\delta = 120^\circ$



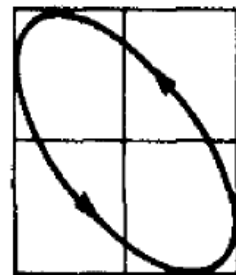
$\delta = 150^\circ$



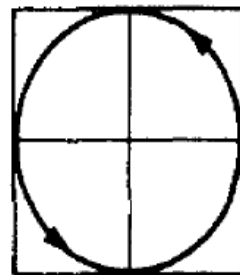
$\delta = 180^\circ$



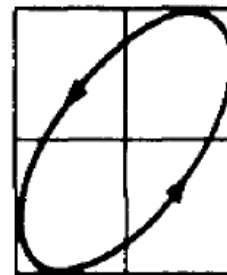
$\delta = 210^\circ$



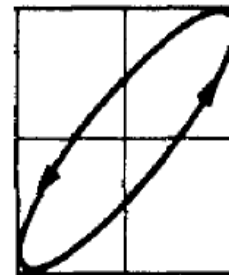
$\delta = 240^\circ$



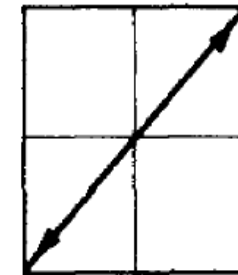
$\delta = 270^\circ$



$\delta = 300^\circ$



$\delta = 330^\circ$



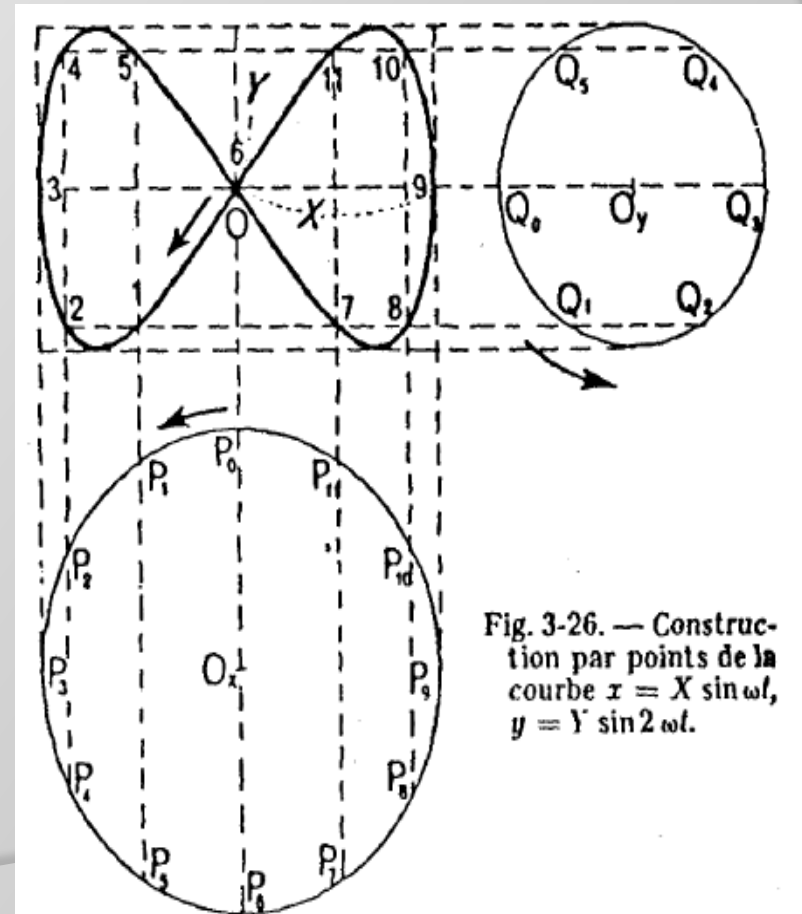
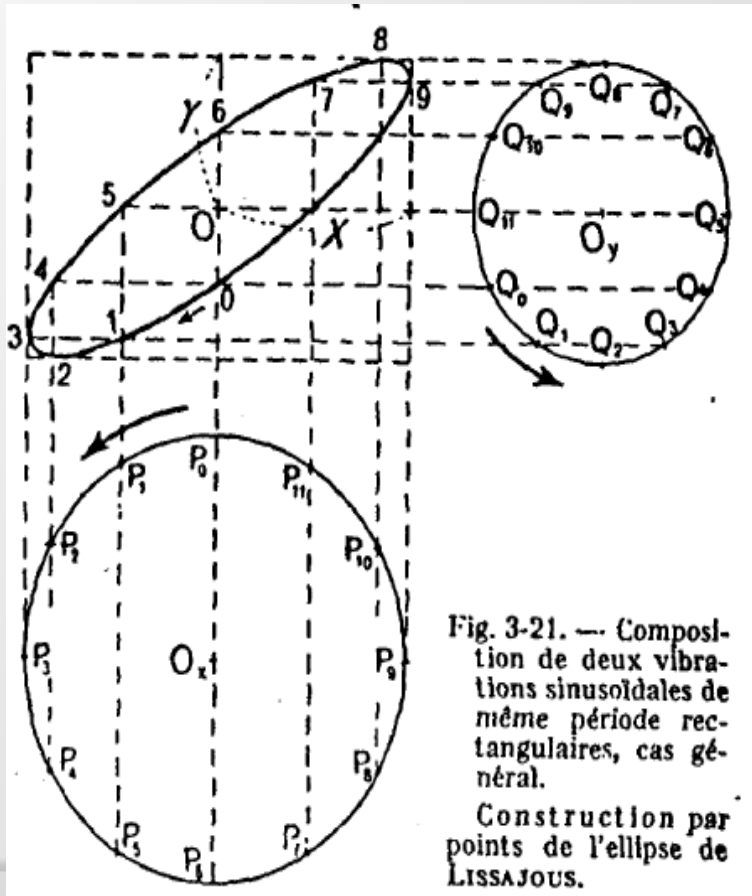
$\delta = 360^\circ$

b) $v_1 \neq v_2$

W ogólnym przypadku dla drgań prostopadłych o dowolnych częstościach i amplitudach

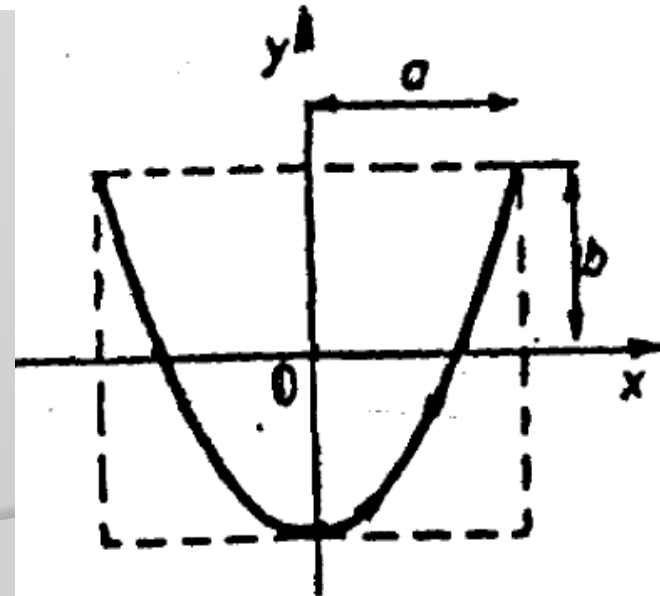
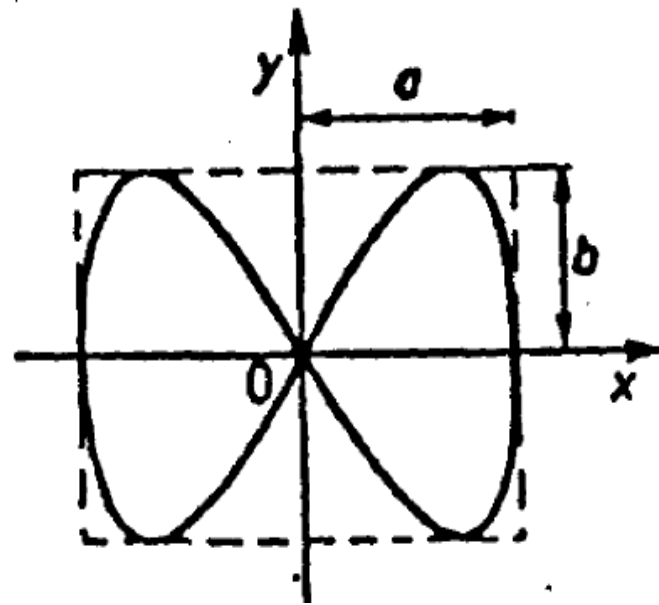
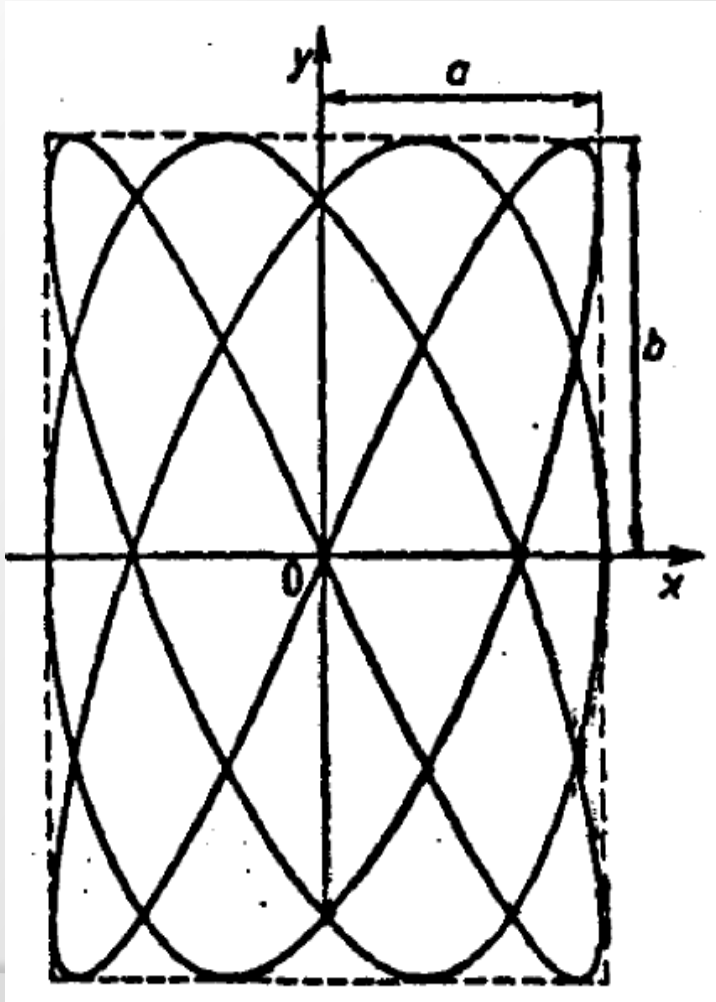
$$x = A_1 \cos(\omega_1 t), \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta)$$

Uzyskujemy krzywe Lissajous, o kształcie zależnym od ω_1/ω_2 ; δ ; A_1/A_2

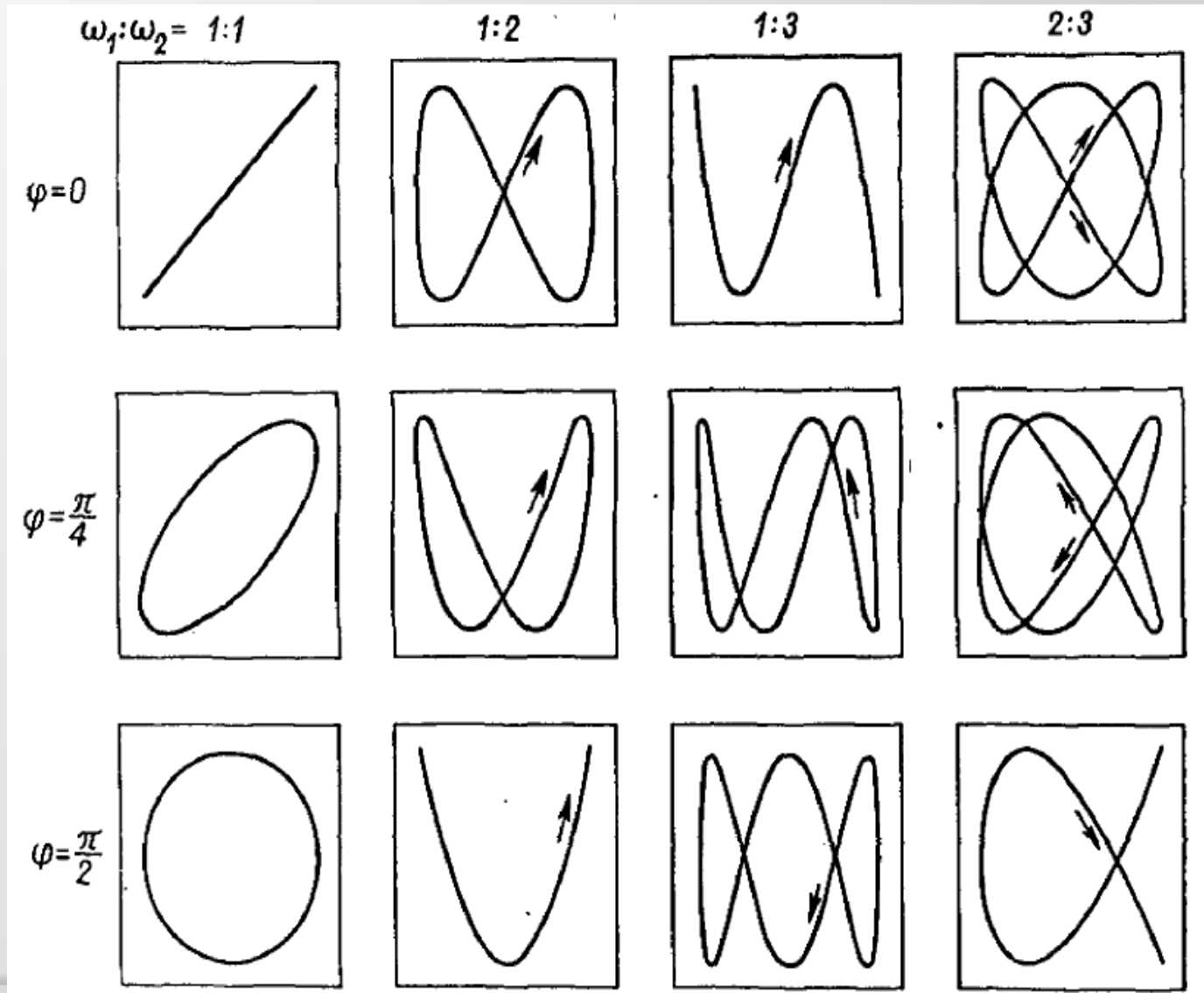


$$x = A_1 \cos \omega_1 t$$

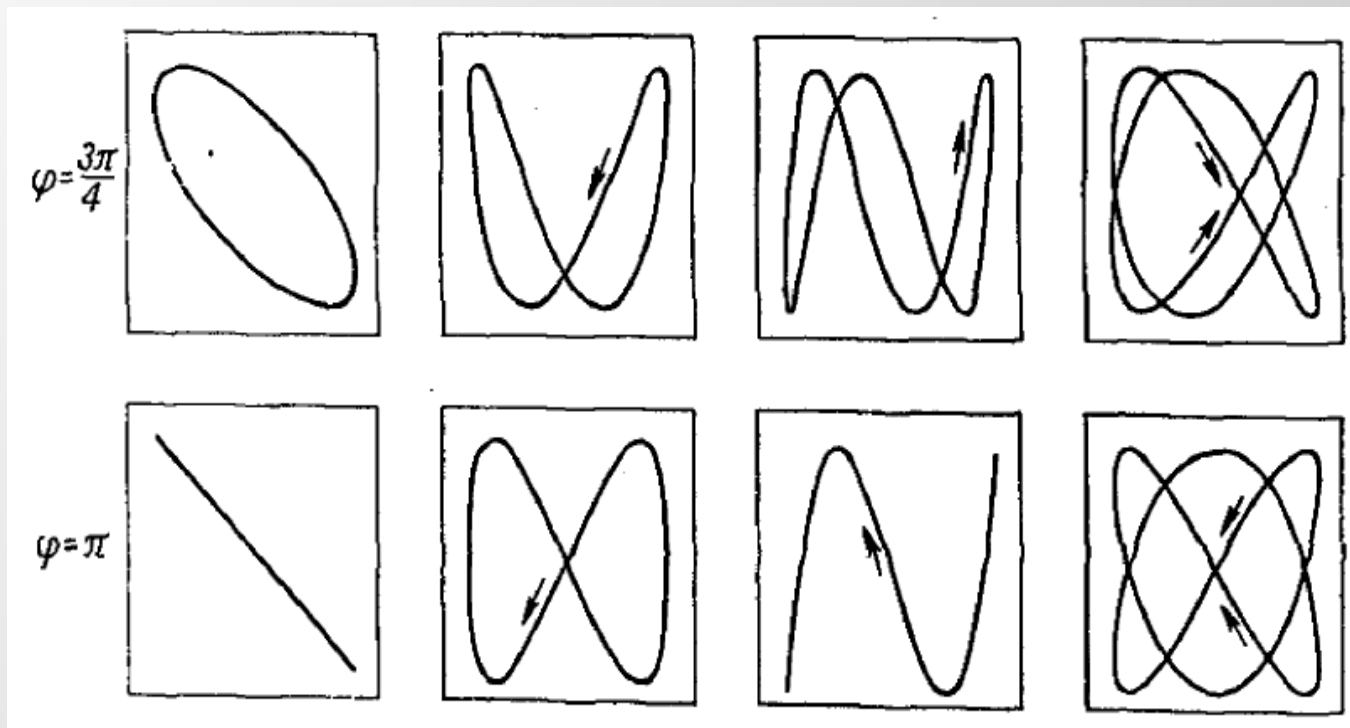
$$y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta)$$



Figury Lissajous



Drgania złożone - s.66



Wibroizolacja – pojęcia podstawowe. Wibroizolacja przy wymuszeniu harmonicznym skokowym i udarowym. Charakterystyki wibroizolacyjne podpór i zamocowań.

Każda maszyna i urządzenie jest źródłem drgań wynikających z sił dynamicznych działających impulsowo (uderzenia) lub okresowo zmiennie (będących skutkiem niewyważenia wirujących elementów).

Drgania te przenoszą się na budynki i ich otoczenie. Zbyt duże drgania mogą stanowić zagrożenie dla elementów konstrukcyjnych budowli, mogą wpływać niekorzystnie na pracę innych urządzeń, mogą być również szkodliwe dla zdrowia ludzi. Zmniejszenie tego szkodliwego oddziaływania może się odbywać dwiema metodami:

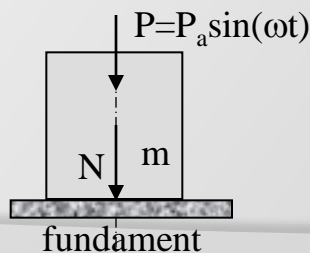
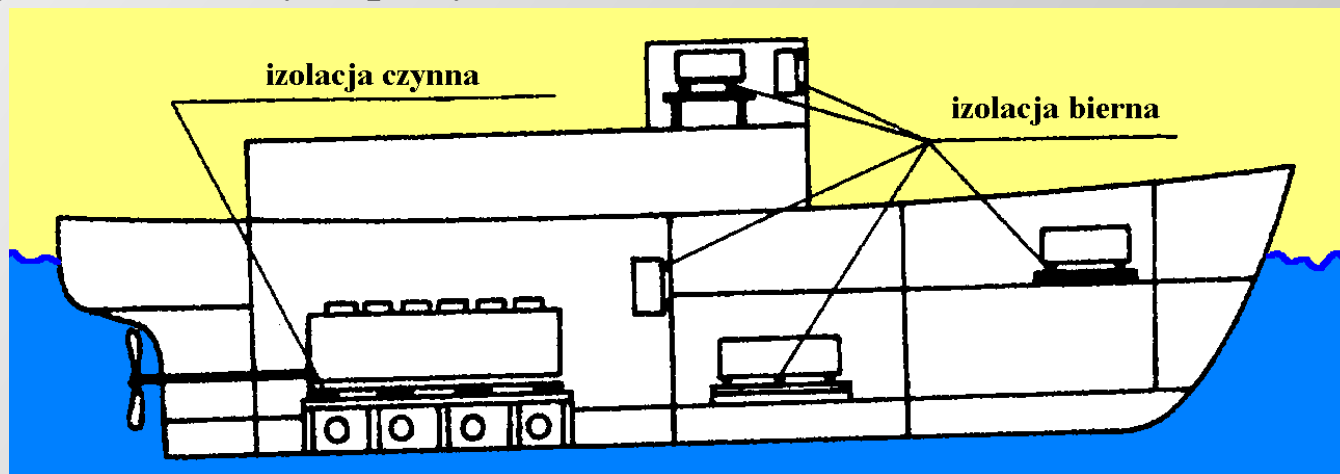
1. Ustawienie urządzenia na fundamencie, przy czym skuteczność tego rozwiązania rośnie wraz ze wzrostem masy fundamentu.
2. Ustawienie urządzenia na wibroizolatorach.

Ustawienie urządzenia na odpowiednio dużym fundamencie jest z reguły rozwiązaniem znacznie droższym, a ewentualna zmiana jego lokalizacji pociąga za sobą konieczność wykonania kolejnego fundamentu. Przy ustawieniu urządzenia na stropie, zastosowanie ciężkiego fundamentu bywa z reguły niemożliwe.

Zadaniem wibroizolatorów, które są elastycznym elementem pośrednim pomiędzy urządzeniem a podłożem, jest znaczne zmniejszenie sił dynamicznych przenoszonych na podłoże.

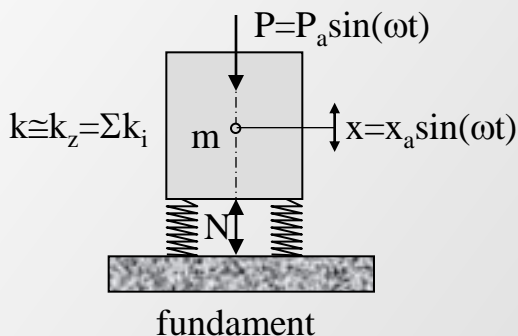
Wibroizolacja może być:

- **czynna** – izolująca źródła drgań od fundamentów, zabezpieczająca przed przechodzeniem drgań na otoczenie, ściślej biorąc – zmniejszająca oddziaływanie źródła drgań na fundamenty i otoczenie, gdyż nie udaje się ich w pełni odizolować.
- **bierna** – izolująca od drgającego otoczenia (fundamentów, kadłuba) osadzone: **na dnie okrętu, na międzypokładach, na grodziach i na ścianach nadbudówek** urządzenia i aparaty, dla których drgania są niepożądane, a nawet szkodliwe.



Połączenie silnika z fundamentem ma teoretycznie nieskończenie wielką sztywność ($k \rightarrow \infty$). Jeżeli silnik jest osadzony sztywno na fundamencie to cała siła wymuszająca przechodzi na fundament jako siła nacisku $N = P$. Następnie rozchodzi się po całym okręcie (konstrukcji) dzięki sprężystości materiału.

W celu zmniejszenia oddziaływania na fundament siły wymuszającej stosuje się osadzenie silnika za pośrednictwem podkładek sprężystych. Są to zazwyczaj sprężyny albo specjalnie skonstruowane amortyzatory sprężynowe lub gumowe, lub też proste podkładki gumowe, klocki drewniane, korkowe o rozmiarach i sztywności dobranej odpowiednio do masy amortyzowanego urządzenia oraz częstości drgań.

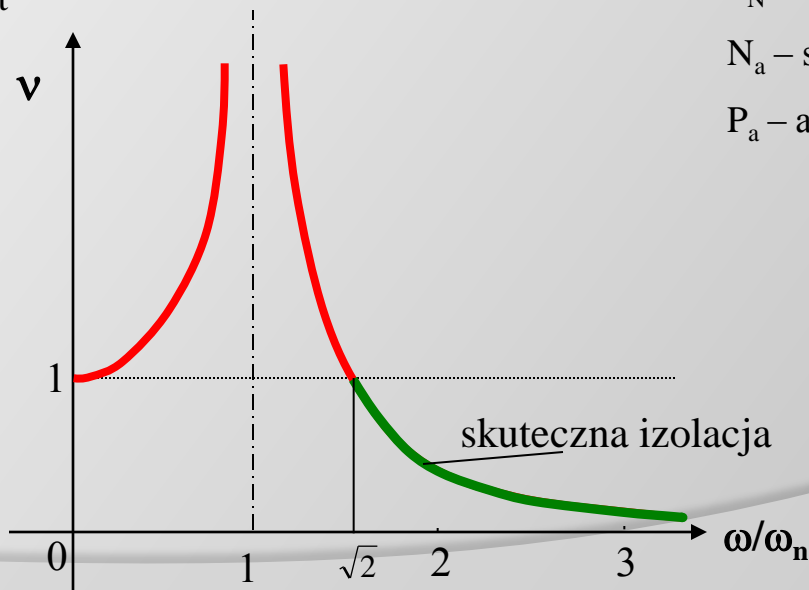


$$v = \frac{|x_a|}{x_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{N_a}{P_a} = v_N$$

v_N – dynamiczny współczynnik przenoszenia siły,

N_a – siła przenoszona na fundament,

P_a – amplituda siły wymuszającej.



$$v_N = \frac{N_a}{P_a} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} < 1$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1 > 1 \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 > 2$$

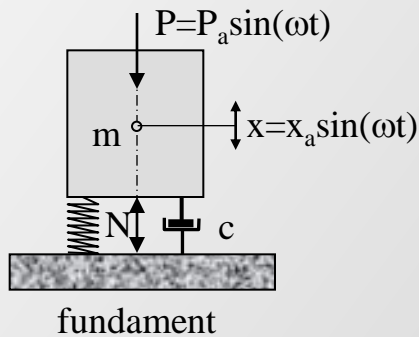
Aby izolacja przeciwdrganiowa była skuteczna $v_N < 1$ musi być: $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) > \sqrt{2} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} < \frac{\omega}{\sqrt{2}}$

Sztywność podkładek sprężystych (amortyzatorów) musi spełniać warunek:

$$k < \frac{1}{2} m \omega^2$$

Omówiony przypadek nie uwzględnia tłumienia.

Wibroizolacja przy wymuszeniu harmonicznym



$$m \ddot{x} + 2h \cdot \dot{x} + \omega_n^2 \cdot x = q_a \cos(\omega t)$$

$$2h = \frac{c}{m}; \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}; \quad q_a = \frac{P_a}{m}$$

Siła przenoszona na fundament: $F(t) = k \cdot x + c \cdot \dot{x}$ $x = x_a \sin(\omega t - \beta)$

$$F(t) = k \cdot x_a \sin(\omega t - \beta) + c \cdot x_a \omega \cos(\omega t - \beta)$$

$$F(t) = x_a \sqrt{k^2 + c^2 \omega^2} \cdot \sin(\omega t + \psi - \beta); \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{c \omega}{k}$$

$$x_a = \frac{q_a}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2h \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

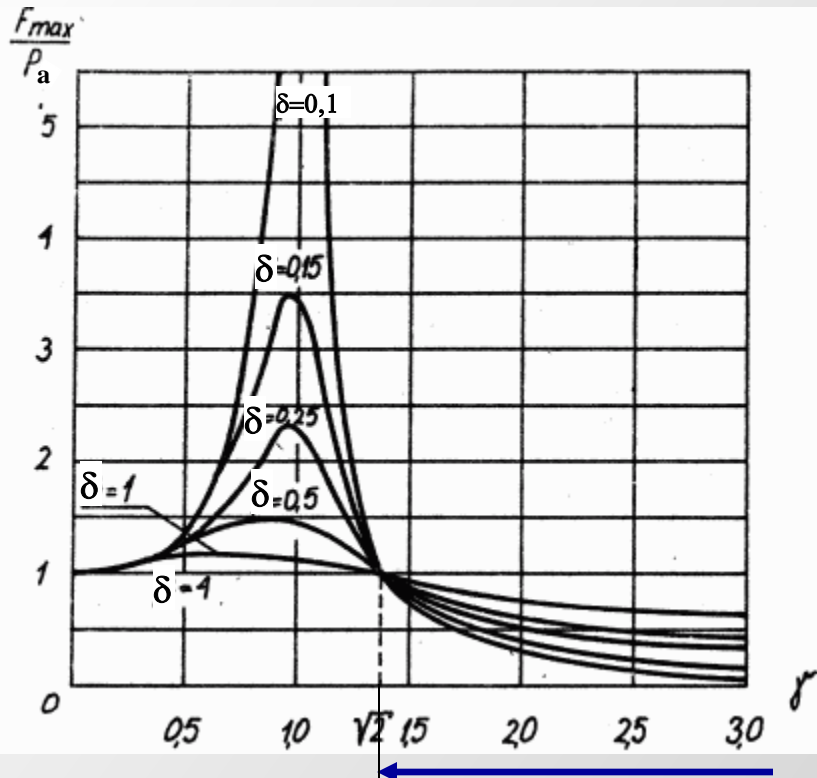
$$F(t) = q_a \frac{\sqrt{k^2 + c^2 \omega^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}} \cdot \sin(\omega t + \psi - \beta);$$

Maksymalna wartość siły F(t) jest równa:

$$F_{\max} = q_a \frac{\sqrt{k^2 + c^2 \omega^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}} = \frac{P_a \sqrt{\omega_n^4 + 4h^2 \omega^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}};$$

$$F_{\max} = \frac{P_a \sqrt{1 + \delta^2 \gamma^2}}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + \delta^2 \gamma^2}}; \quad \delta = \frac{2h}{\omega_n}; \quad \gamma = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\frac{F_{\max}}{P_a} < 1; \quad \frac{\sqrt{1 + \delta^2 \gamma^2}}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + \delta^2 \gamma^2}} < 1; \quad \Rightarrow \quad \gamma > \sqrt{2}$$

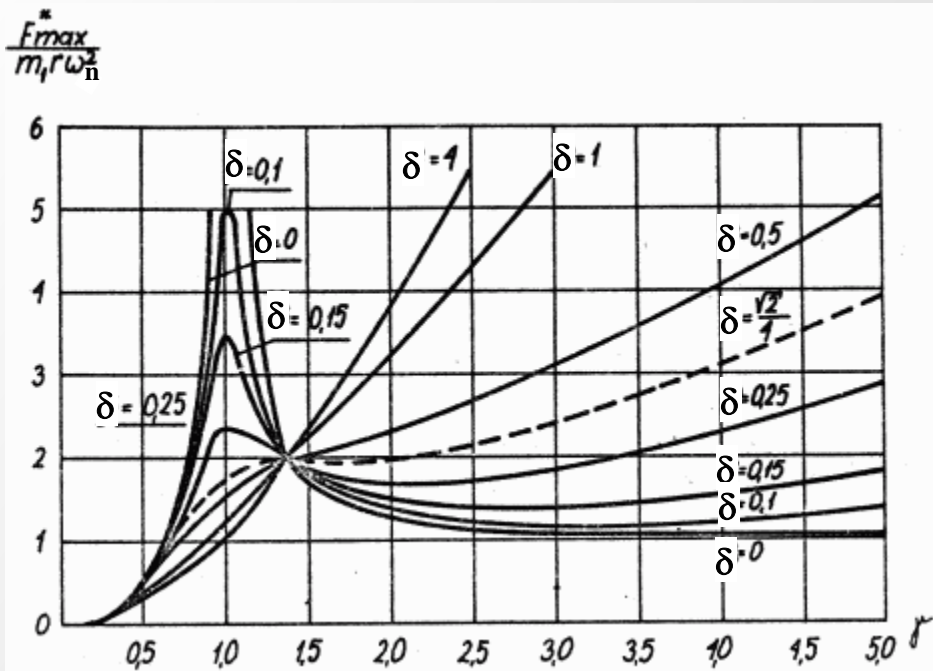


Aby siła działająca na fundament była możliwie mała należy przy $\gamma = \omega/\omega_n < 2^{0,5}$ stosować małe tłumienie, zaś przy $\gamma = \omega/\omega_n > 2^{0,5}$ duże tłumienie.

zakres skutecznej izolacji

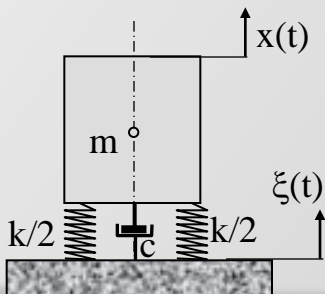
W przypadku gdy siłą wymuszającą jest siła odśrodkowa niewyważonej wirującej masy m_w o mimośrodzie μ w postaci: $P_a = m_w \mu \omega_n^2$

$$F_{max}^* = m_w \mu \omega^2 \frac{\gamma^2 \sqrt{1 + \delta^2 \gamma^2}}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + \delta^2 \gamma^2}};$$



Siła działająca na fundament jest mniejsza od siły wymuszającej tylko dla małych γ . Ze wzrostem γ jest zawsze większa od siły wymuszającej. Wzrost parametru δ powoduje natychmiastowy wzrost siły przenoszonej na fundament.

W przypadku gdy układ mechaniczny jest wibroizolowany od drgań fundamentu współczynnikiem wibroizolacji nazywamy stosunek przyspieszenia układu do przyspieszenia fundamentu.



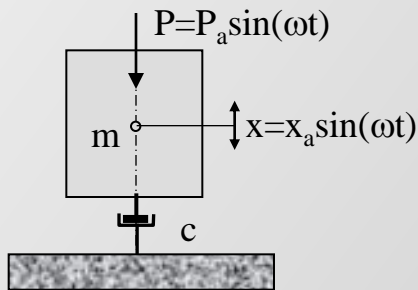
$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot (\dot{x} - \dot{\xi}) + k \cdot (x - \xi) = 0; \quad \xi = \xi_a \cos(\omega t);$$

$$x = x_a \cos(\omega t - \beta);$$

$$x_a = \xi_a \frac{\sqrt{(k^2 + c^2 \omega^2)}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}};$$

$$v_N = \frac{\dot{x}_{\max}}{\xi_{\max}} = \frac{x_a}{\xi_a} = \frac{\sqrt{(k^2 + c^2 \omega^2)}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}};$$

Siłę przenoszoną na fundament dla układu pokazanego na rysunku wyznaczymy podobnie jak dla układów wcześniejszych.

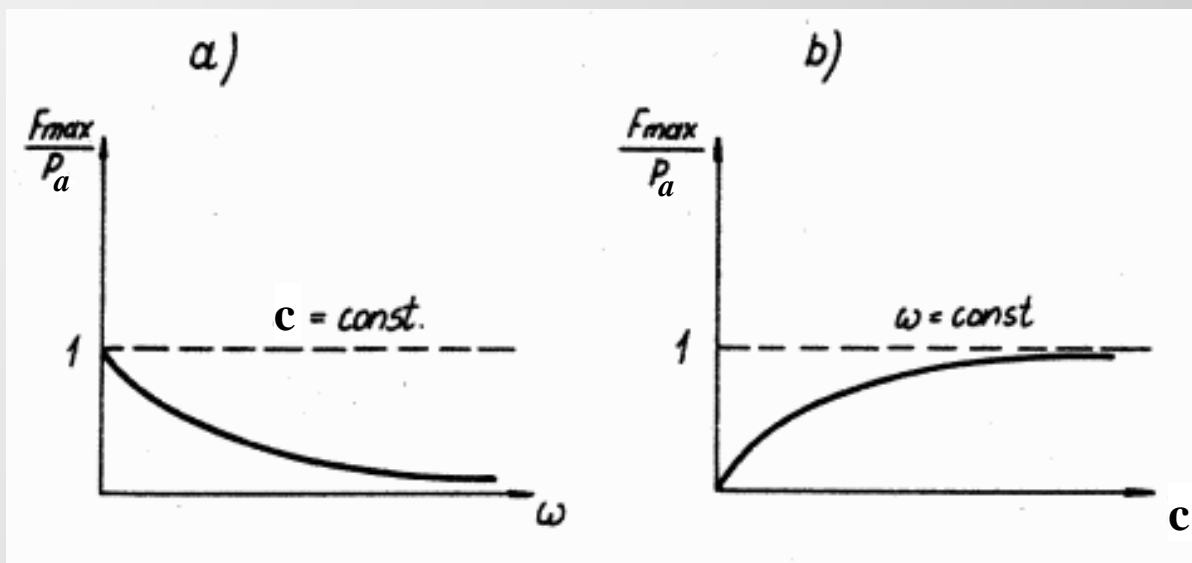


$$m\ddot{x} + c \cdot \dot{x} = P_a \sin(\omega t)$$

$$x = -\frac{P_a}{\omega \sqrt{(m^2 \omega^2 + c^2)}} \sin(\omega t + \beta); \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{c}{m\omega}$$

$$F(t) = c\dot{x} = -\frac{c \cdot P_a}{\sqrt{(m^2 \omega^2 + c^2)}} \cos(\omega t + \beta);$$

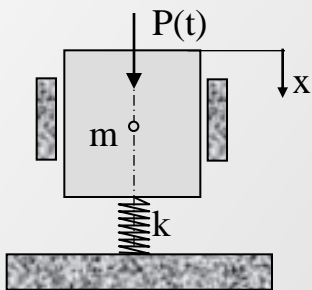
$$\frac{F_{\max}}{P_a} = \frac{c}{\sqrt{(m^2 \omega^2 + c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m\omega}{c}\right)^2}};$$



Siła działająca na fundament przy stałym tłumieniu **maleje** ze **wzrostem** częstości drgań, natomiast przy stałej częstości drgań siła ta **rośnie** wraz ze **wzrostem** współczynnika tłumienia.

Wibroizolacja przy wymuszeniu skokowym

Wyznamy teraz siłę przenoszoną na fundament dla układu mechanicznego, pokazanego na rysunku, jeżeli siła działająca na ten układ zmienia się skokowo.



$$P(t) = \begin{cases} P_a & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

$$m\ddot{x} + k \cdot x = P_a$$

dla $t \geq 0$

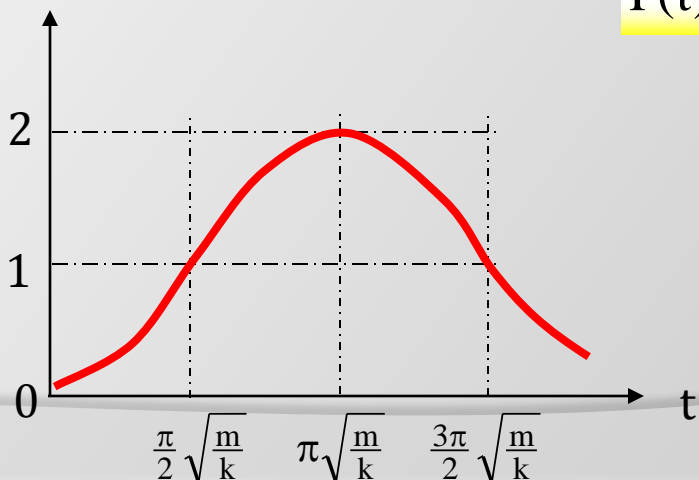
$$x = \frac{P_a}{k} (1 - \cos \omega_n t); \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Rozwiązanie w ruchu ustalonym i zerowych warunkach brzegowych

$$F(t) = k \cdot x = P_a (1 - \cos \omega_n t)$$

Siła przenoszona na fundament

$F(t)/P_a$

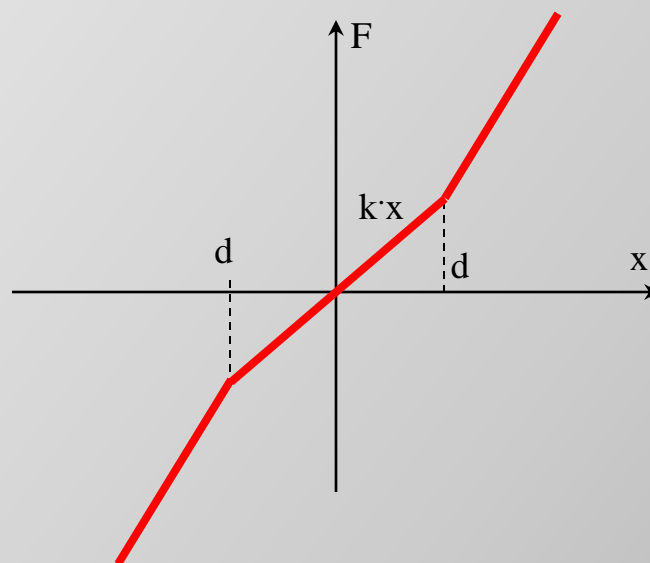
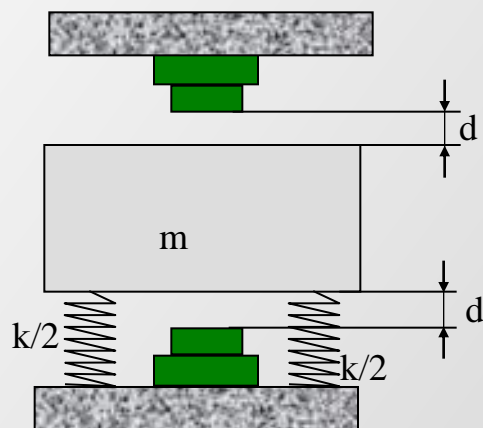


Siła przenoszona przez fundament może być **dwukrotnie** większa od **amplitudy siły wymuszającej**. Przypadek taki zachodzi, gdy w układzie jest bardzo małe tłumienie, natomiast stała siła przyłożona jest nagle w pewnej chwili.

Wibroizolacja układów z ogranicznikami

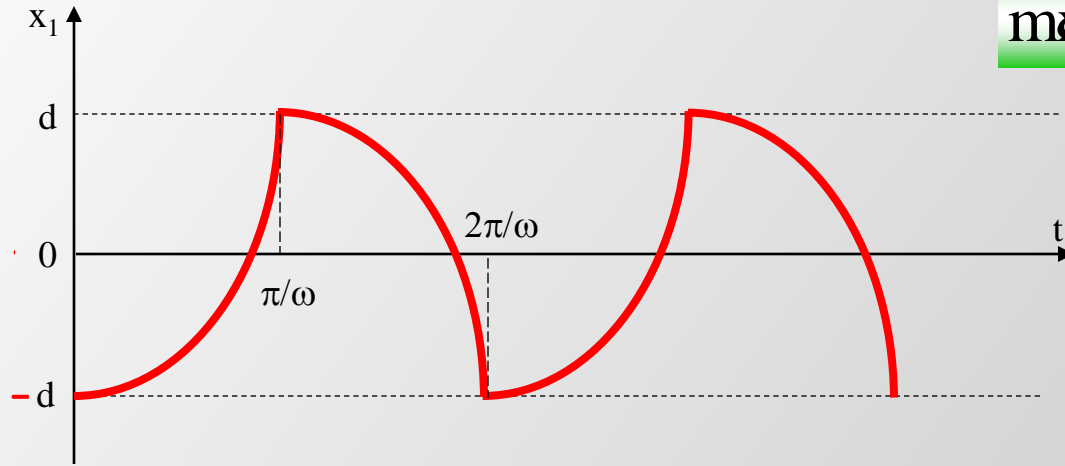
Dla zapewnienia niskiej częstości drgań własnych wibroizolowanego układu należy wykonać wibroizolację dostatecznie podatną (miękką) – pojawia się wówczas nadmierna ruchliwość układu przy działaniu wolno zmieniających się obciążeń.

Celem ograniczenia możliwych nadmiernych przemieszczeń stosuje się tzw. ograniczniki (zderzaki).



W takim nieliniowym układzie możliwe są drgania z udarami o ograniczniki. Takie drgania są bardzo niekorzystne. Celem ich eliminacji układ wibroizolacji powinien być obliczony na podstawie teorii drgań nieliniowych.

Wyprowadzimy zależność dla wyznaczenia najmniejszego dopuszczalnego odstępu do ograniczników, w przypadku gdy ograniczniki są sztywne i usytuowane symetrycznie. Tłumienie w wibroizolatorach pominięto.



$$m\ddot{x}_1 + k \cdot x_1 = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \beta)$$

$$x_1 = x - \xi$$

$x_1 = x - \xi$ – przemieszczenie układu względem drgającego fundamentu.

$x, \xi = A \cos(\omega t + \beta)$ – bezwzględne przemieszczenie układu i fundamentu.

$$x_1 = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) + \frac{A}{1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \beta)$$

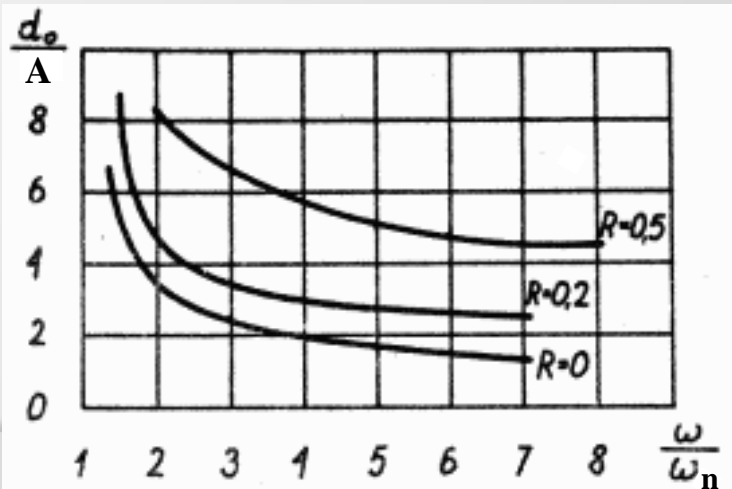
Przyjmując początek odmierzenia czasu w chwili odskoku obiektu od ogranicznika dolnego będziemy mieć: dla $t = 0$, $x_1 = -d$, dla $t = \pi/\omega$, $x_1 = d$. Ponadto należy uwzględnić warunek wiążący prędkość uderu (zderzenia) o ogranicznik z prędkością odskoku od niego:

$$\dot{x}_1|_{t=0} = -R \cdot \dot{x}_1|_{t=\frac{\pi}{\omega}}$$

R –współczynnik restytucji - stosunek szybkości zderzenia do szybkości odskoku

Aby nie było uderów o ograniczniki musi być spełniony warunek $d > d_0$, gdzie:

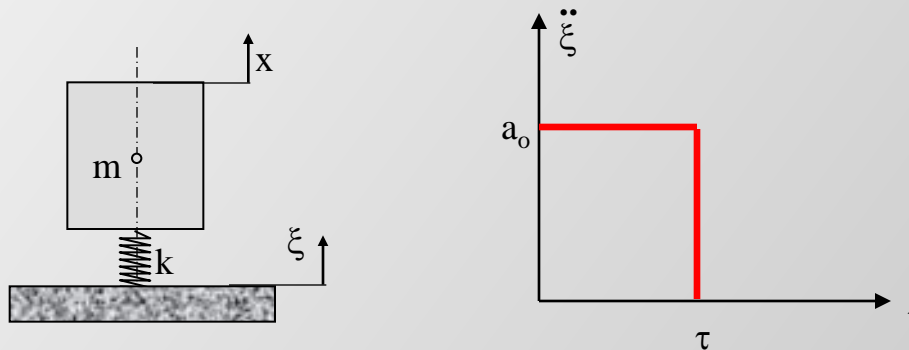
$$d_0 = \frac{A}{1 - \frac{\omega_n^2}{\omega^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2 \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\omega_n}{2\omega}\right)}$$



Wartość współczynnika R bardzo silnie wpływa na rozmiar luzu. Dlatego w konstrukcjach ograniczników stosuje się materiały z dużym tłumikiem energii.

Wibroizolacja przy wymuszeniu udarowym

Pod pojęciem wymuszenia udarowego będziemy rozumieć chwilowe oddziaływanie na obiekt. Rozważamy układ wibroizolacji w której podstawa doznaje przyspieszenia.



W rezultacie przyspieszenia podstawa rozpoczyna się poruszać z prędkością $v = a_0 \tau$. Obiekt o masie m związany jest z podstawą wibroizolatorami, które powinny obniżyć maksymalne przyspieszenie obiektu do wartości $a_1 < a_0$. Stosunek $\varepsilon = a_1/a_0$ będziemy nazywać współczynnikiem wibroizolacji.

$$m\ddot{x} + k \cdot x = k \cdot \xi$$

ξ - przemieszczenie podstawy

przy: $0 < t < \tau, \quad \xi = \frac{1}{2} a_0 t^2$

przy: $t > \tau, \quad \xi = \frac{1}{2} a_0 [t^2 - (t - \tau)^2]$

$$\text{przy: } 0 < t < \tau, \quad x = \frac{1}{2} a_o \left[t^2 - 2 \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^2} \right]$$

$$\text{przy: } t \geq \tau, \quad x = \frac{1}{2} a_o \left\{ t^2 - (t - \tau)^2 - 2 \left[\frac{\cos \omega_n (t - \tau) - \cos \omega_n t}{\omega_n^2} \right] \right\}$$

$$\text{przy: } 0 \leq t \leq \tau, \quad \ddot{x} = a_o [1 - \cos \omega_n t]$$

$$\text{przy: } t \geq \tau, \quad \ddot{x} = a_o [\cos \omega_n (t - \tau) - \cos \omega_n t] = 2a_o \sin \frac{\omega_n \tau}{2} \sin \omega_n (t - \frac{\tau}{2})$$

Ponieważ maksymalna wartość \ddot{x} powinna być mniejsza od a_o widać, że $\omega_n \tau$ winno być w każdej chwili mniejsze od $\pi/2$ i maksimum x ma miejsce przy $t > \theta$:

$$a_1 = \left| \ddot{x} \right|_{\max} = 2a_o \sin \frac{\omega_n \tau}{2}$$

Współczynnik wibroizolacji wyznaczymy z zależności:

$$\varepsilon = \frac{a_1}{a_o} = 2 \sin \frac{\omega_n \tau}{2}$$

Maksymalne przemieszczenie obiektu względem podstawy:

$$(\xi - x)_{\max} = \frac{a_o}{\omega_n^2} [\cos \omega_n (t - \tau) - \cos \omega_n t]_{\max} = 2 \frac{a_o}{\omega_n^2} \sin \frac{\omega_n \tau}{2};$$

$$(\xi - x)_{\max} = 2 \frac{\varepsilon \cdot a_o \tau^2}{\left[2 \arcsin \frac{\varepsilon}{2}\right]^2}$$

dla $\sin(\varepsilon/2) \approx \varepsilon/2$

$$(\xi - x)_{\max} = \frac{a_o \tau^2}{\varepsilon}$$

Im mniejsze ε (lepsz a wibroizolacja) tym większy skok wibroizolatora. W każdym przypadku także przy $\varepsilon=1$ ten skok nie może być mniejszy niż $a_o \tau^2$.

Duży skok jest podstawowym brakiem liniowej wibroizolacji. Można odpowiednio zmniejszyć skok wibroizolowanego obiektu, jeżeli dany na początku obiektowi stałą co do wartości siłę $P=ma_1$. Siła ta może być realizowana kosztem sprężystego elementu z nieliniową charakterystyką z suchym tarcie m lub tłumikiem hydraulicznym z kanalikami otwieranymi przy zadanym docisku.

Przemieszczenie względne obiektu przy rozpatrywanej optymalizacji wibroizolacji przy $t > 0$ wyznacza się z następującej zależności:

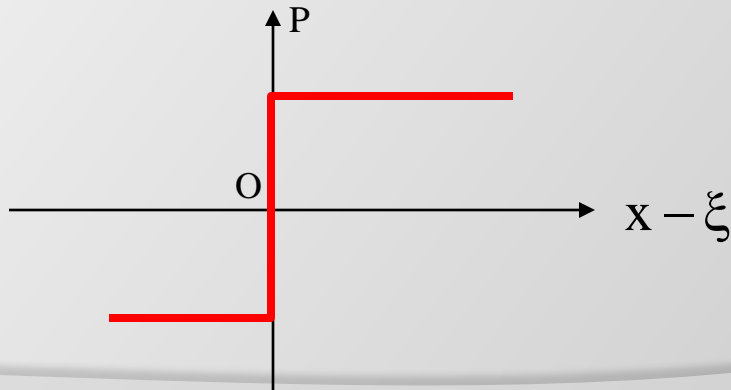
$$(\xi - x) = \frac{1}{2} a_o \left[(1 - \varepsilon)^2 - (t - \tau)^2 \right]$$

w chwili $t = \pi/\varepsilon$ wartość ta osiąga maksimum

$$(\xi - x)_{\max} = \frac{1}{2} a_o \tau^2 \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

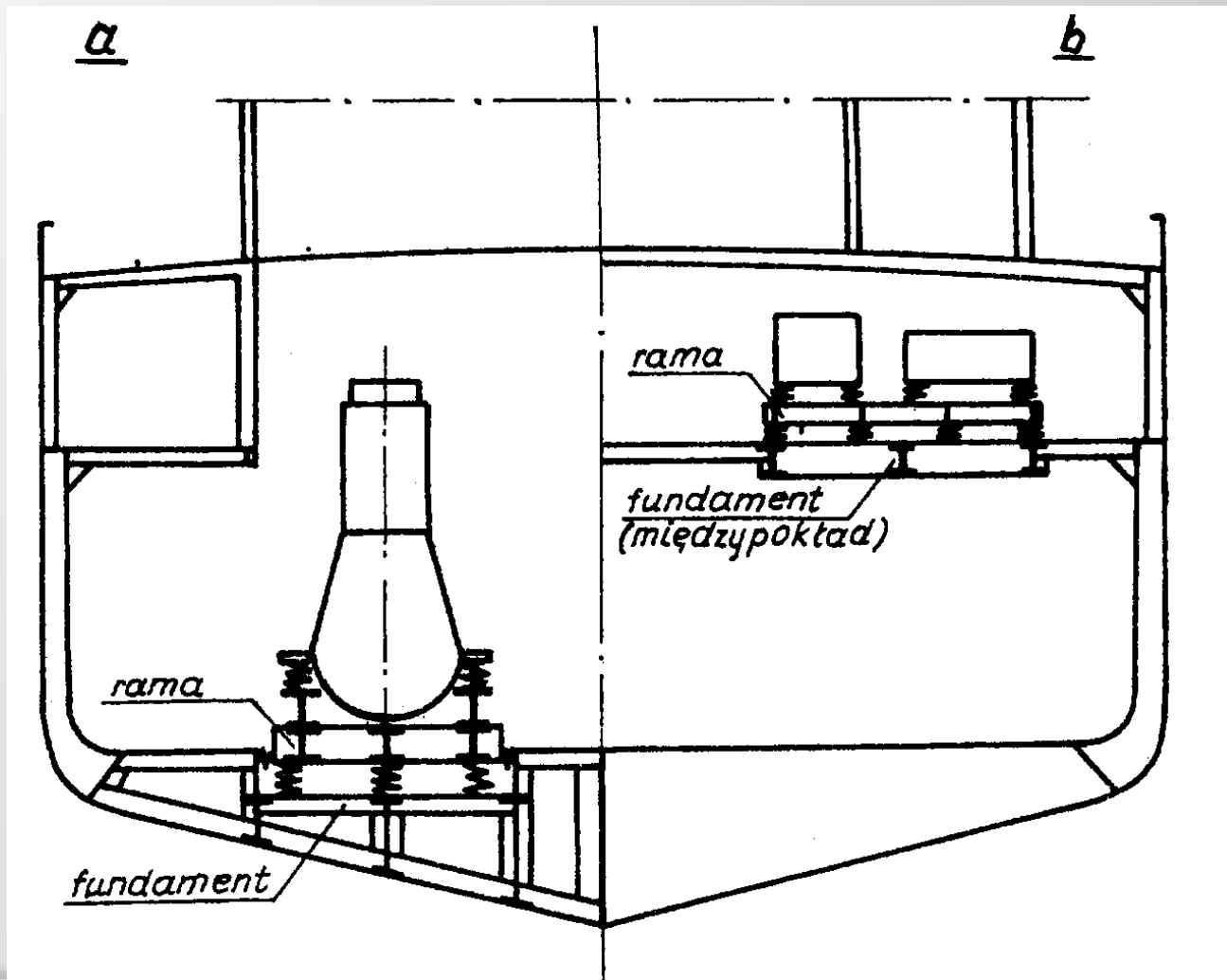
Porównując tę zależność z $(\xi - x)_{\max} = \frac{a_o \tau^2}{\varepsilon}$ dla liniowej wibroizolacji układu ustalamy, że stosunek skoków wynosi:

$$\frac{(1 - \gamma)}{2}$$

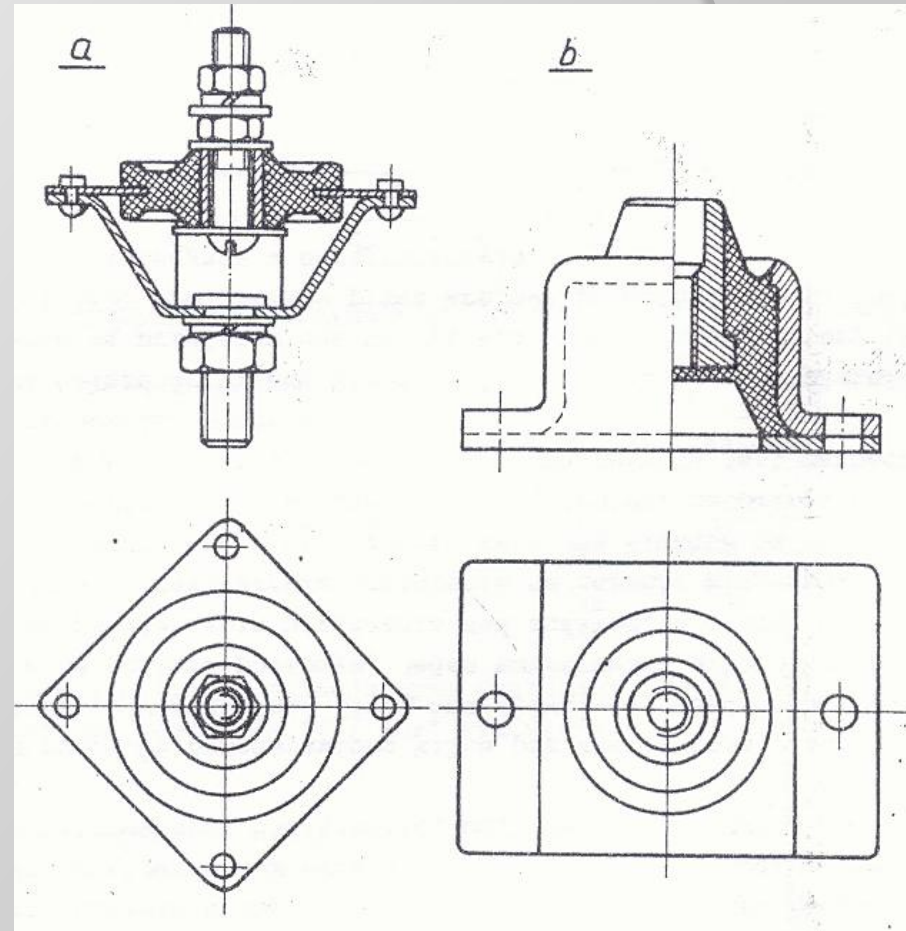
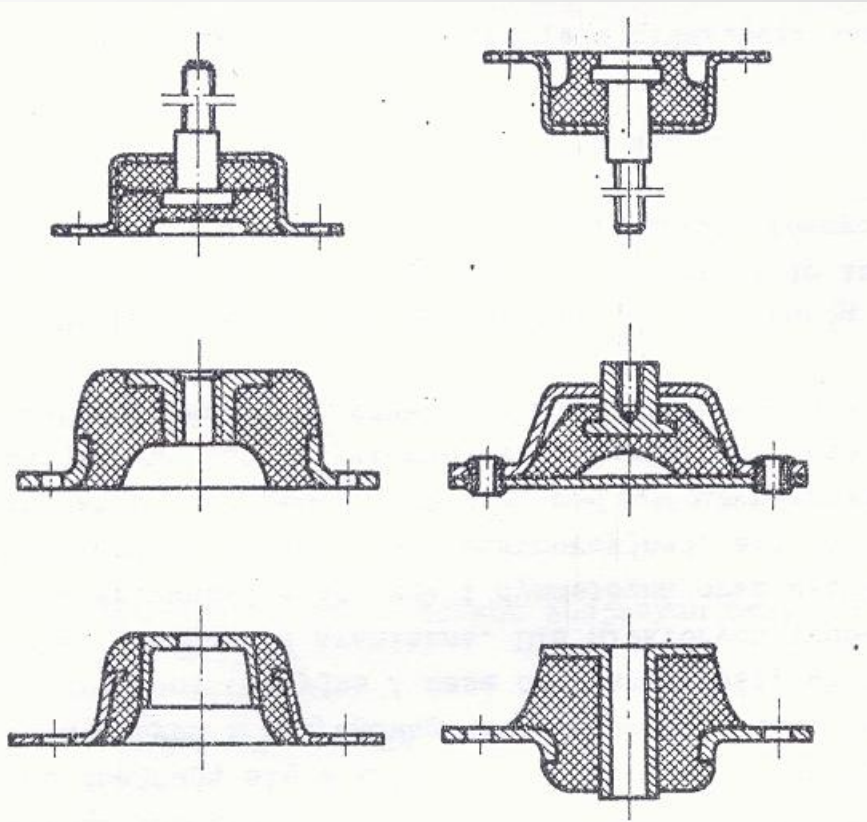


Tak więc skok skraca się ostatecznie dwukrotnie i jest to tym wygodniejsze, czym bliższa jedności konieczna wartość współczynnika ε .

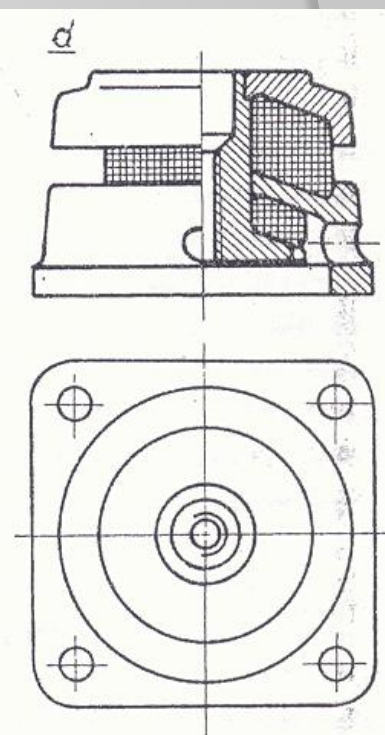
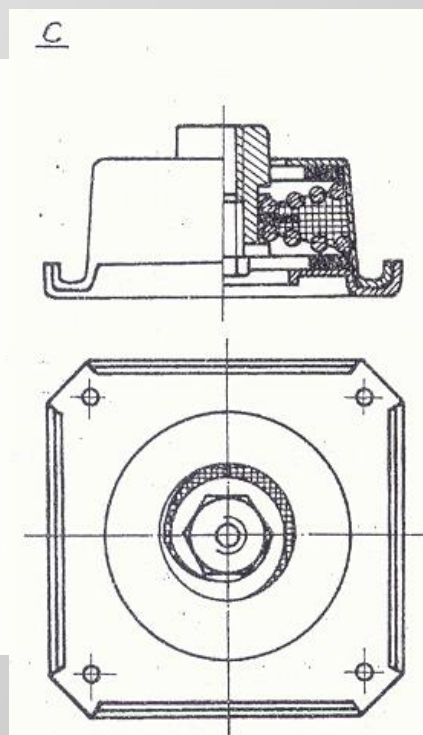
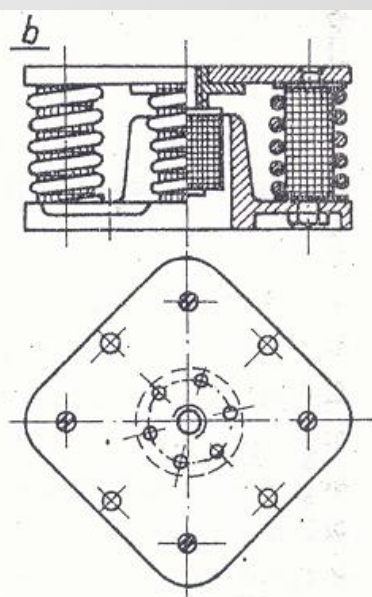
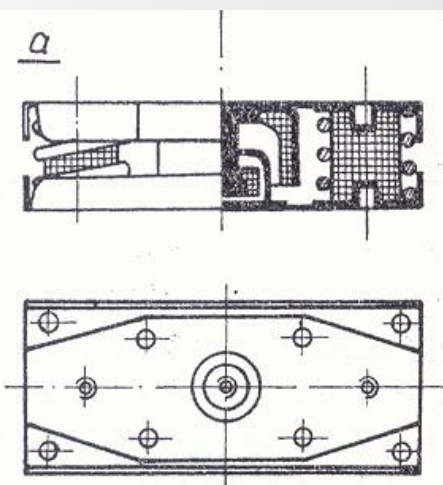
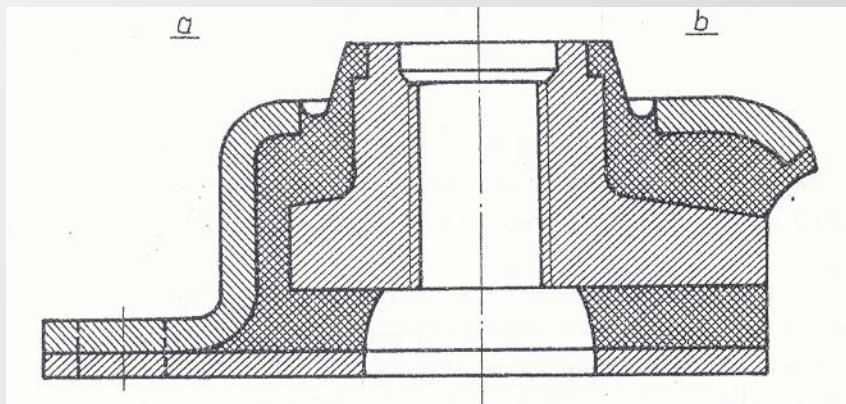
Izolacja dwustopniowa



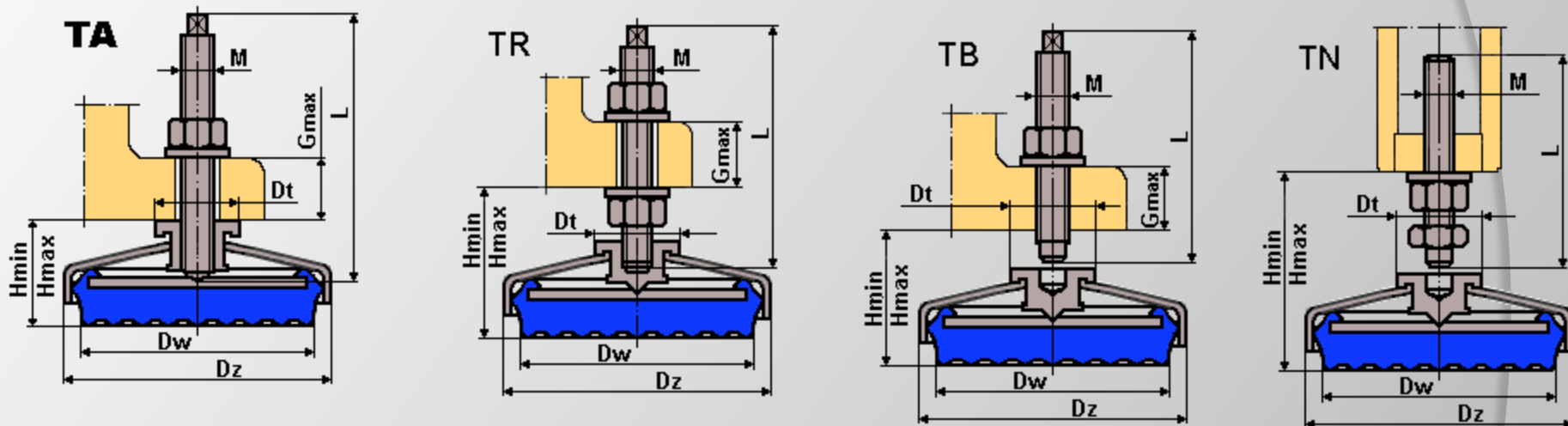
Wibroizolatory



Wibroizolatory



Wibroizolatory talerzowe mają postać stopek, które podstawiane są pod maszynę w celu ustawienia jej na posadzce. Tarcze wibroizolatorów wykonywane są z gumy oleoodpornej. Elementy metalowe i gumowe mogą być wykonane w wersji kwasoodpornej lub do kontaktu z żywnością.

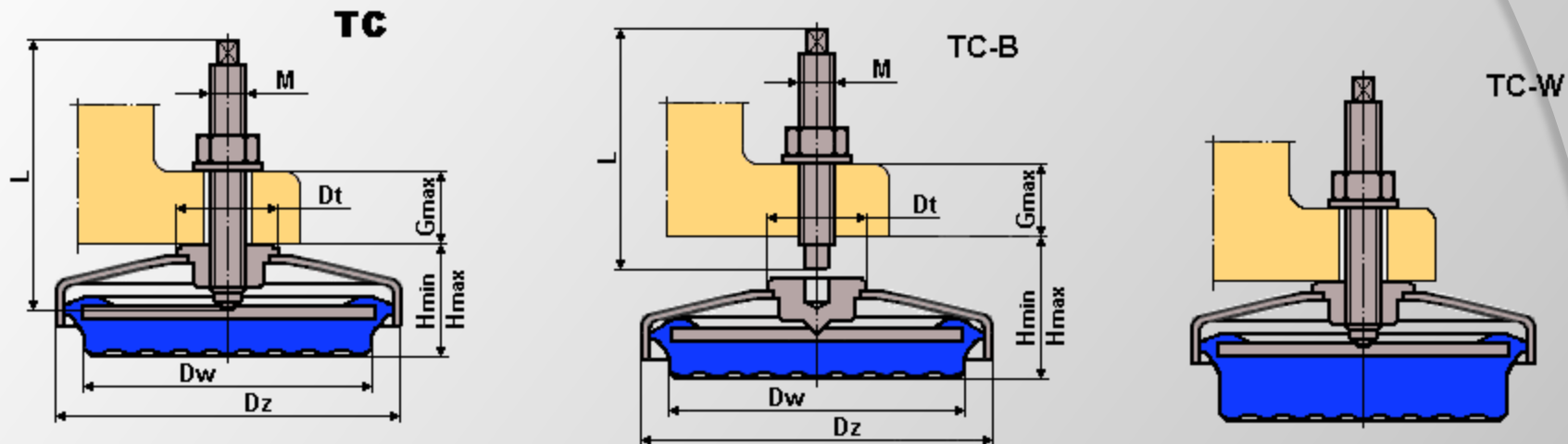


ZASTOSOWANIE

- obrabiarki do metali: tokarki, automaty tokarskie, szlifierki, frezarki, dłutownice, prasy, nożyce, piły, zaginarki itp
- obrabiarki do drewna: strugarki, grubościówki, piły itp.
- maszyny i urządzenia do przetwórstwa tworzyw sztucznych,
- linie produkcyjne, montażowe, transportowe, rozlewnicze itp
- inne, maszyny i urządzenia do przetwórstwa rolno-spożywczego
- inne maszyny i urządzenia stosowane w różnych branżach przemysłu

W odmianie wysokiej, wibroizolatory talerzowe mogą być stosowane pod: wentylatory, dmuchawy, sprężarki, agregaty prądotwórcze, agregaty chłodnicze, pompy itp

Wibroizolatory talerzowe

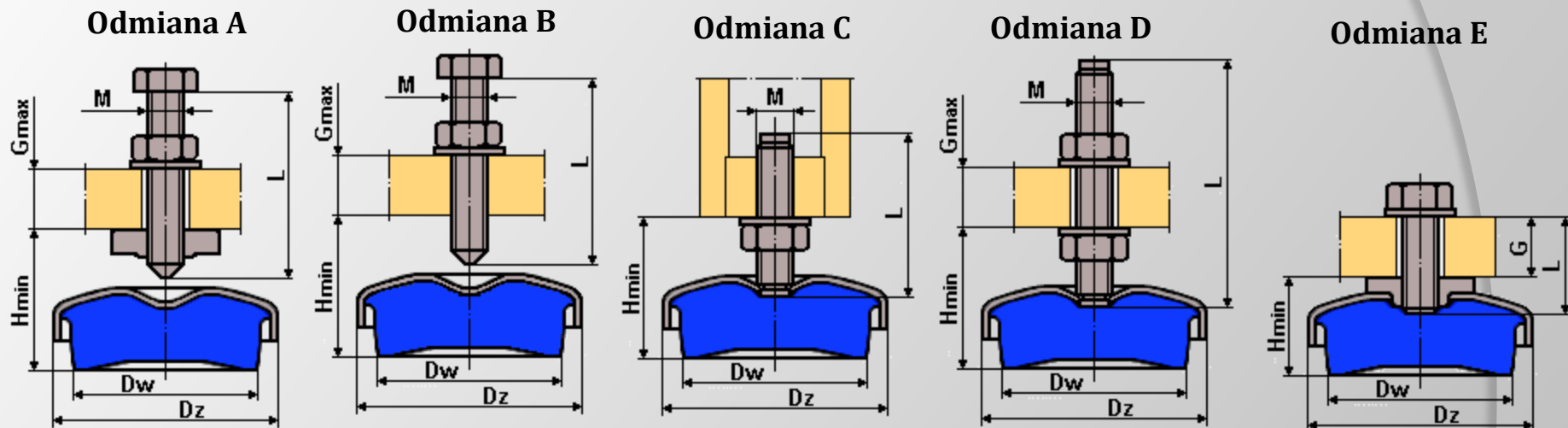


ZASTOSOWANIA

- obrabiarki do metali: tokarki, automaty tokarskie, szlifierki, frezarki, dłutownice, prasy, nożyce, piły, zaginarki itp
- obrabiarki do drewna: strugarki, grubościówki, piły itp.
- maszyny i urządzenia do przetwórstwa tworzyw sztucznych
- linie produkcyjne, montażowe, transportowe, rozlewnicze itp.
- linie, maszyny i urządzenia do przetwórstwa rolno-spożywczego
- inne maszyny i urządzenia stosowane w różnych branżach przemysłu.

W odmianie wysokiej, wibroizolatory talerzowe mogą być stosowane pod: wentylatory, dmuchawy, sprężarki, agregaty prądotwórcze, agregaty chłodnicze, pompy, prasy, wtryskarki itp.

Wibroizolatory talerzowe



ZASTOSOWANIE

pompy, sprężarki, szafy sterownicze, kabiny dźwiękochłonne, chłodziarki, klimatyzatory, wentylatory, agregaty prądotwórcze, agregaty chłodnicze, stoły, linie produkcyjne itp..

Wibroizolator kołpakowy KA ma przykręcaną do podłoża podstawę oraz obudowany kołpakiem gumowy wkład wibroizolacyjny z wystającą do góry śrubą, na której osadzana jest podstawa maszyny.

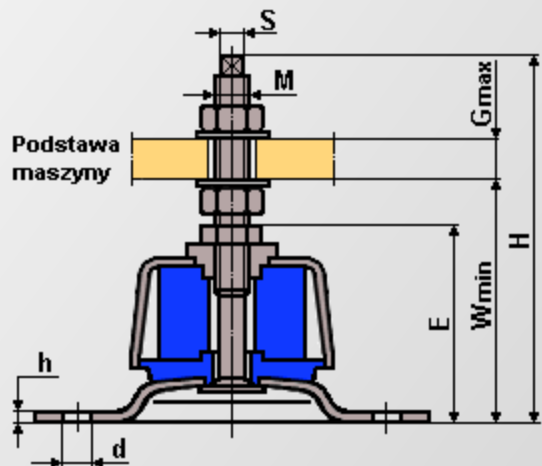
Ze względu na swoje walory jest najczęściej stosowanym wibroizolatorem do większości maszyn wirnikowych, w szczególności wentylatorów.

Ustawienie poziomu maszyny realizowane jest nakrętkami nakręcanymi na śrubę wibroizolatora.

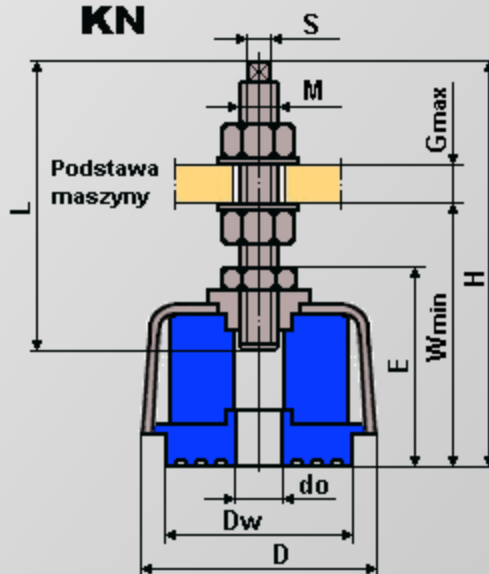
Wibroizolatory kołpakowe KA wykonywane są w dwóch podstawowych wielkościach KA-50 i KA-90.

Każda z tych wielkości wykonywana jest w kilku odmianach dostosowanych do różnych obciążeń.

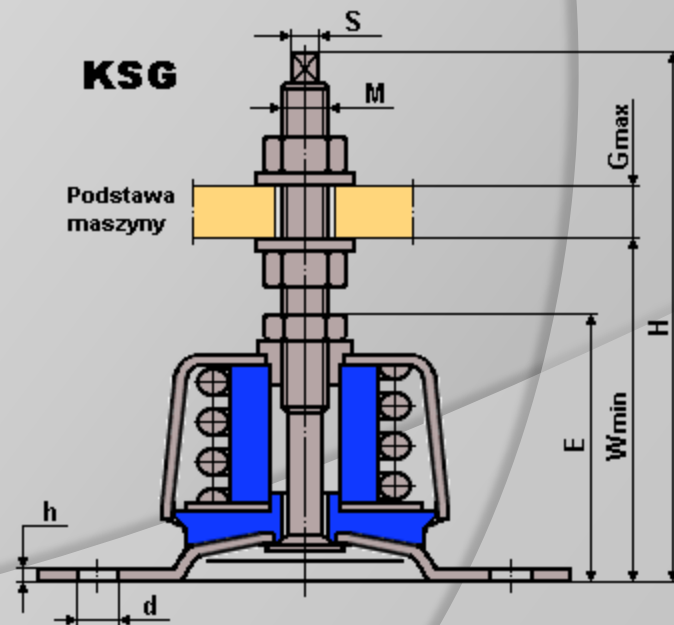
KA-50



KN



KSG



ZASTOSOWANIE

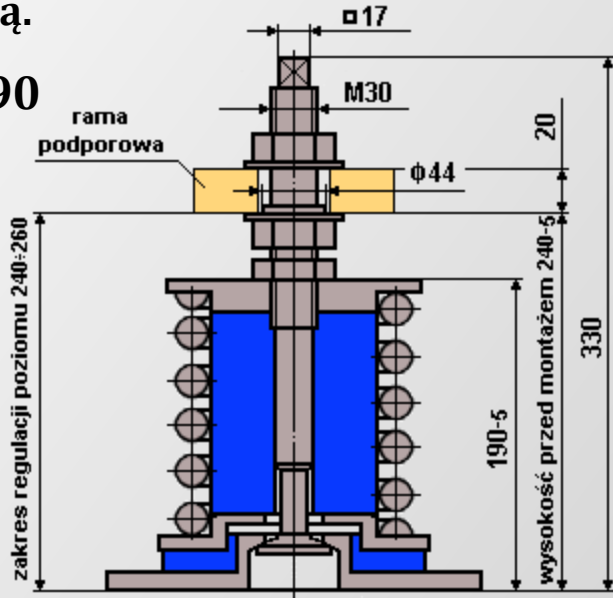
wentylatory, dmuchawy, klimatyzatory, pompy, sprężarki, agregaty chłodnicze
agregaty prądotwórcze, transformatory, szafy sterownicze
młynki, wirówki, rozdrabniacze, mieszalniki
maszyny i urządzenia przemysłu spożywczego i farmaceutycznego (opcja ze stali nierdzewnej)

WIBROIZOLATOR SPRĘŻYNOWO-GUMOWY

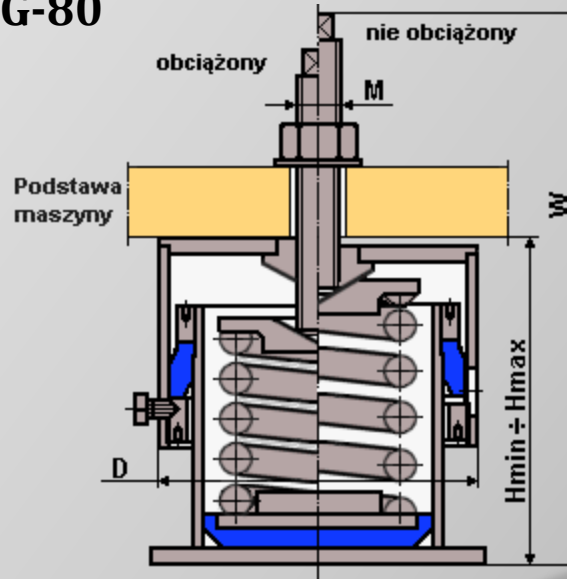
Wibroizolator SG-90 ma podstawę przykręcaną do podłoża. Na podstawie, pomiędzy metalowymi tarczami, zabudowana jest sprężyna oraz gumowe elementy tłumiące. Do mocowania urządzenia służy wystająca do góry śruba z nakrętkami. Podstawa maszyny lub rama podporowa montowana jest pomiędzy nakrętkami które służą również do unoszenia i regulacji poziomu maszyny.

Dla ułatwienia montażu, wsporniki (uszy) ramy podporowej, powinny mieć wyjęcia umożliwiające wsuwanie wibroizolatora z boku tj. bez konieczności unoszenia maszyny wraz z ramą.

SG-90



SG-80



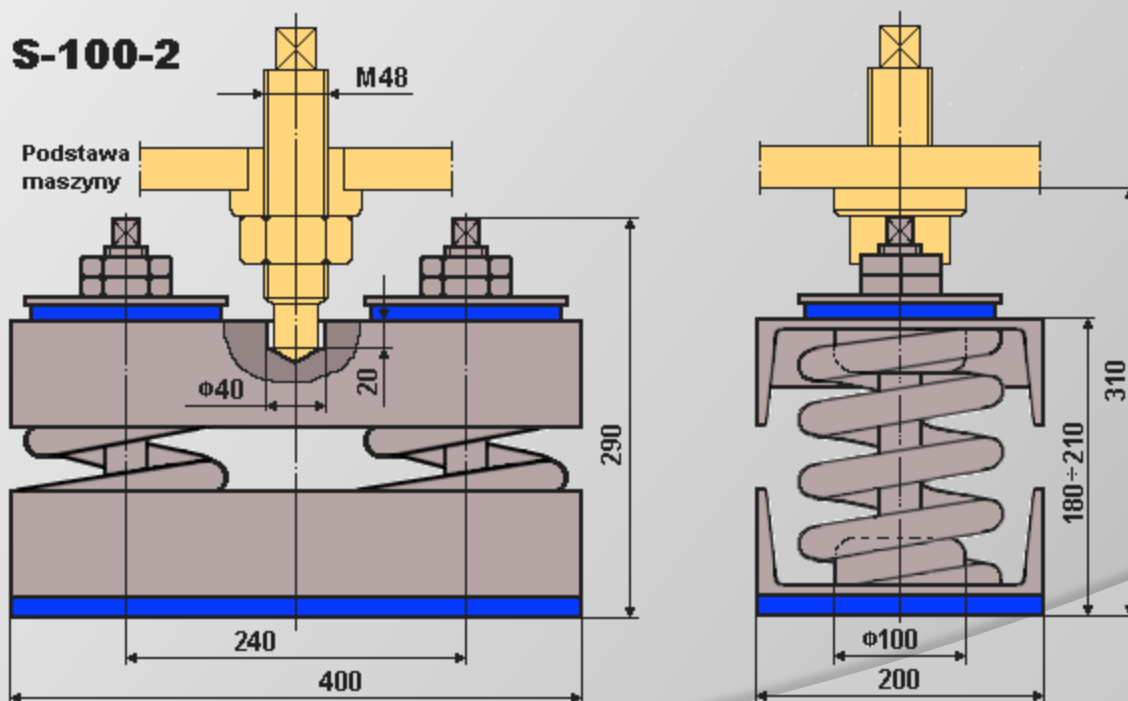
ZASTOSOWANIE

Wibroizolatory SG wykonywane są z dostosowaniem do dokładnie określonych warunków ich pracy, dlatego przy zamawianiu należy podać obciążenie przypadające na każdy wibroizolator oraz liczbę obrotów/minutę stawianego na nich urządzenia.

Wibroizolator sprężynowy S zestawiony jest z dwóch jednakowych sprężyn, zabudowanych pomiędzy segmentami wykonanymi z ceowników.

Całość połączona jest śrubami za pośrednictwem tłumiących drgania gumowych krążków. Górny segment ma gniazdo, w którym osadzona jest śruba poziomująca maszyny. Dolny segment ma pod spodem gumową podszewę, którą ustawiany jest na posadzce, bez przykręcania.

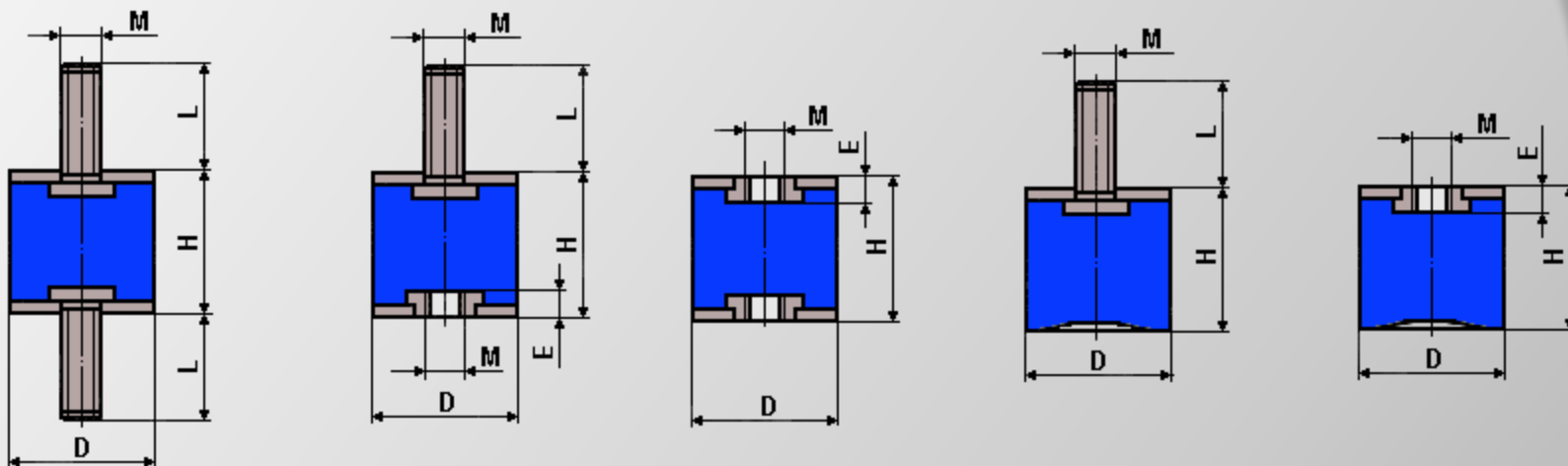
Aktualnie wykonywane są wibroizolatory sprężynowe typ S-100-2, tj. z dwiema sprężynami o średnicy wewnętrznej 100 mm.



ZASTOSOWANIE

bardzo ciężkie wentylatory, sprężarki i inne maszyny dla trudnych warunków wibroizolacji

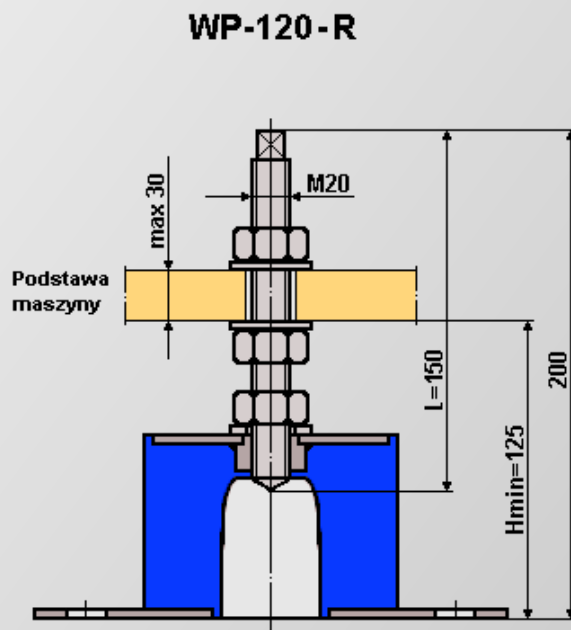
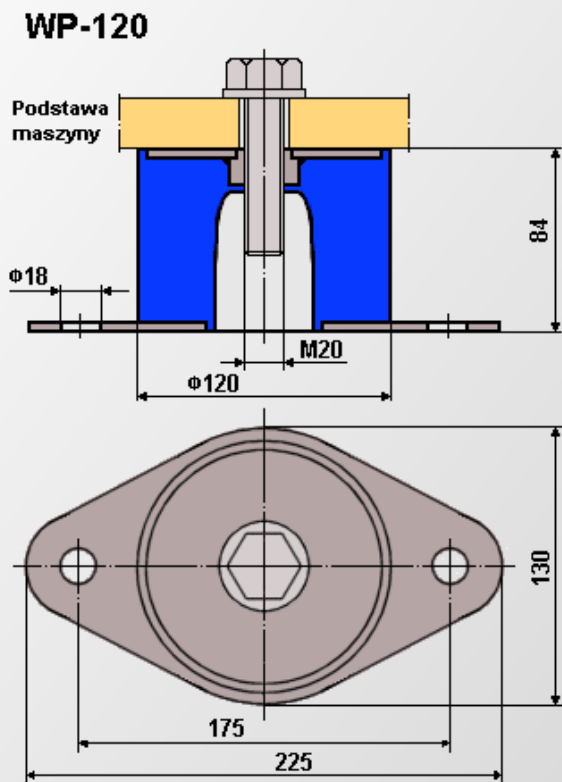
Wibroizolator walcowy ma postać walca, którego jedno lub oba czoła ograniczone są metalowymi tarczami. Tarcze zaopatrzone są w śruby lub otwory gwintowane. Wibroizolatory walcowe wykonywane są o średnicach od 20 do 100 mm, w pięciu odmianach tj: z dwiema śrubami, ze śrubą i otworem gwintowanym, z dwoma otworami gwintowanymi, ze śrubą i podstawą wklęsłą, z otworem gwintowanym i podstawą wklęsłą



ZASTOSOWANIE

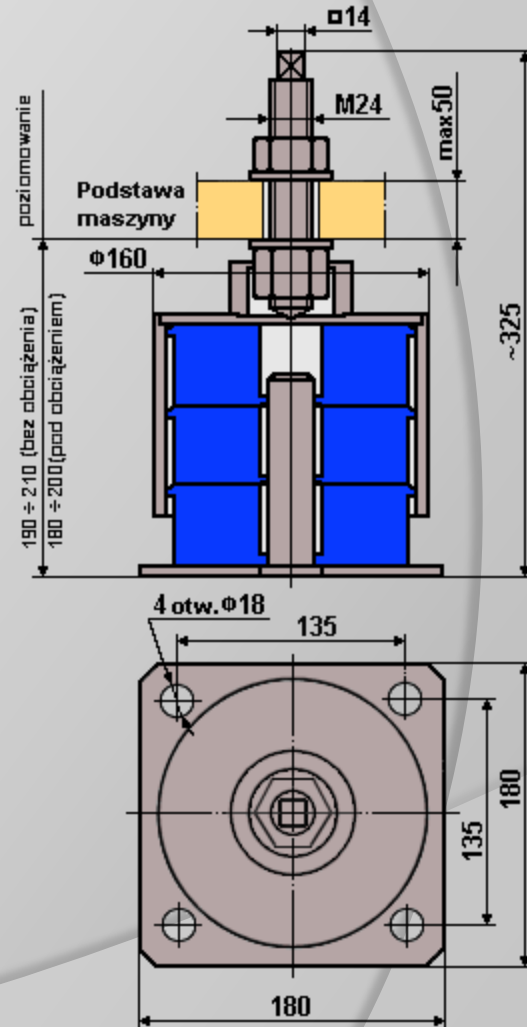
wibroizolacja zespołów zabudowanych wewnątrz maszyn np. klimatyzatorów
różnego rodzaju niewielkie maszyny

WIBROIZOLATOR WALCOWY



WIBROIZOLATOR WALCOWY SKŁADANY

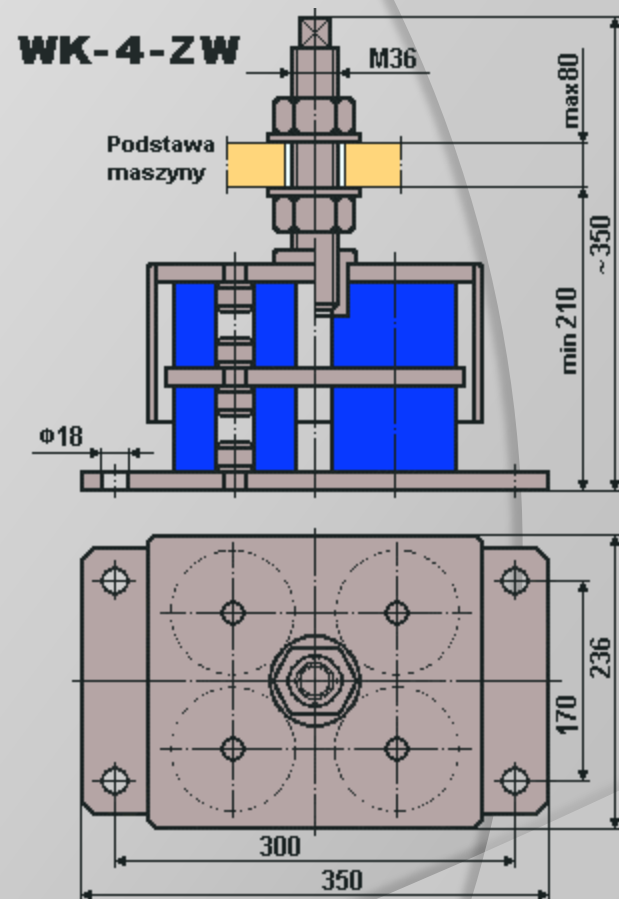
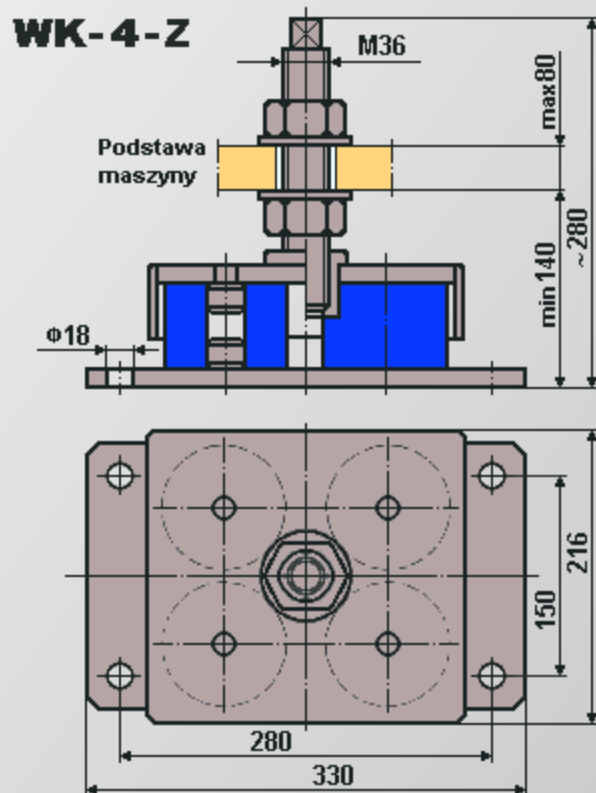
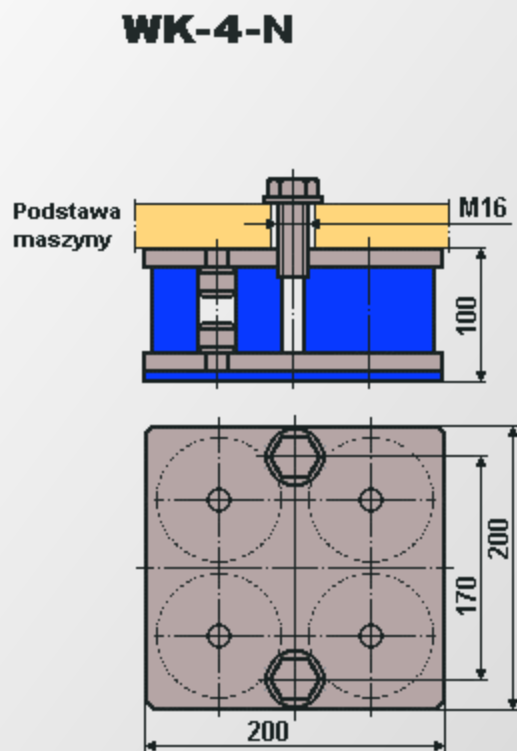
WS-140-3



ZASTOSOWANIE
 wirówki, młynki, rozdrabniacze, mieszalniki
 przesiewacze, przenośniki wstrząsowe
 agregaty chłodnicze

wentylatory, sprężarki, pompy 94
 agregaty prądotwórcze
 młynki, wirówki, mieszarki itp.

WIBROIZOLATOR WIELOKRAŹKOWE



ZASTOSOWANIE

do wibroizolacji ciężkich maszyn których praca wywołuje uderzenia i wstrząsy, głównie pionowe np. prasy, młyny, mieszarki, wirowki itp.



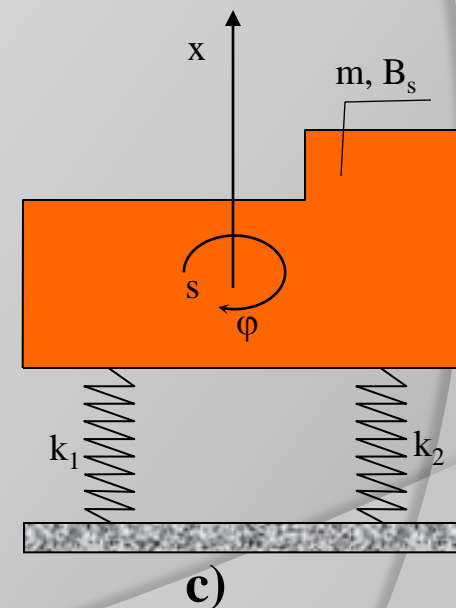
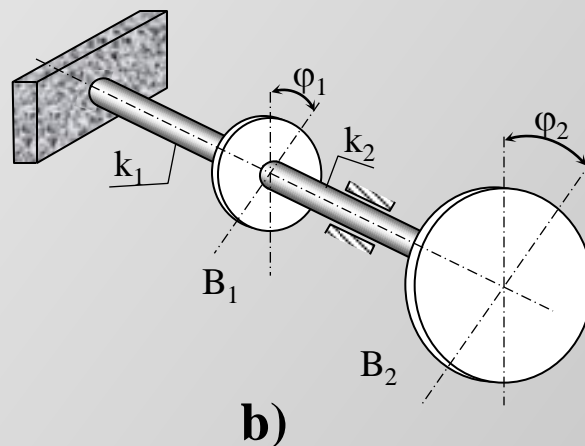
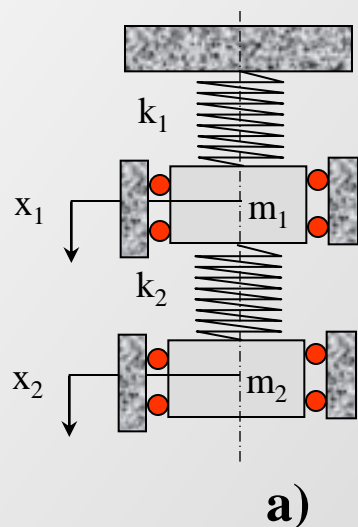
Przykłady tłumików
stosowanych w samolotach



Drgania liniowe układów o dwóch stopniach swobody. Drgania własne i wymuszone. Charakterystyki drganiowe. Wpływ tłumienia.

Drgania swobodne

Podstawowe własności drgań układów o dwóch stopniach swobody zostaną rozpatrzone na przykładzie układu przedstawionego poniżej. Z matematycznego punktu widzenia przedstawiona metoda postępowania będzie podobna i dla innych układów mechanicznych pokazanych schematycznie.



Rys. Przykład układów drgających o dwóch stopniach swobody

Dwa ciała rys. a wykonują tylko ruchy postępowe, natomiast dwa dyski przedstawione na rys. b o masowych momentach bezwładności B_1, B_2 wykonują tylko drgania skrętne, przy czym rolę sprężyn pracujących na skręcanie odgrywają bezmasowe części wałów o współczynnikach sztywności k_1 i k_2 . Natomiast na rys.c belka podparta na sprężynach o współczynnikach sztywności k_1 i k_2 ma możliwość zarówno ruchu postępowego jak i obrotu.

Równanie ruchu układu (rys.a) ma postać:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = m_1 g - k_1(x_{1st} + x_1) + k_2(x_{2st} + x_2 - x_1)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = m_2 g - k_2(x_{2st} + x_2 - x_1)$$

Statyczne wydłużenia sprężyn opisujemy wzorami:

$$x_{1st} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1}, \quad x_{2st} = \frac{m_2 g}{k_2}$$

Równania ruchu po przekształceniach przyjmują postać:

$$\ddot{x}_1 + (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2)x_1 - \alpha_{12}^2 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 - \alpha_{22}^2 x_1 + \alpha_{22}^2 x_2 = 0$$

(*)

gdzie:

$$\frac{k_2}{m_2} = \alpha_{22}^2, \quad \frac{k_2}{m_1} = \alpha_{12}^2, \quad \frac{k_1 + k_2}{m_1} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2$$

Rozwiązania układu poszukujemy w postaci:

$$x_1 = A \cos(\alpha t - \beta); \quad x_2 = B \cos(\alpha t - \beta);$$

Dla niezerowych wartości parametrów **A** i **B** mamy równanie charakterystyczne postaci:

$$\alpha^4 - (\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2)\alpha^2 + \alpha_{11}^2\alpha_{22}^2 = 0$$

Częstości α_1 i α_2 wynoszą:

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{12}^2)^2 - \alpha_{11}^2\alpha_{22}^2}$$

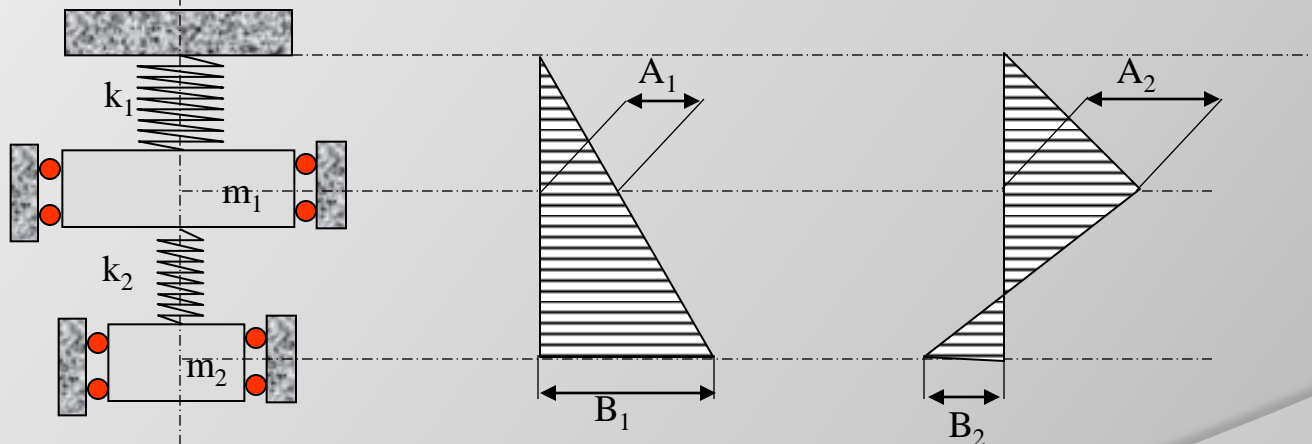
Dla każdej z częstości obliczamy stosunki określające postacie drgań układu w czasie drgań odpowiednio z częstością α_1 i α_2

$$\frac{B_1}{A_1}(\alpha_1) = \frac{\alpha_{22}^2}{\alpha_{22}^2 - \alpha_1^2} = \lambda_1 > 0; \quad \frac{B_2}{A_2}(\alpha_2) = \frac{\alpha_{22}^2}{\alpha_{12}^2 - \alpha_2^2} = \lambda_2 < 0$$

Dwie główne postaci drgań opisane są wzorami:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(1)} &= A_1 \cos(\alpha_1 t - \beta_1); & x_2^{(1)} &= \lambda_1 A_1 \cos(\alpha_1 t - \beta_1); \\
 x_1^{(2)} &= A_2 \cos(\alpha_2 t - \beta_2); & x_2^{(2)} &= \lambda_2 A_2 \cos(\alpha_2 t - \beta_2);
 \end{aligned}$$

przy czym okresy drgań odpowiadające częstościom α_1 i α_2 wynoszą: $T_1=2\pi/\alpha_1$; $T_2=2\pi/\alpha_2$.
 Przy pierwszej postaci drgań oba ciała poruszają się w tę samą stronę i w fazie, natomiast podczas drgań z drugą postacią główną poruszają się one w kierunkach przeciwnych (przesunięcie fazowe wynosi π).



Drgania, którym odpowiadają główne postaci, są możliwe, ale muszą być zadane przy szczególnych warunkach początkowych.

W ogólnym przypadku drgania są ich kombinacją liniową i są opisane równaniami:

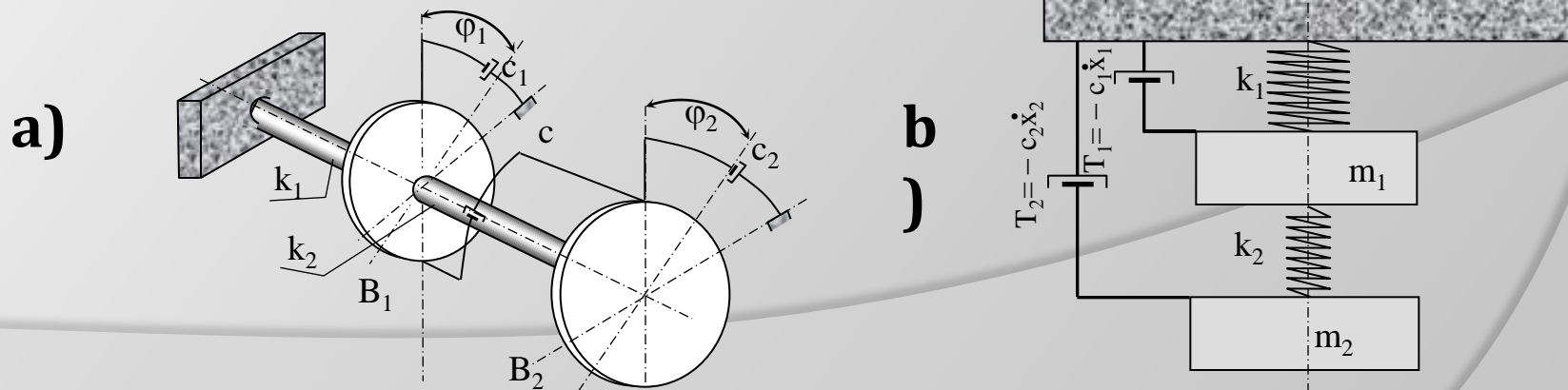
$$x_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = A_1 \cos(\alpha_1 t - \beta_1) + A_2 \cos(\alpha_2 t - \beta_2);$$

$$x_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(2)} = \lambda_1 A_1 \cos(\alpha_1 t - \beta_1) + \lambda_2 A_2 \cos(\alpha_2 t - \beta_2);$$

Stałe $A_1, A_2, \beta_1, \beta_2$ są wyznaczone z warunków początkowych. Drgania wypadkowe (jako wyniki złożenia dwóch postaci głównych) w odróżnieniu od drgań głównych nie muszą być okresowe. Zachodzi to wówczas, gdy częstości $\alpha_1/\alpha_2 \neq k/l$, gdzie k i l są liczbami naturalnymi.

Drgania swobodne (z tłumieniem)

Rozpatrzmy drgania układu z rys.b w którym dodatkowo uwzględniono tłumienie proporcjonalne do prędkości bezwzględnej lub względnej.



Na rysunku a) wprowadzone zostały trzy tłumiki drgań skrętnych. Dwa z nich są reprezentowane przez momenty tłumienia proporcjonalne do prędkości bezwzględnych

$$M_T^{(i)} = c_i \dot{\varphi}_i; \quad i = 1, 2$$

a trzeci - przez moment proporcjonalny do prędkości kątowej względnej

$$M_T = c(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$$

Przyjęte uproszczenie sił rzeczywistych tłumiących jako proporcjonalnych do prędkości (względnej lub bezwzględnej) nie zawsze jest jednak możliwe.

Równania ruchu tego układu (dla $c = 0$) mają postać:

$$\begin{aligned} B_1 \ddot{\varphi}_1 &= -k_1 \varphi_1 + k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) - c_1 \dot{\varphi}_1 \\ B_2 \ddot{\varphi}_2 &= -k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) - c_2 \dot{\varphi}_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Rozwiązań szczególnych powyższego układu poszukujemy w postaci:

$$\varphi_1 = A \cdot e^{r \cdot t}; \quad \varphi_2 = B \cdot e^{r \cdot t}$$

gdzie r jest liczbą zespoloną. Po podstawieniu ostatnich równań do układu (1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} [B_1 r^2 + c_1 r + k_1 + k_2] A - k_2 B &= 0 \\ -k_2 A + [B_2 r^2 + c_2 r + k_2] B &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Natomiast równanie częstości (charakterystyczne) ma wówczas postać:

$$\left[B_1 r^2 + c_1 r + k_1 + k_2 \right] \cdot \left[B_2 r^2 + c_2 r + k_2 \right] - k_2^2 = 0$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego dla małego tłumienia są liczby zespolone parami sprzężone o częściach rzeczywistych ujemnych. Gdyby chociaż jeden z nich miał część rzeczywistą dodatnią, to drgania by narastały. Pierwiastki te mają postać:

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -h_1 \pm i \cdot \lambda_1 \\ r_{3,4} &= -h_2 \pm i \cdot \lambda_2 \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie λ_1 i λ_2 są częstościami drgań swobodnych (drgania z tłumieniem). Również i w tym przypadku na podstawie równań (2) można dla każdego z pierwiastków r_i ($i = 1, 2, 3, 4$) wyznaczyć stosunki $A_i/B_i(r_i)$. Ponieważ kombinacje rozwiązań równań (3) też są rozwiązaniami, to można wybrać cztery następujące niezależne rozwiązania rzeczywiste:

$$e^{-h_1 t} \cos \lambda_1 t, \quad e^{-h_1 t} \sin \lambda_1 t, \quad e^{-h_2 t} \cos \lambda_2 t, \quad e^{-h_2 t} \sin \lambda_2 t$$

Charakteryzują one postacie główne drgań układu z tłumieniem.

Rozwiązania ogólne przyjmują postać:

$$\varphi_1 = e^{-h_1 t} (A_1 \cos \lambda_1 t + A_2 \sin \lambda_1 t) + e^{-h_2 t} (A_3 \cos \lambda_2 t + A_4 \sin \lambda_2 t)$$

$$\varphi_2 = e^{-h_1 t} (B_1 \cos \lambda_1 t + B_2 \sin \lambda_1 t) + e^{-h_2 t} (B_3 \cos \lambda_2 t + B_4 \sin \lambda_2 t)$$

Z warunków początkowych $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$ i $\dot{\varphi}_i(t_0) = \dot{\varphi}_{i0}$ wyznaczamy cztery niewiadome (pozostałe cztery znajdujemy z równań (2)).

Współrzędne główne

Przy dowolnie przyjętych współrzędnych niezależnych x_1 i x_2 , każde z równań drgań zawiera obie współrzędne. Przez odpowiedni dobór współrzędnych x_1, x_2 można równania te sprowadzić do takiej postaci, że każde z nich zawiera tylko jedną współrzędną (niewiadomą) i może być rozwiązane niezależnie od drugiego.

Przeprowadzając w równaniach (*) zmianę współrzędnych określaną podstawieniem:

$$x_1 = \bar{x}_1 \quad x_2 = \frac{\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_1^2}{\alpha_{12}^2} \bar{x}_1$$

otrzymuje się dla pierwszej postaci głównej i odpowiadającej jej częstości α_1

$$\ddot{\bar{x}}_1 - \alpha_1^2 \cdot \bar{x}_1 = 0$$

Podstawiając zaś:

$$x_1 = \bar{x}_2 \quad x_2 = \frac{\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_2^2}{\alpha_{12}^2} \bar{x}_2$$

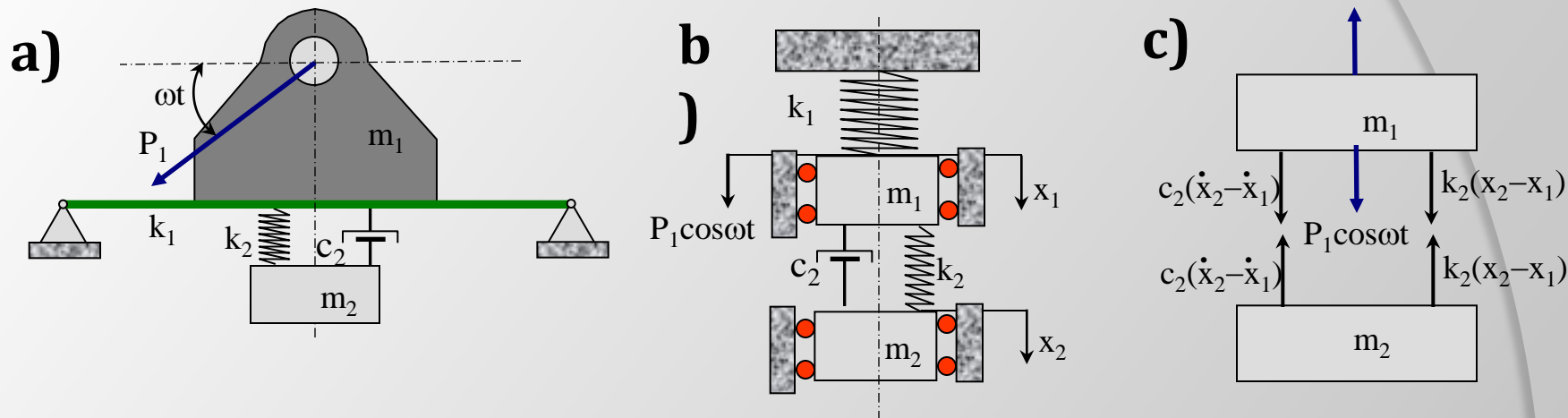
otrzymuje się dla drugiej postaci drgań równanie

$$\ddot{\bar{x}}_2 - \alpha_2^2 \cdot \bar{x}_2 = 0$$

Drgania układu są więc opisane dwoma niezależnymi równaniami. Współrzędne \bar{x}_1 , \bar{x}_2 dla których to zachodzi, są współrzędnymi głównymi.

Drgania wymuszone

Rozpatrzmy następujący problem często spotykany w technice. Maszyna wirnikowa o masie m_1 jest zamontowana na konstrukcji podpierającej o współczynniku sztywności k_1 . Wirnik obraca się z pewnym niewyważeniem μ , co powoduje powstanie siły odśrodkowej o amplitudzie $P_1 = m_1 \mu \omega^2$ (gdzie ω jest częstością obrotów wirnika), oddziałującej na podparcie. W celu zmniejszenia tych oddziaływań stosuje się tzw. tłumik dynamiczny, mający masę m_2 , sztywność k_2 i tłumienie c_2 tak dobrane, aby realizować np. zerowe lub minimalne amplitudy drgań podparcia (patrz rys.).



Rys. Schemat silnika z niewyważonym wirnikiem podpartym na belce o sztywności k_1 i z podwieszonym dynamicznym tłumikiem drgań: a) model obliczeniowy jako układ o dwóch stopniach swobody z tłumieniem, b) model z wymuszeniem harmonicznym, c) rozkład sił służący do wyprowadzenia równań ruchu

Równania ruchu układu modelowego z rys. b mają postać:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + P_1 \cos \omega t$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (1)$$

W układzie (1) pojawiają się drgania swobodne oraz drgania wymuszone okresowe o częstości wymuszenia ω . Ponieważ pierwsze z nich po pewnym czasie wygasną (wskutek istniejącego tłumienia), to można w przypadku analizy drgań ustalonych ograniczyć się jedynie do rozwiązania szczególnego:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) = a_1 \sin(\omega t + \beta_1); \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) = a_2 \sin(\omega t + \beta_2); \end{aligned} \quad (2)$$

Po podstawieniu rozwiązań (2) do układu (1) i przyrównaniu wyrazów stojących przy członach $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$ otrzymujemy układ czterech równań do wyznaczenia czterech niewiadomych A_i, B_i ($i = 1, 2$). Amplitudy drgań a_i oraz kąty przesunięć fazowych β_i ($i = 1, 2$) na podstawie równań (1) wynoszą:

$$a_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}; \quad \operatorname{tg} \beta_i = \frac{B_i}{A_i} \quad i = 1, 2$$

Po obliczeniach otrzymujemy

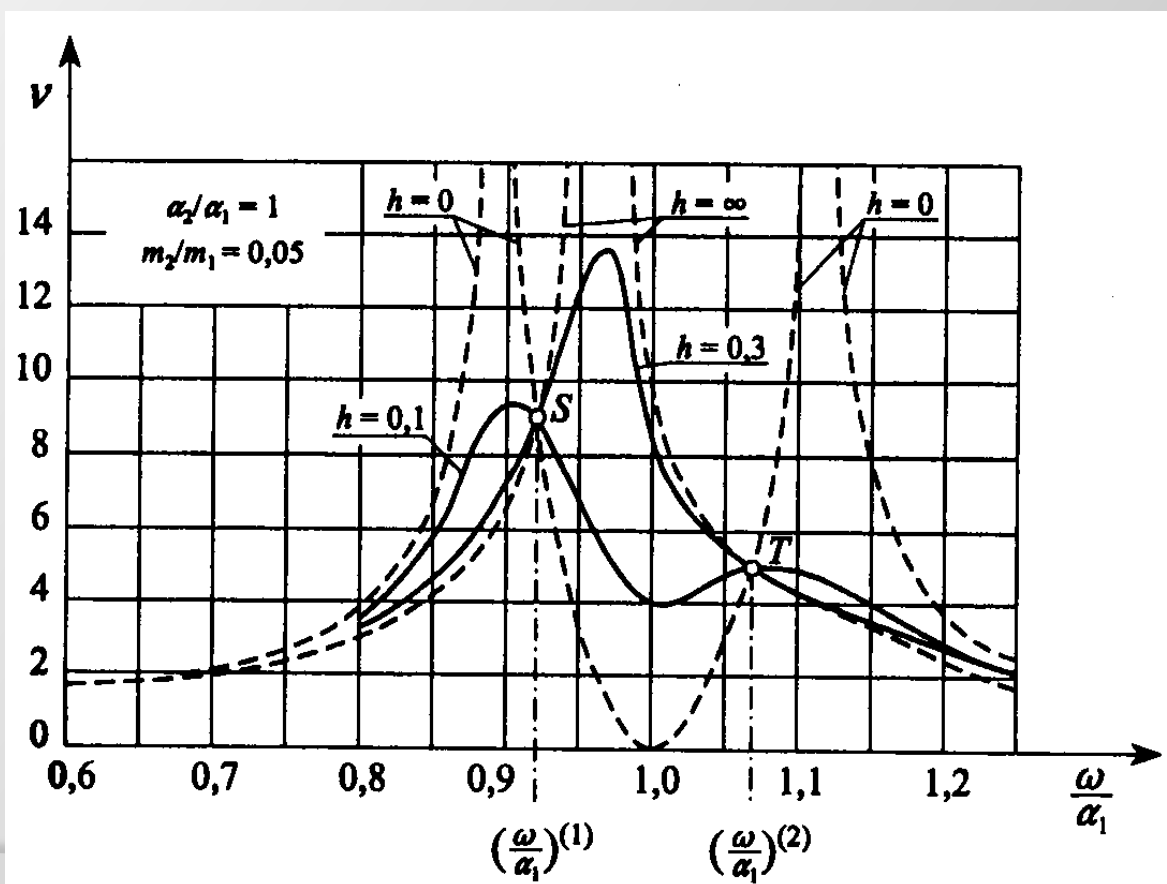
$$\frac{a_1}{P_1} = \sqrt{\frac{(k_2 - m_2 \omega^2)^2 + c_2 \omega^2}{\left[\left((k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 \right)^2 + c_2^2 \omega^2 \left[k_1 - (m_1 + m_2) \omega^2 \right]^2 \right]}} \quad (3)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$v = \frac{a_1}{x_{st}} = \frac{a_1}{P_1} k_1, \quad \alpha_1^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \alpha_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad \delta = \frac{m_2}{m_1}, \quad c_{kr} = 2m_2 \alpha_2, \quad h = \frac{c}{c_{kr}}$$

z równania (3) otrzymujemy

$$v = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2 + 2h\left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2}{\sqrt{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2 - \delta\left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2\right]\right\}^2 + \left(2h\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2(1 + \delta)\right]^2}} \quad (4)$$



Z rysunku tego widać, że wszystkie krzywe rezonansowe, niezależnie od tłumienia, przecinają się w dwóch punktach S i T. Oznacza to, że istnieją dwie dyskretne wartości częstości wymuszeń ω (odcięte punktów S i T), dla których amplitudy drgań pomimo zmian współczynnika tłumienia c pozostają nie zmienione.

Bardzo duże tłumienie ($h = \infty$) odpowiada sztywnemu połączeniu obu mas, czyli masie $m = m_1 + m_2$ zawieszanej na sprężynie o sztywności k_1 i wymuszanej harmonicznym. W tym przypadku wartość amplitudy drgań może rosnąć do nieskończoności. Wprawdzie istnieje możliwość całkowitego wygaszenia drgań, ale zachodzi to tylko dla jednej wartości częstości wymuszenia $\omega = \alpha_2$ i dla tłumienia $c = 0$. W praktyce postępuje się więc inaczej. Parametry układu dobiera się w ten sposób, aby styczne w punktach S i T były poziome i aby punkty te miały jednakową rzędną. Jeśli chcemy, żeby amplituda nie przekraczała rzędnych tych punktów, to tłumienie c trzeba dobrać w ten sposób, aby krzywa rezonansowa osiągała maksimum w jednym z nich. Całkowita eliminacja drgań w szerokim zakresie zmian częstości jest jednak niemożliwa.

Przedstawiona analiza dotyczy drgań układów o dwóch stopniach swobody z tłumieniem. Otrzymane zależności obowiązują również dla układu bez tłumienia, jeżeli przyjąć $c = 0$. W tym przypadku w dwóch punktach, odpowiadających częstości wymuszenia równej częstościom drgań własnych, amplituda drgań dąży do nieskończoności.

Omówiona teoria drgań wymuszonych układu o dwóch stopniach swobody znajduje przede wszystkim zastosowanie do projektowania dynamicznego tłumika drgań.

Tłumiki i eliminatory drgań - pojęcia podstawowe. Wahadłowe tłumiki drgań. Dynamiczny tłumik drgań. Charakterystyki tłumików. Przegląd konstrukcji tłumików drgań w okrętownictwie. Zastosowania.

★ Minimalizacja drgań i ich skutków

Drgania mechaniczne oddziałują szkodliwie na maszyny, mechanizmy lub ich elementy powodując albo zmniejszenie ich trwałości albo powodując zniszczenie nagle przy przekroczeniu wytrzymałości doraźnej materiału.

W tych przypadkach podstawowym kryterium oceny szkodliwości drgań jest wielkość **amplitud drgań**, a w przypadku zmęczeniowego zniszczenia również **liczba zmian obciążeń**, czyli **częstotliwość drgań**.

Oczywiście **im większe amplitudy drgań i większa ich częstotliwość, tym wpływ drgań na maszyny bardziej szkodliwy.**

Podstawową charakterystyką oceny szkodliwości drgań układów mechanicznych na maszyny jest więc ich charakterystyka częstościowa podatności.

Drgania mechaniczne oddziałują szkodliwie również, a może przede wszystkim, na organizm człowieka, przy czym rozróżnia się tutaj oddziaływanie bezpośrednie, tj. występujące przy kontakcie ciała ludzkiego z drgającym układem mechanicznym oraz pośrednie, tj. przez fale sprężyste wywołane drganiami układu mechanicznego, np. fale akustyczne w postaci hałasu.

Oddziaływanie bezpośrednie i pośrednia drgań na człowieka, a tym samym ich szkodliwość, jest zależna od wielu czynników, m.in.:

– **od charakteru drgań:** drgania mogą oddziaływać **lokalnie**, np. na rękę lub **globalnie**, ogólnie na całe ciało; drgania mogą działać w kierunku **osi podłużnej** (wzdłuż kręgosłupa) lub **poprzecznej ciała**; drgania mogą być **impulsowe, uderzeniowe lub ciągłe**; drgania ciągłe mogą być z kolei **harmoniczne lub złożone** (poliharmoniczne);

– **od częstotliwości drgań:** największa szkodliwość drgań bezpośrednich występuje w obszarach rezonansowych organów ciała ludzkiego, np. przy częstotliwości **1÷2Hz zachodzi rezonans poprzeczny klatki piersiowej**; przy **4÷8Hz rezonans narządów jamy brzusznej**; przy **20÷30Hz rezonans narządów głowy**, wpływający na pogorszenie ostrości widzenia; przy **60÷90Hz rezonans gałek ocznych** będący przyczyną nieostrości widzenia; **największa wrażliwość z kolei na drgania o oddziaływaniu pośrednim** głównie przez fale akustyczne występuje w obszarze **3000÷4000Hz**; przy częstotliwościach wysokich, tj. **10÷20 tys. Hz** oraz szczególnie niskich, tj. **kilkadziesiąt do kilkuset Hz** wrażliwość organów słuchu jest na ogół nawet **wielokrotnie niższa**;

– **od czasu ekspozycji organizmu na drgania:** im ten czas dłuższy, tym szkodliwość drgań **wzrasta**;

– **od ilości energii emitowanej przez układ drgający** oraz docierającej do organizmu człowieka w jednostce czasu, tj. **od mocy emitowanej i absorbowanej**; im moc emitowana większa tym **większe prawdopodobieństwo wzrostu mocy absorbowanej przez organizm człowieka i wzrostu szkodliwości drgań**.

Podstawowym kryterium oceny oddziaływania drgań układu na maszyny i urządzenia jest charakterystyka podatności układu.

W przypadku oddziaływania na organizm ludzki jest nieco inaczej. Przy oddziaływaniu bezpośrednim w zakresie niskich częstotliwości od kilku do kilkunastu Hz drgania powodują powstawanie w organizmie człowieka napięć w układzie utrzymującym narządy wewnętrzne. Siły napięcia są tym większe, im większe są siły bezwładności powstające podczas drgań, czyli im większe są wartości przyspieszeń drgań.

Przy większych częstotliwościach, a więc i niższych amplitudach drgań kryterium oceny drgań staje się **wartość prędkości drgań. Energia emitowana przez źródło drgań w postaci fali sprężystej, np. akustycznej jest m.in. funkcją prędkości drgającego źródła. Podobnie energia kinetyczna przekazywana np. do rąk zaciśniętych na uchwycie młotka wibracyjnego jest kwadratową funkcją prędkości drgań ręki i uchwytu. Stąd jako kryteria oceny szkodliwości oddziaływania drgań na organizm ludzki przyjmuje się wielkości proporcjonalne albo do prędkości, albo do przyspieszeń drgań.**

Zmniejszanie amplitud drgań układów

Rzeczywiste układy mechaniczne doznają oddziaływań nie będących najczęściej funkcjami harmonicznymi lecz sumą wielu funkcji harmonicznymi. Równanie różniczkowe takiego układu jest wobec tego następujące:

$$\mathbf{A} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}(t) + \mathbf{B} \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t) + \mathbf{C} \bar{\mathbf{q}}(t) = \sum_{n=1}^N \bar{\mathbf{F}}_{an} e^{j\omega t}$$

gdzie: $\bar{\mathbf{F}}_{an}$, ω – zespolony wektor amplitud sił wymuszających zmiennych z częstością ω , N – liczba wektorów sił wymuszających o częstościach ω , $\bar{\mathbf{q}}(t)$ – zespolony wektor współrzędnych uogólnionych.

Z analizy równania wynika, że możliwe są trzy sposoby obniżania amplitud drgań wymuszonych ustalonych układu mechanicznego:

- ① przez zmianę parametrów układu;
- ② przez zmianę wymuszeń;
- ③ przez zmianę struktury układu, tj. dołączenie układu dodatkowego.

Ad.① Zmiana parametrów układu

Zmiana parametrów strukturalnych, tj. modyfikacja macierzy **A**, **B**, **C** prowadzi do zmiany macierzy podatności. Najczęściej w rzeczywistych układach o wielu stopniach swobody pożądane są zmiany tylko niektórych, niekiedy wręcz tylko jednej charakterystyki, tj. jednego elementu macierzy podatności. Zmniejszenie podatności układu dotyczy najczęściej tylko tych obszarów częstości, którym odpowiadają siły wymuszające o największej amplitudzie lub które są istotne z punktu widzenia funkcji spełnianych przez układ.

W obszarze przedrezonansowym w celu zmniejszenia podatności należy zwiększyć sztywność układu; w obszarze rezonansu obniżenie podatności osiąga się przez zwiększenie tłumienia; w obszarze nadrezonansowym należy zwiększyć masę układu.

W przypadku układów o wielu stopniach swobody zmniejszenie podatności w obszarach rezonansowych osiąga się podobnie, tzn. przez zwiększenie tłumienia i jest to bardzo skuteczny sposób. W obszarze bardzo niskich częstości, tj. przed pierwszym rezonansem oraz w obszarze bardzo wysokich częstości zmniejszenie podatności osiąga się podobnie, jak w układzie o jednym stopniu swobody, tzn. odpowiednio przez wzrost sztywności elementów układu oraz wzrost mas układu. W obszarach międzyrezonansowych trudno jest przedstawić ogólne zalecenie. Wymagana jest wówczas pełna analiza wpływu poszczególnych parametrów strukturalnych na podatność.

Ad.② Zmiana parametrów wymuszenia

Parametrami wektora wymuszeń rzeczywistych są: liczba N sił wymuszających, wektor modułów i faz amplitud sił wymuszających oraz częstości sił wymuszających. Ruch wypadkowy układu jest oczywiście sumą ruchów składowych.

Ograniczenie liczby N sił wymuszających, jeśli jest to możliwe, prowadzi oczywiście w ogólności do obniżenia amplitud drgań układu. Przykładem jest tutaj chociażby eliminacja niektórych harmonicznnych sił masowych, działających na elementy układu korbowo-tłokowego silników spalinowych przez wyrównoważenie dynamiczne poszczególnych układów oraz odpowiednie rozmieszczenie wykorbień wału względem siebie.

Zmniejszenie amplitud sił wymuszających jest najskuteczniejszym sposobem zmniejszenia drgań. Osiąga się to np. przez wyrównoważenie elementów obrotowych lub będących w ruchu posuwisto-zwrotnym, np. wałów korbowych silników spalinowych i ich układów korbowodowych, śrub napędowych okrętów, wirników silników i prądnic elektrycznych itp. Bardzo efektywnym sposobem, aczkolwiek nie zawsze możliwym do zrealizowania, jest zmiana częstości sił wymuszających i wyjście poza obszar rezonansowy bardzo wysokiej podatności układu. Typowy przykład to zmiana obrotów silnika głównego statku w celu wyjścia z obszaru obrotów zabronionych dla układu silnik - linia wałów - śruba napędowa. Niekiedy stosuje się również zmianę faz amplitud sił wymuszających. W silnikach spalinowych wielocyndrowych kolejność zapłonów jest ustawiana w taki sposób, aby uzyskać możliwie najmniejsze odchylenia momentu chwilowego na wale od jego wartości średniej.

Ad.③ Zmiana struktury układu przez dołączenie układu dodatkowego – eliminatory i tłumiki drgań

Jeśli nie istnieje możliwość zmiany parametrów układu (masy, sztywności lub tłumienia) oraz zmiany parametrów wymuszeń, wówczas pozostaje jeszcze możliwość **zmiany struktury układu**, tzn. dołączenie układu dodatkowego.

W układach napędowych z silnikiem spalinowym tłokowym nie można uniknąć występowania wymuszeń drgań skrętnych pochodzących od przebiegu procesu roboczego zachodzącego w każdym cylindrze silnika napędowego. Dlatego **drżania skrętne** będą występowały zawsze. Należy jednak dążyć do zmniejszenia ich ujemnego wpływu na wytrzymałość wałów poprzez ograniczanie ich amplitudy lub przesunięcie rezonansu drgań, jeżeli występuje on w zakresie stosowanych w eksploatacji prędkości obrotowych układu napędowego.

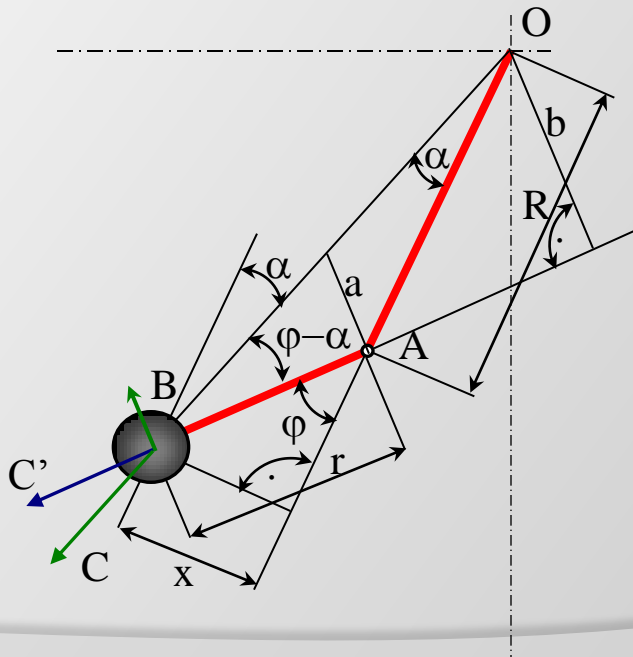
Możliwości przesunięcia rezonansu drgań są jednak ograniczone i dlatego pojawia się często potrzeba zmniejszenia wielkości drgań. Temu celowi służą dodatkowe urządzenia, w postaci **tłumików drgań skrętnych**. Pod tą ogólną nazwą rozróżnia się:

- 1) rezonansowe eliminatory drgań;
- 2) tłumiki właściwe (wiskotyczne, tarciove);
- 3) tłumiki mieszane, będące rezonansowymi eliminatorami drgań z zastosowaniem tłumienia.

Na zmniejszenie drgań skrętnych układu napędowego ma również wpływ zastosowanie **sprężel elastycznych lub hydrokinetycznych**.

Wahadłowe eliminatory drgań skrętnych

Szczególnym przykładem rezonansowego eliminatora drgań jest eliminator wahadłowy stosowany w silnikach spalinowych tłokowych do eliminowania drgań skrętnych. Masa dodatkowa jest przymocowana do ramienia korby wału korbowego i może wykonywać ruchy wahlwe znajdując się w polu działania sił odśrodkowych, zastępujących w tym przypadku działanie sił sprężystych w omawianym poprzednio układzie z rezonansowym eliminatorem drgań. Ideowy schemat eliminatora wahadłowego oraz podstawy teoretyczne jego działania przedstawia rysunek.



Na ramieniu korby w odległości R od osi obrotu O wału korbowego jest przegubowo zamocowane wahadło o długości ramienia r i masie m . Gdy podczas trwania drgań skrętnych wału następuje zmiana prędkości kątowej ω wału, to na masę wahadła działa siła bezwładności B , która spowoduje wychylenie wahadła o pewien kąt φ w kierunku przeciwnym do przyspieszenia kątowego wału (na rys. wychylenie wahadła jest spowodowane opóźnieniem kątowym wału). W ruchu względnym wahadła (względem korby wału) siła bezwładności B wynosi: $B = -m r \ddot{\varphi}$

zaś w ruchu unoszenia (razem z korbą wału): $C = m \omega^2(R + r \cos\varphi)/\cos\alpha$

Siła wypadkowa C' obu wyszczególnionych sił bezwładności B od przyspieszenia w ruchu względnym oraz C od przyspieszenia w ruchu unoszenia decyduje o chwilowym wychyleniu wahadła pod kątem φ .

Równowagę dynamiczną masy wahadła określa równanie momentów sił B i C względem osi A wahadła: $B \cdot r - C \cdot a = 0$; $a = r \sin\alpha$.

Po podstawieniu za B i C wcześniej zdefiniowanych wartości otrzymujemy:

$$r^2 \ddot{\varphi} + (R + r \cos \varphi) \omega^2 R \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{R + r \cos \varphi}$$

Zakładając dla małych kątów $\operatorname{tg} \varphi = \varphi = x/r$; $\ddot{\varphi} = \ddot{x}/r$ otrzymujemy:

$$\ddot{x} + \frac{R}{r} \cdot \omega^2 x = 0$$

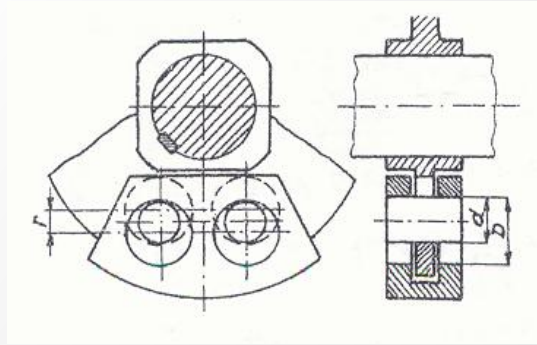
$$\omega_n = \omega \sqrt{\frac{R}{r}}$$

Poprzez odpowiedni dobór wartości R oraz r można uzyskać żadaną częstość wahań (drgań) własnych wahadła, czyli "nastroić" eliminator drgań stosownie do częstości drgań, które mają być ograniczone. Może zachodzić potrzeba eliminowania drgań skrętnych wywołanych określoną składową harmoniczną momentu obrotowego silnika, np. rzędu κ . Wówczas przy "strojeniu" eliminatora trzeba uwzględnić zależność

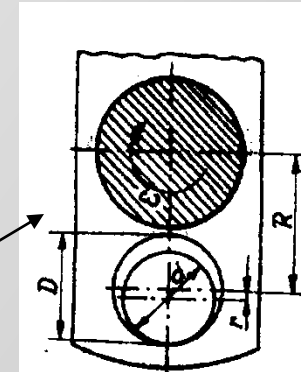
$$\omega_n = \kappa \omega = \omega \sqrt{\frac{R}{r}}$$

Co oznacza, że dla składowych rzędu $\kappa = 1, 2, 3, 4, \dots$ należy zastosować $R/r = 1, 4, 9, 16, \dots$

Częstość drgań własnych wahadła jest wprost proporcjonalna do prędkości kątowej wału korbowego, czyli że eliminator „dostraja” się sam do zmieniającej się wartości prędkości kątowej. Dlatego stosuje się je często do tłumienia drgań skrętnych wałów silników tłokowych

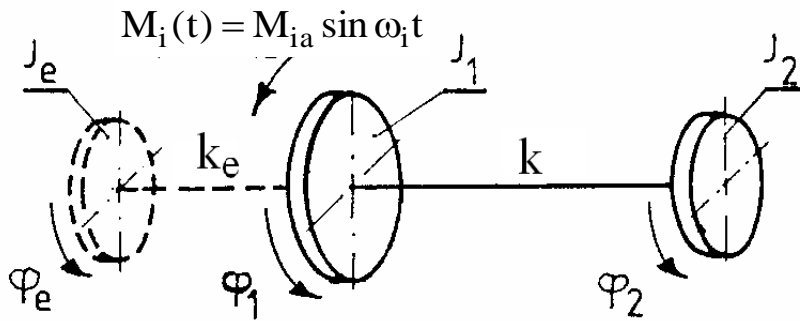
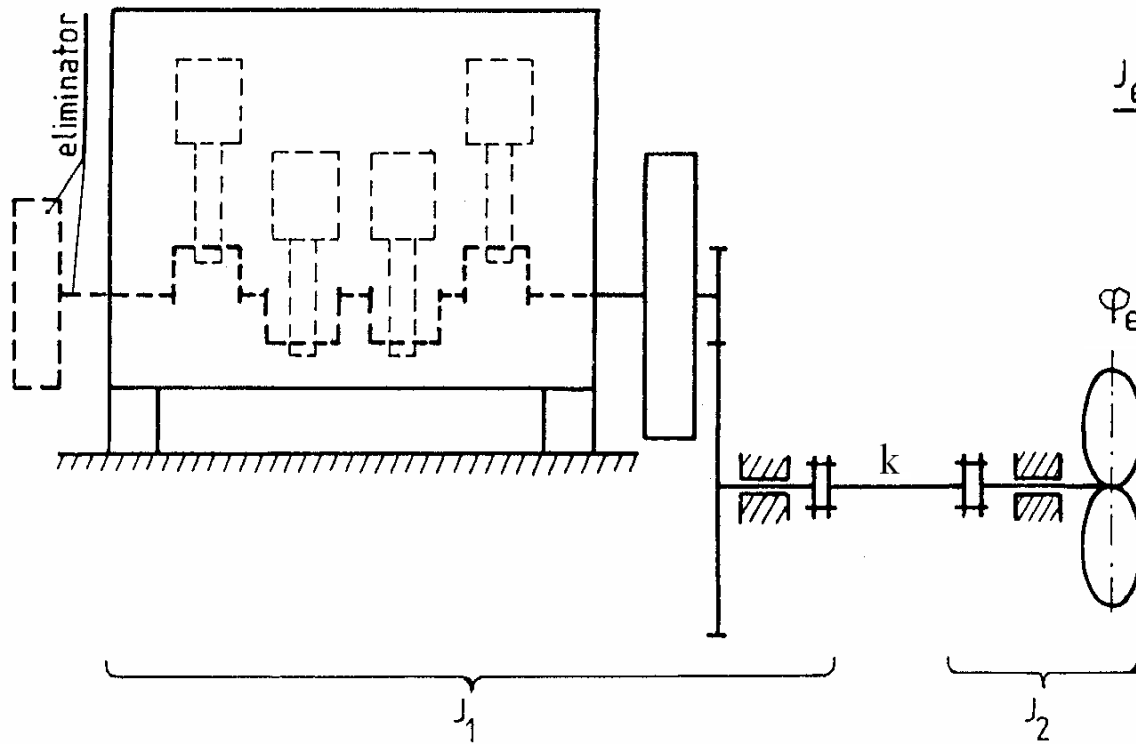


wahadłowy eliminator drgań Sarazina-Chiltona z wahadłem bifilarnym (dwuprzegubowym)



wahadłowy eliminator drgań Salomona typu rolkowego

* **Nietłumiony eliminator drgań** Rozważmy model dwumasowy pewnego układu napędowego statku pokazany na rysunku.



Zakładamy, że jedna (tzn. i -ta) składowa harmoniczna momentu napędowego silnika spalinowego ma częstość $\omega_i \equiv \nu_i$ równą lub bardzo bliską częstości ω_n drgań własnych układu. Załóżmy ponadto, że model jest nietłumiony; tłumienie nie wpływa bowiem istotnie na częstość ω_n drgań własnych. Określmy wzór na częstość ω_n przedstawionego modelu dwumasowego. Energia kinetyczna i potencjalna modelu wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_2^2 \quad E_p = \frac{1}{2} k (\phi_1 - \phi_2)^2$$

współczynniki bezwładności a_{ij} i sztywności k_{ij} wynoszą:

$$a_{11} = J_1, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = J_2, \quad k_{11} = k, \quad k_{12} = k_{21} = -k, \quad k_{22} = k$$

oraz macierze bezwładności \mathbf{A} i sztywności \mathbf{K} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

Macierz częstości własnych i równanie charakterystyczne

$$\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} k - \omega_n^2 J_1 & -k \\ -k & k - \omega_n^2 J_2 \end{bmatrix}$$

$$(k - \omega_n^2 J_1)(k - \omega_n^2 J_2) - k^2 = 0$$

$$\omega_n^4 J_1 J_2 - \omega_n^2 k (J_1 + J_2) = 0$$

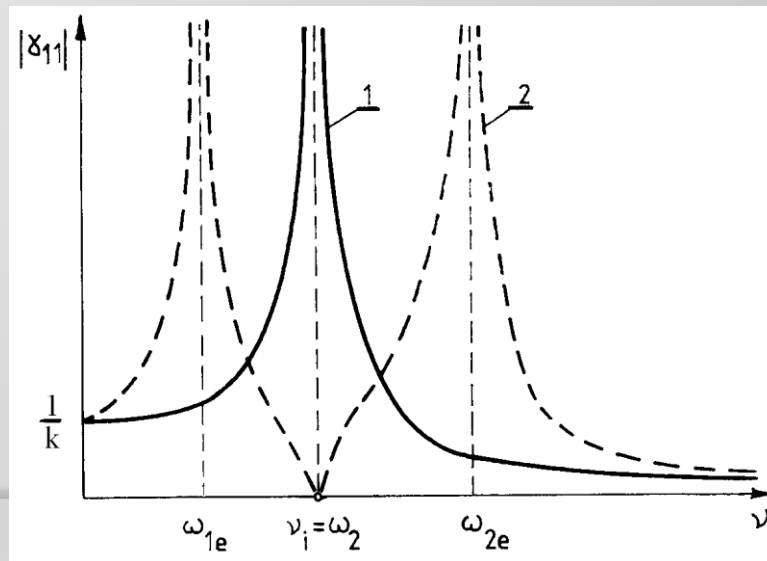
$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{k \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}} = \sqrt{k \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}$$

Pierwszej częstości $\omega_1 = 0$ odpowiada zgodny ruch obu mas w tym samym kierunku, drugiej częstości odpowiada ruch mas w przeciwnych kierunkach.

Rezonans wymuszenia o częstości ν_i może wystąpić przy drugiej częstości własnej ω_2 , dlatego założmy, że $\nu_i = \omega_2$. Z rozważań wynika, że podatność układu dąży do nieskończoności, co grozi całkowitym zniszczeniem układu (tzn. pęknięciem wału napędowego). Okazuje się, że można uniknąć tego przez zmianę struktury układu, tzn. dołączenie układu dodatkowego tzw. **nietłumionego eliminatora drgań**.

Założmy więc, że na wolnym końcu wału korbowego zainstalowany został eliminator drgań skrętnych w postaci elementu masowego o momencie bezwładności J_e i elementu bezmasowego o współczynniku sztywności k_e w sposób pokazany na rysunku. Przyjmijmy ponadto, że częstość drgań własnych podukładu eliminatora jest równa częstości ν_i wymuszenia.

Charakterystyki częstościowe układu pierwotnego i z eliminatorem przedstawiono na rysunku.



Tłumiki i eliminatory drgań - s.122

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k_e}{J_e}} = v_i$$

$$\phi_{ea} = \frac{M_{ia}}{J_e v_i^2} \leq \phi_{eadop}$$

$$\sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = v_i \quad x_{ea} = \frac{F_{ia}}{m_e v_i^2} \leq x_{eadop}$$

Równania te stanowią kryteria doboru dynamicznego nietłumionego eliminatora drgań

Jego parametry tzn. minimalną wartość masy eliminatora oraz współczynnik sztywności wyliczymy z równań:

$$J_e \geq \frac{M_{ia}}{v_i^2 \phi_{eadop}}$$

$$k_e = J_e v_i^2 \geq \frac{M_{ia}}{\phi_{eadop}}$$

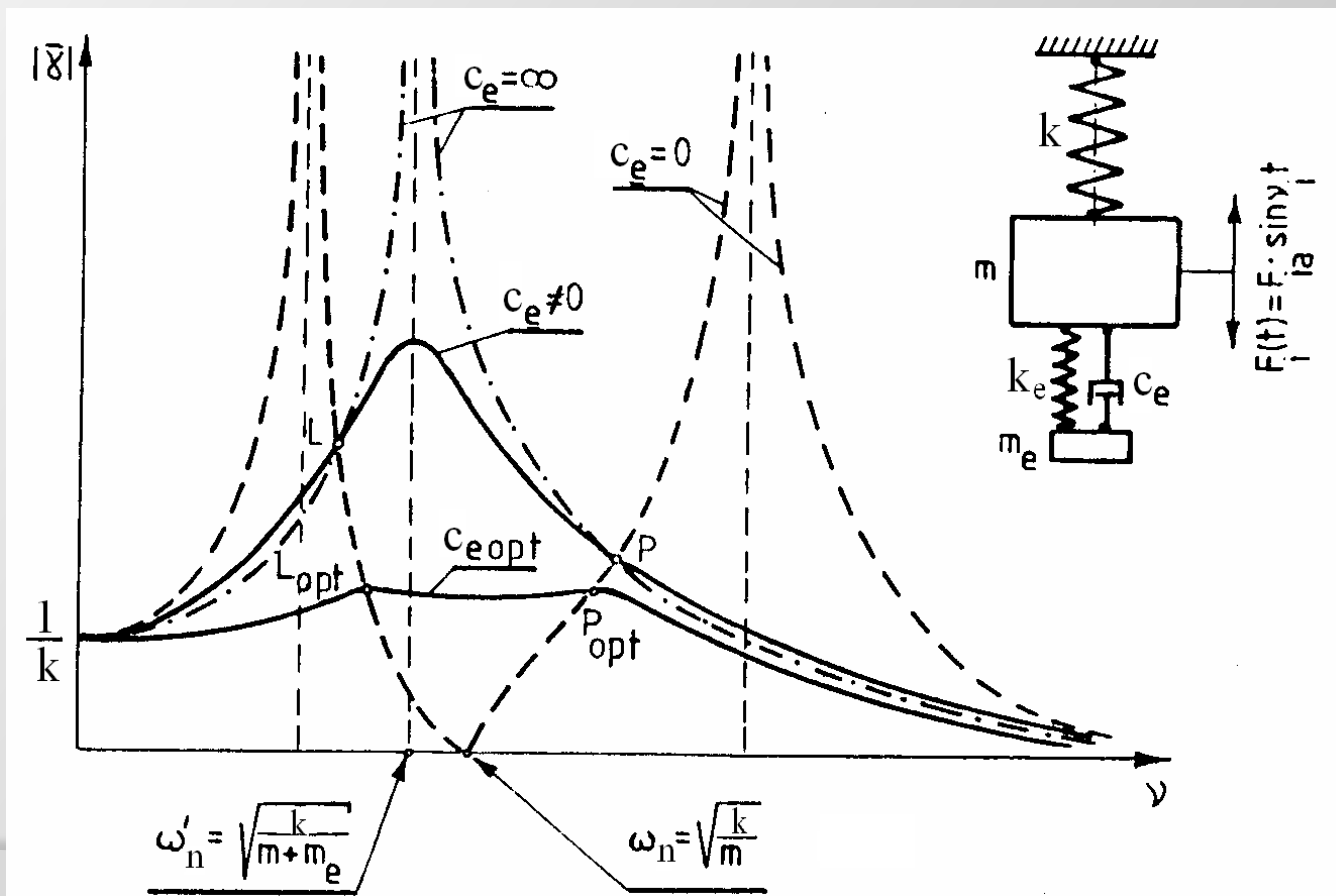
$$m_e \geq \frac{F_{ia}}{v_i^2 x_{eadop}}; \quad k_e \geq \frac{F_{ia}}{x_{eadop}}$$

W rzeczywistych układach częstość v_i siły wymuszającej nie jest zazwyczaj stała, lecz zmienia się w pewnych granicach. W związku z tym amplituda drgań układu podstawowego jest różna od zera. Dowodzi się, że jest ona tym mniejsza, im większe jest rozsuniecie częstości ω_{1e} i ω_{2e} układu z eliminatorem, co osiąga się przez zwiększenie masy eliminatora J_e . Z praktycznych jednak względów masa eliminatora nie przekracza zazwyczaj 10÷12% masy układu podstawowego. Rozsuniecie częstości nie jest wówczas niestety duże i amplituda drgań układu podstawowego jest znaczna. Ponadto ograniczona wytrzymałość zmęczeniowa łącznika sprężystego eliminatora powoduje szybkie zniszczenie zmęczeniowe eliminatora. W praktyce więc w dużych i ważnych układach stosuje się zamiast eliminatora **tłumiki drgań**.

Przedstawiony eliminator minimalizuje drgania skrętne, np. układów napędowych o dużym obrotowym. W sposób analogiczny są one budowane dla drgań podłużnych.

Tłumione eliminatory drgań

W celu zwiększenia skuteczności eliminatora nietłumionego przy występujących w praktyce znacznych wahaniach częstości ν_i wymuszenia stosuje się eliminatory tłumione zwane tłumikami drgań. Schemat takiego eliminatora tłumionego dla drgań podłużnych oraz wykres podatności masy głównej układu przedstawiono na rysunku.



Wykres podatności przedstawiono na tle wykresów podatności odpowiadających granicznym wartościom tłumienia. Dla współczynnika oporu $c_e=0$ układ jest eliminatorem nietłumionym. Dla $c_e = \infty$ masa eliminatora m_e jest jak gdyby połączona z masą główną m . Częstość drgań własnych $\omega'_o = \sqrt{k/(m+m_e)}$ jest wówczas oczywiście mniejsza od częstości własnej $\omega_o = \sqrt{k/m}$ układu podstawowego. Okazuje się, że przez punkty wspólne L i P obu wykresów przechodzą wszystkie inne krzywe podatności masy m układu podstawowego wyznaczone dla różnych od zera wartości tłumienia $c_e \neq 0$.

Dobierając odpowiednie wartości masy i sztywności eliminatora (m_{eopt}, k_{eopt}) oraz odpowiedni współczynnik oporu wiskotycznego c_{eopt} można otrzymać optymalny eliminator tłumiony. Podatność masy głównej układu osiąga wówczas w punktach L_{opt} i P_{opt} jednakowe i zarazem największe wartości, a jednocześnie najniższe wśród wszystkich ekstremalnych wartości podatności wyznaczonych dla innych od optymalnych wartości parametrów: m_e, k_e, c_e eliminatora. Wartości optymalne wyznacza się wg wzorów:

$$\frac{\omega_{ne}}{\omega_n} = \frac{\sqrt{\frac{k_{eopt}}{m_{eopt}}}}{\sqrt{k/m}} = \frac{1}{1 + \eta_{opt}}; \quad \frac{c_e}{c_{ekr}} = \xi_{eopt} = \sqrt{\frac{3 \eta_{opt}}{8(1 + \eta_{opt})^3}} \quad \eta_{opt} = \frac{m_{eopt}}{m}$$

ξ_{eopt} – optymalna wartość względna tłumienia wiskotycznego eliminatora.

Niewielkie drgania masy głównej m w całym zakresie częstości są możliwe przy jednocześnie dużych wychyleniach masy m_e eliminatora. Zaprojektowanie i wykonanie sprężyny eliminatora o odpowiednio dużej wytrzymałości doraźnej i zmęczeniowej jest zazwyczaj bardzo trudne a nawet niemożliwe. Z tego względu stosuje się, o czym wcześniej wspomniano, mniej skuteczne, ale łatwiejsze w wykonaniu i eksploatacji tłumiki drgań.

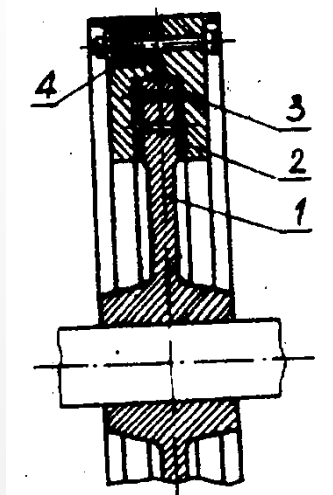
Obok eliminatorów drgań w celu zmniejszenia amplitudy drgań skrętnych wałów stosuje się często tłumiki drgań, w których wskutek występowania dodatkowych oporów tarcia następuje rozpraszanie energii.

Są to tłumiki z tarciem **suchym** i **lepkim** (wiskotycznym).

W tłumikach tego rodzaju występuje zawsze pewna masa swobodna o stosunkowo dużym masowym momencie bezwładności (momencie zamachowym) oraz tarcza lub inny element konstrukcyjny osadzony na wale, który jest poddany drganiom skrętnym. Między tarczą przejmującą drgania skrętne wału a swobodną masą zamachową występuje tarcie. Dzięki temu siły tarcia powstające podczas względnych ruchów drgających tarczy względem poruszającej się ze stałą prędkością obrotową masą zamachową, przeciwstawiają się ruchom drgającym i je ograniczają, czyli tłumią drgania skrętne wału.

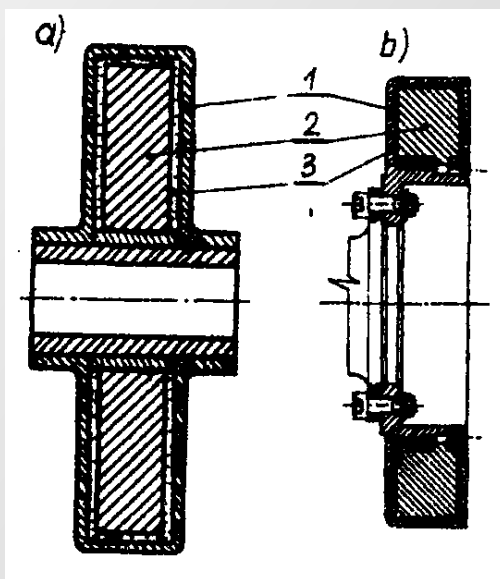
W tłumiku drgań skrętnych typu Lanchestera stosuje się tarcie suche natomiast w tłumiku typu Houde'a stosuje się tarcie lepkie (wiskotyczne).

tłumik typu Lanchestera z tarciami suchymi



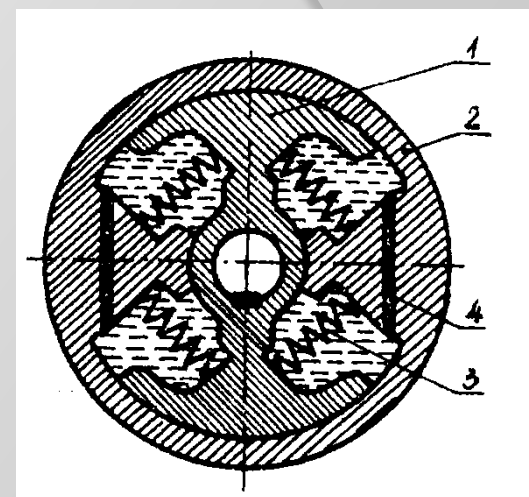
- 1) tarcza;
- 2) okładziny cierne;
- 3) pierścienie (swobodna masa zamachowa);
- 4) sprężyny dociskowe

tłumik typu Houd'a z tarciami lepkim



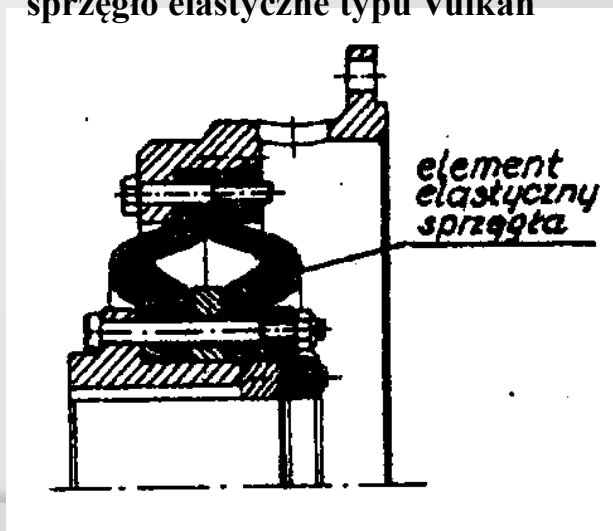
- 1) obudowa;
- 2) pierścień (swobodna masa zamachowa);
- 3) olej silikonowy;

tłumik drgań skrętnych - mieszany

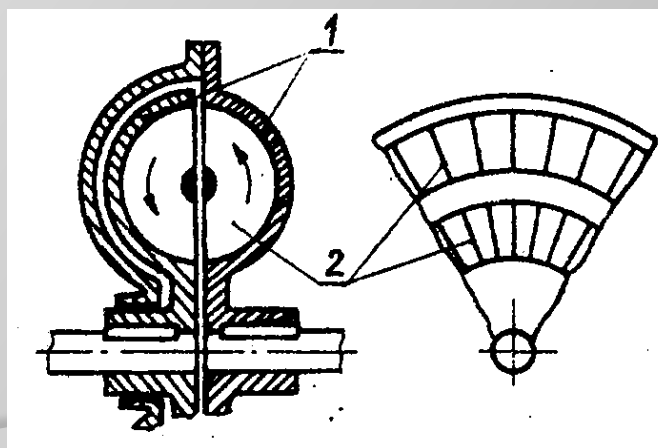


- 1) korpus wewnętrzny;
- 2) korpus zewnętrzny;
- 3) sprężyny;
- 4) kanaliki;

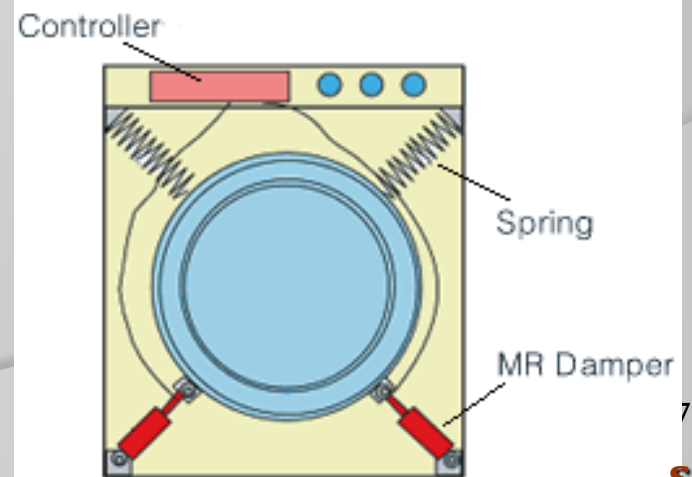
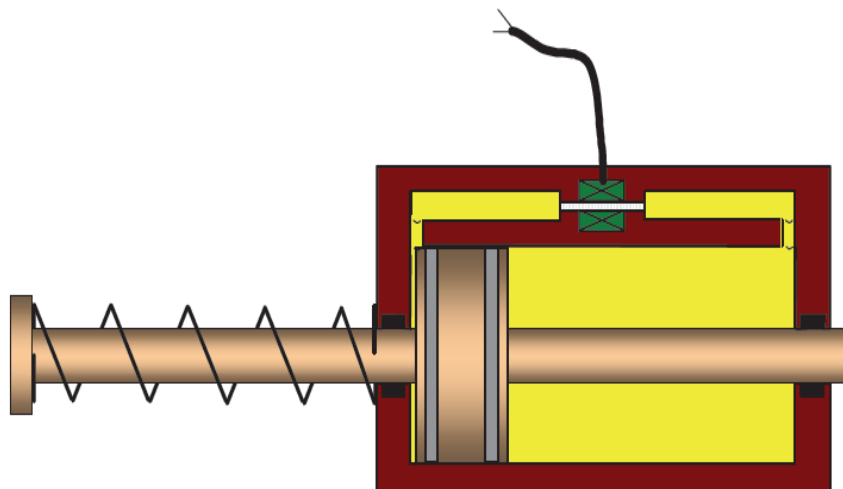
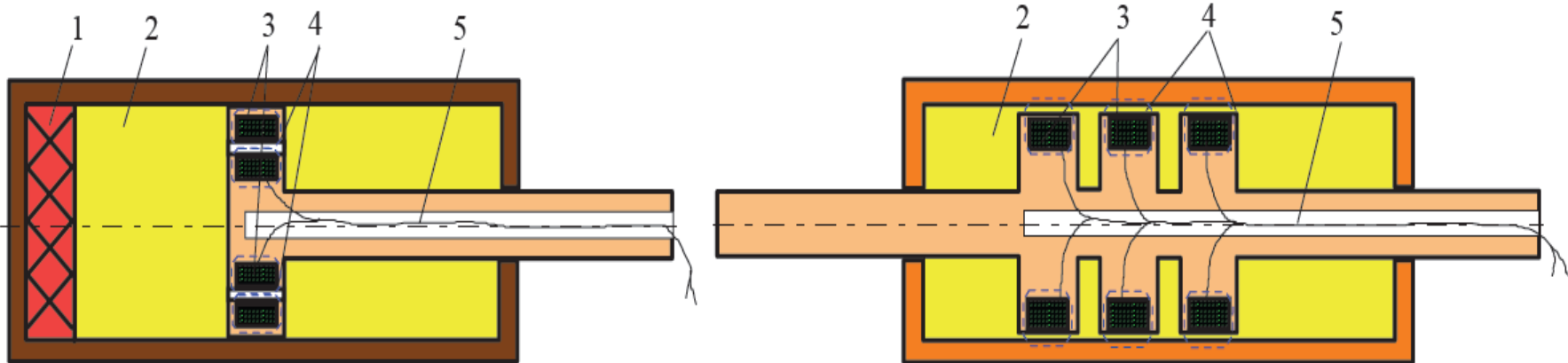
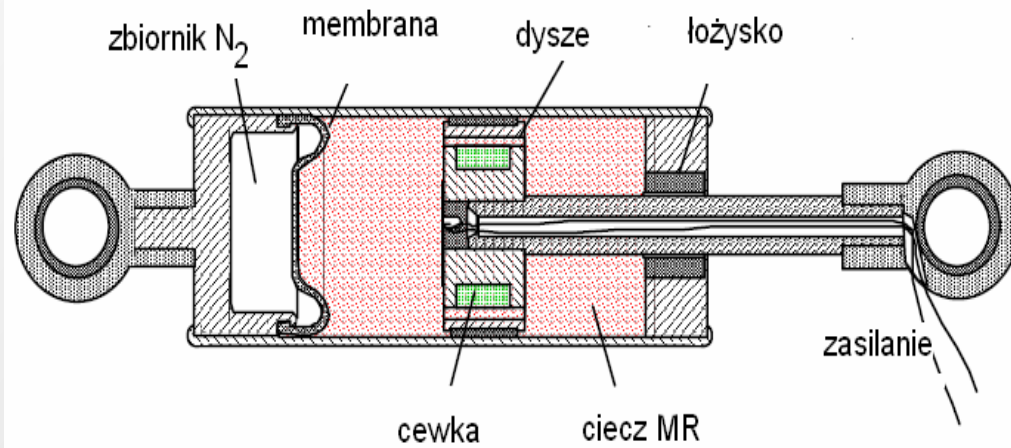
sprzęgło elastyczne typu Vulkan



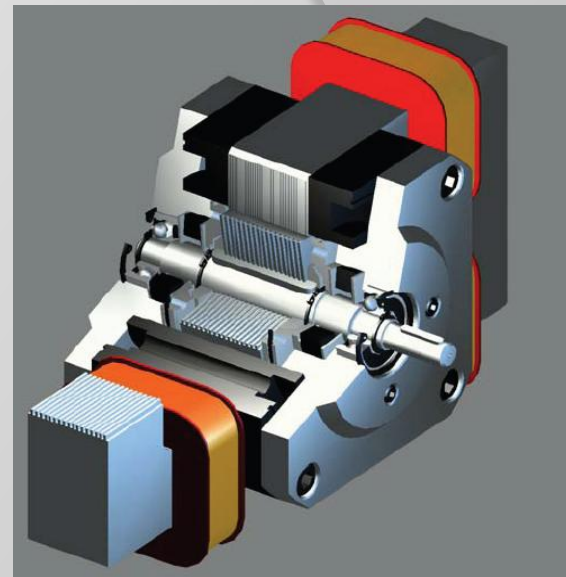
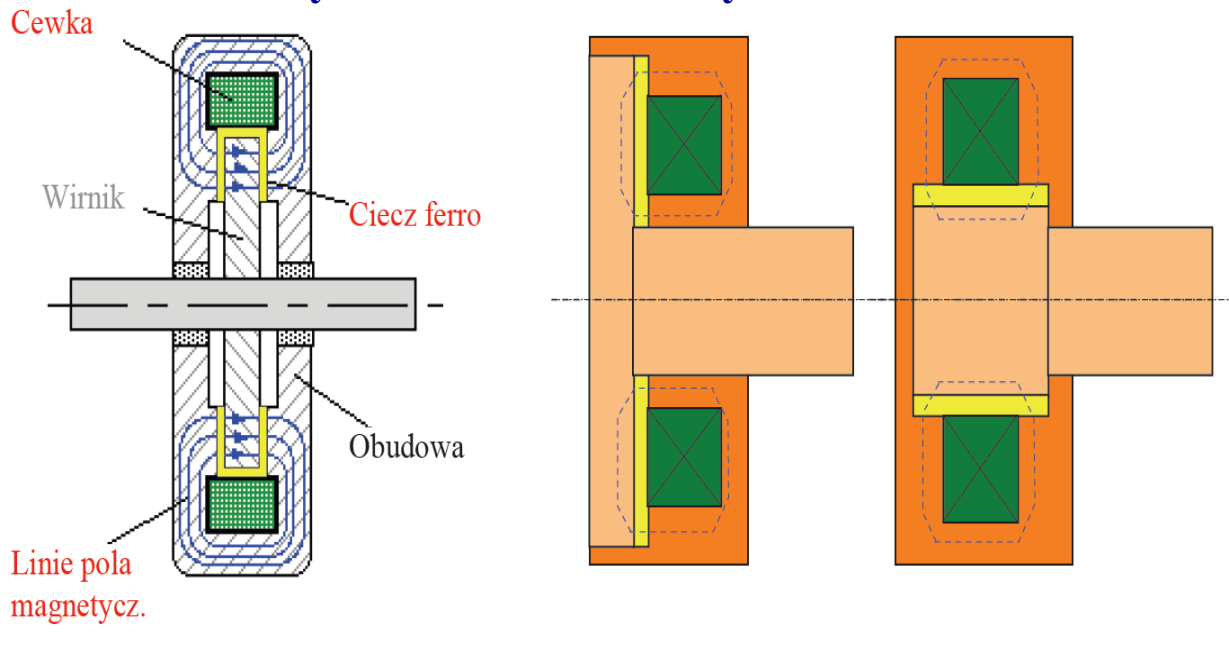
sprzęgło hydrokinetyczne



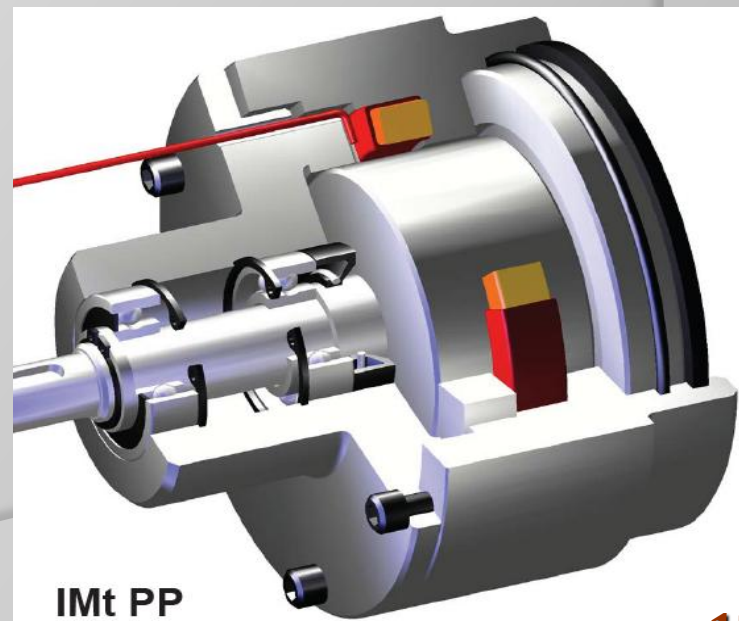
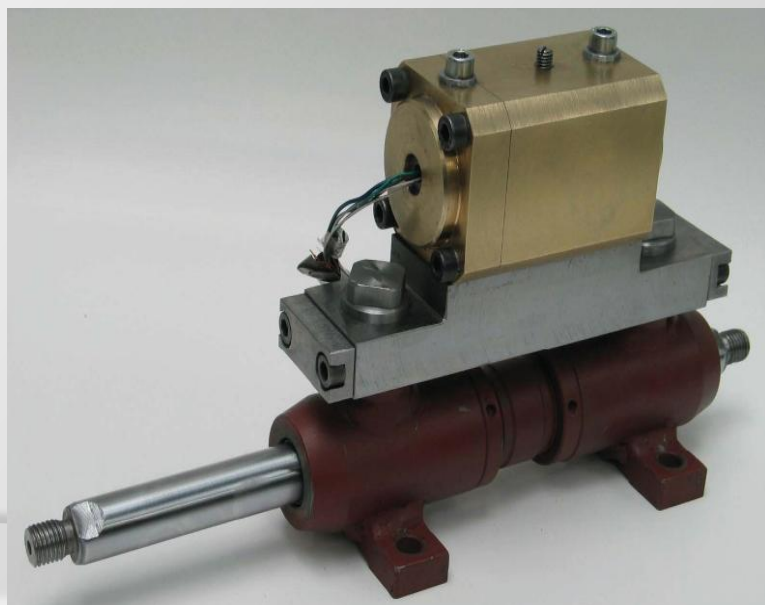
- 1) korpusy napędzający i napędzany;
- 2) ścianki promieniowe tworzące komory;

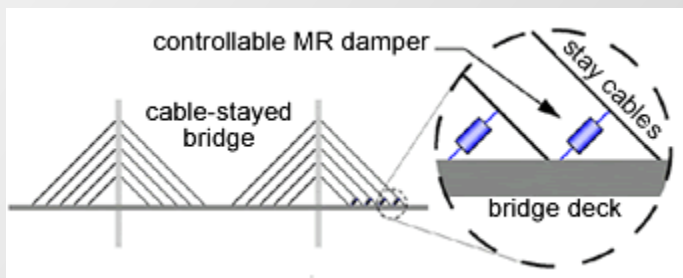


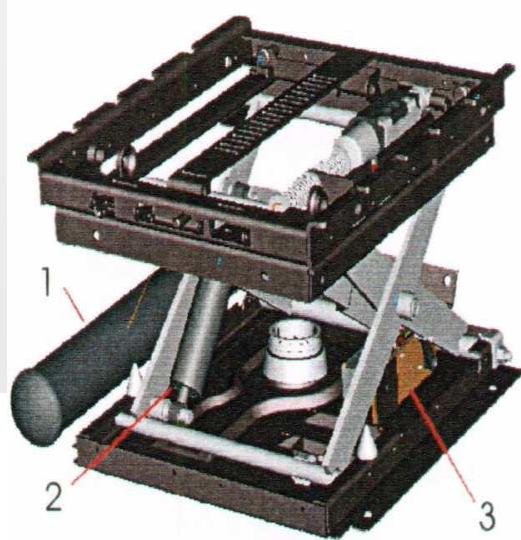
Warianty tłumików obrotowych



pochłaniacz energii zderzenia

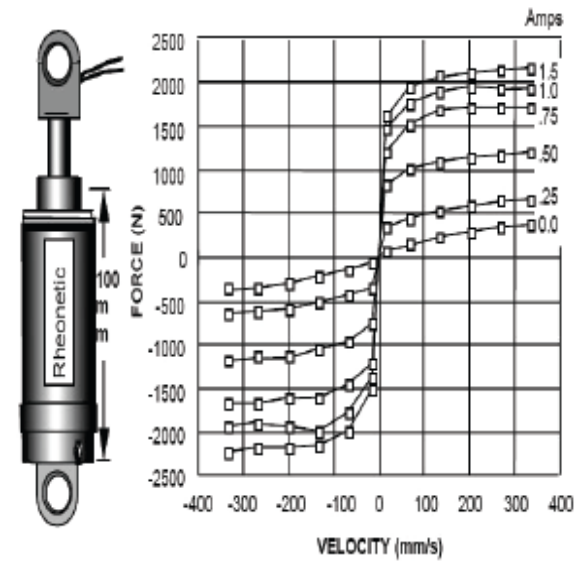
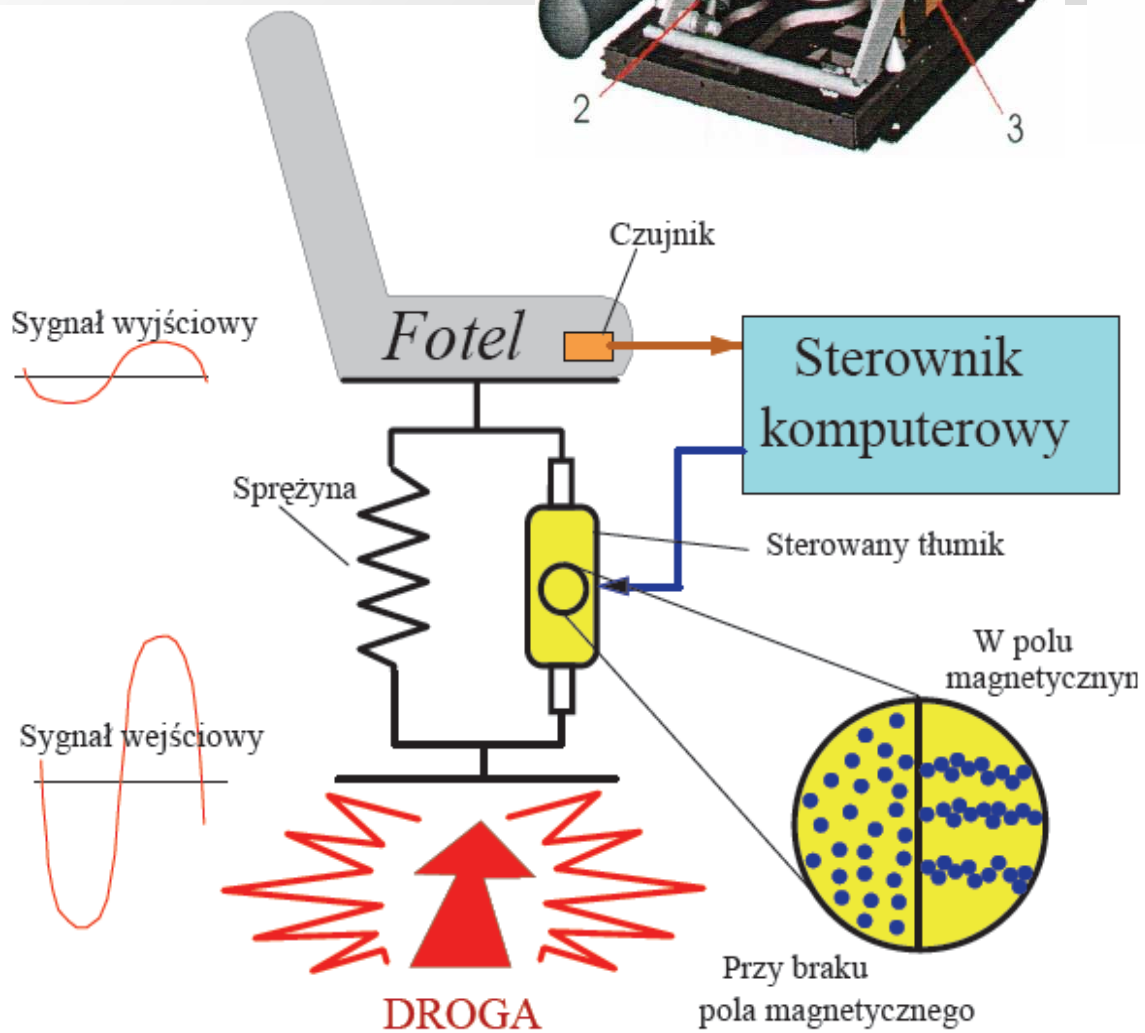




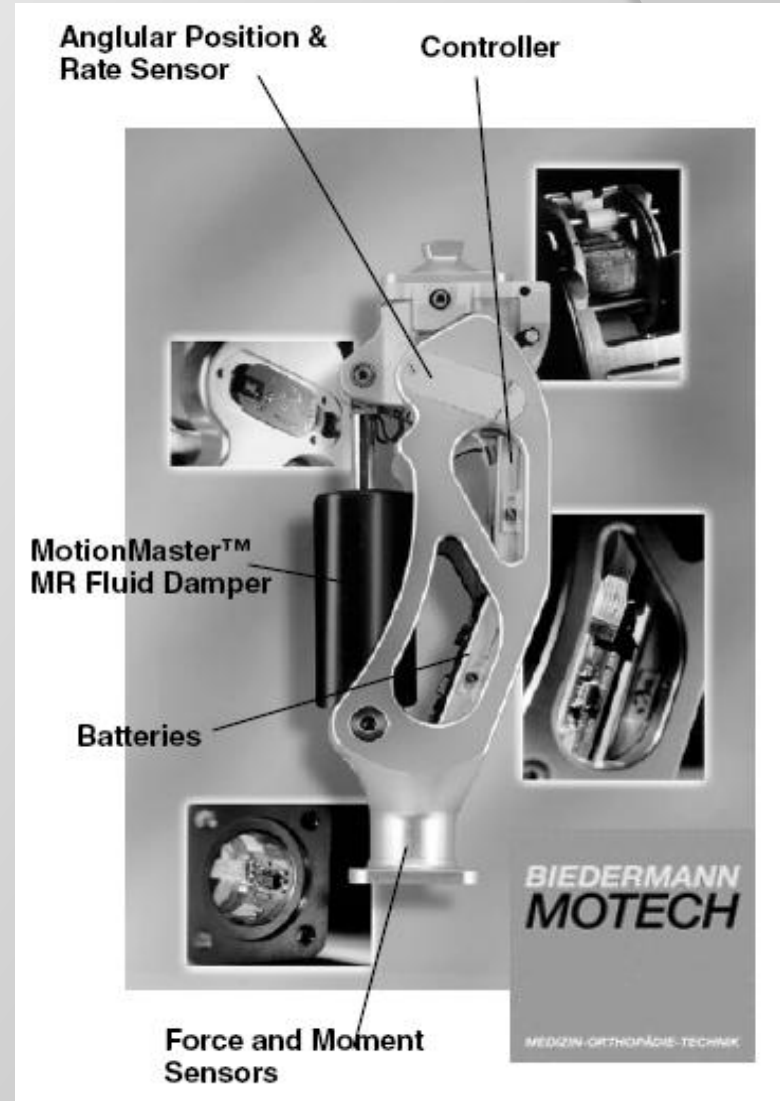
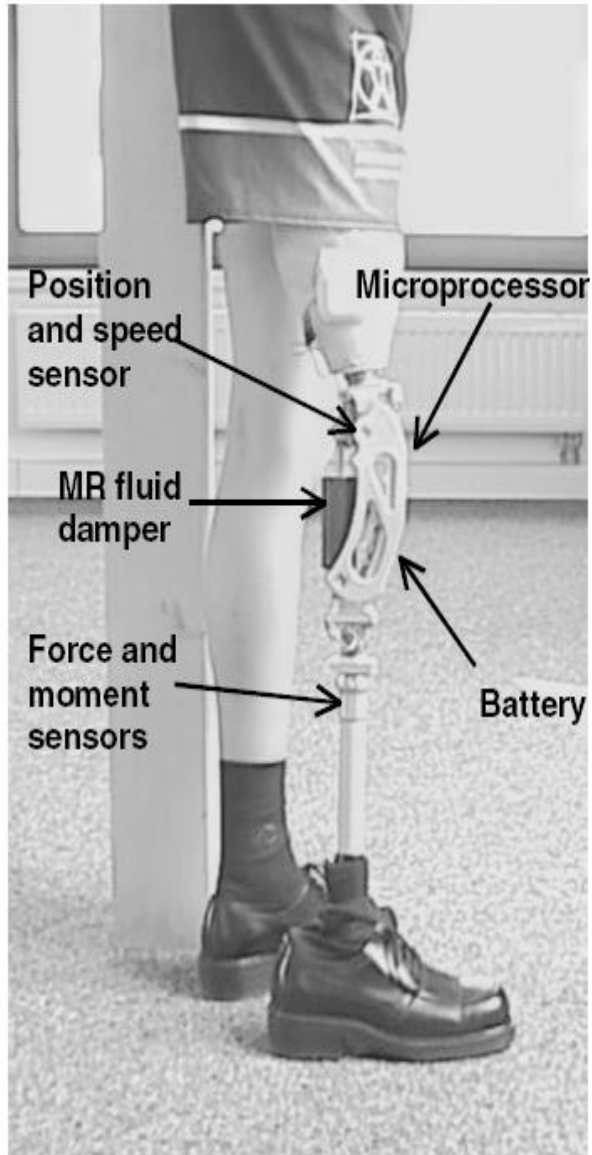


poduszka powietrzna

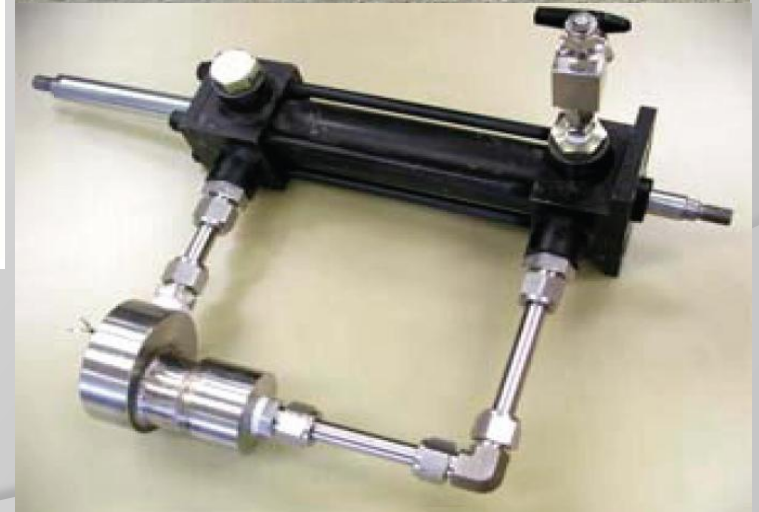
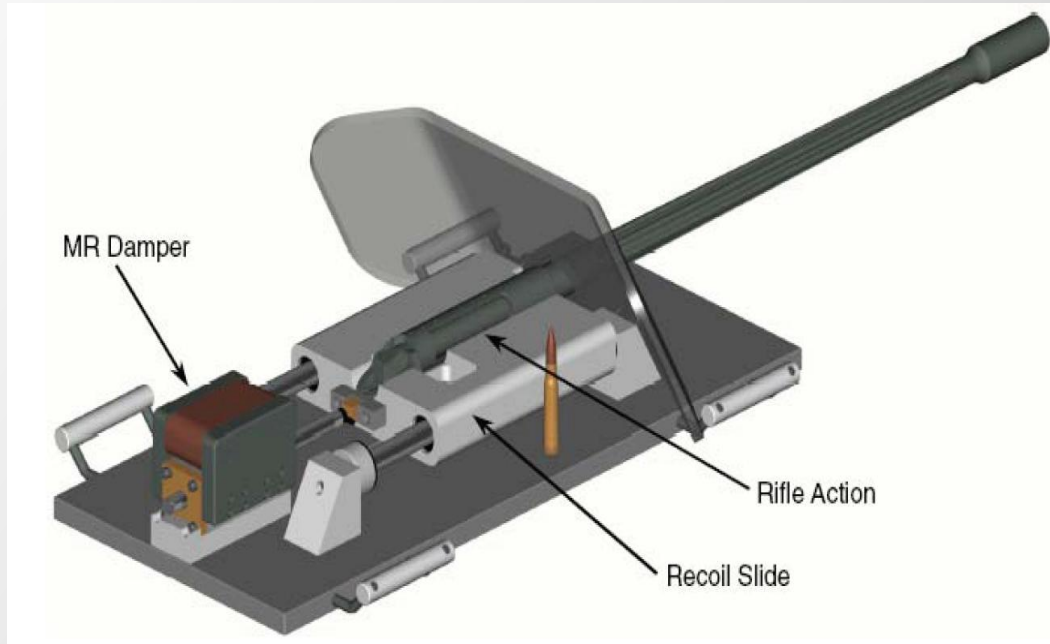
tłumik MR

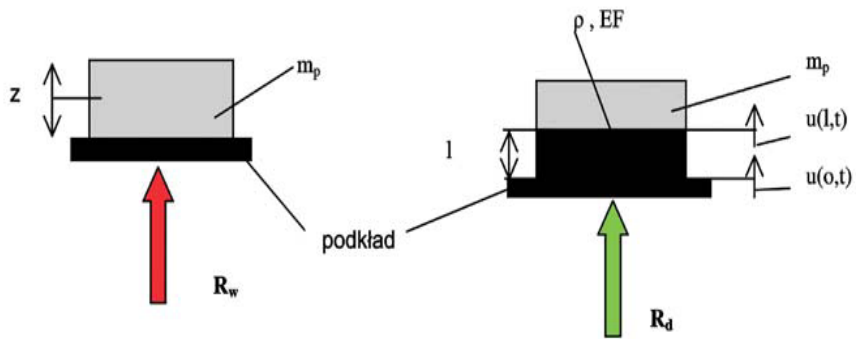
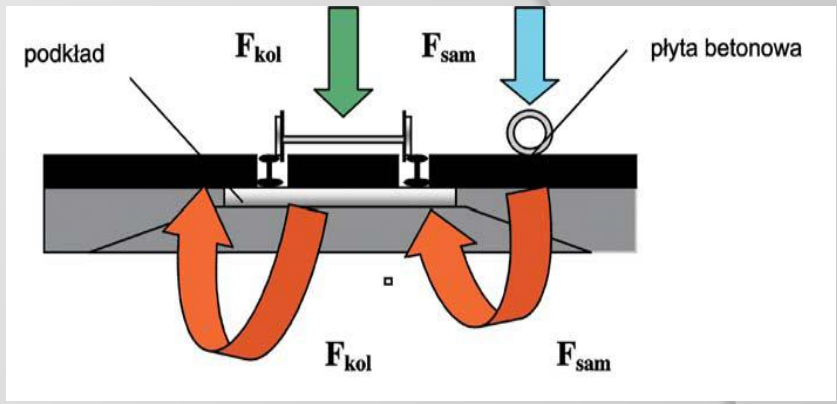
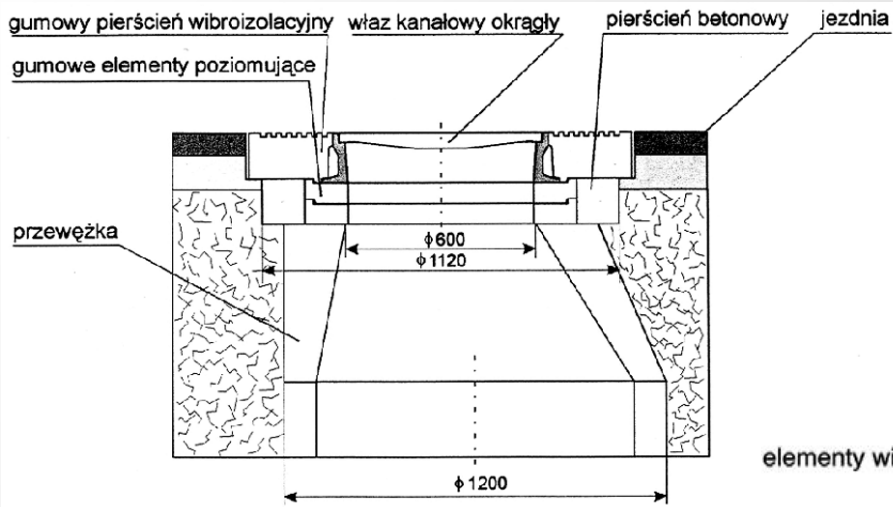


Amortyzator w protezach

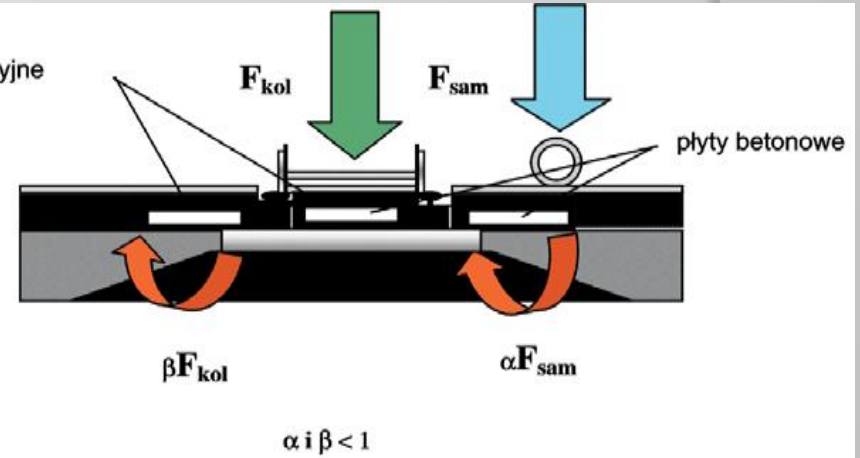


Tłumiki w działku i pojazdach wojskowych



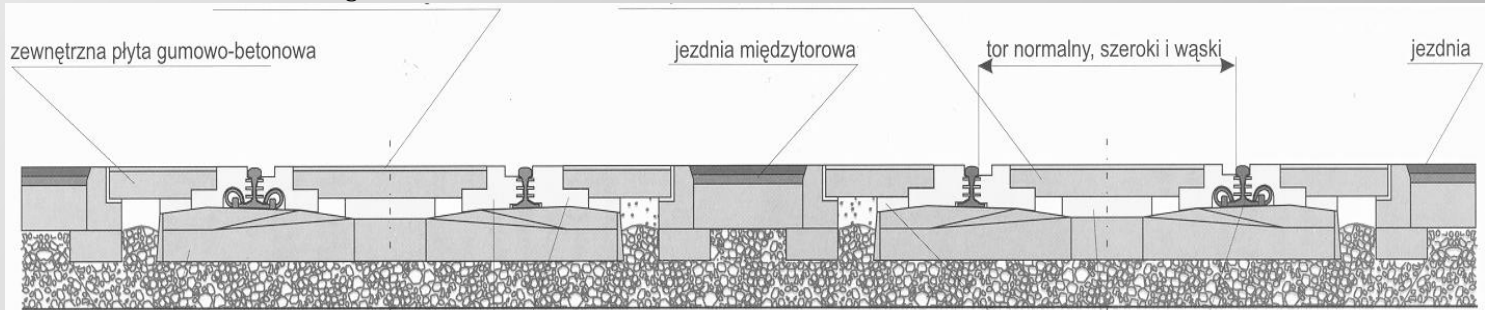


elementy wibroizolacyjne



karbowana nawierzchnia gumowa

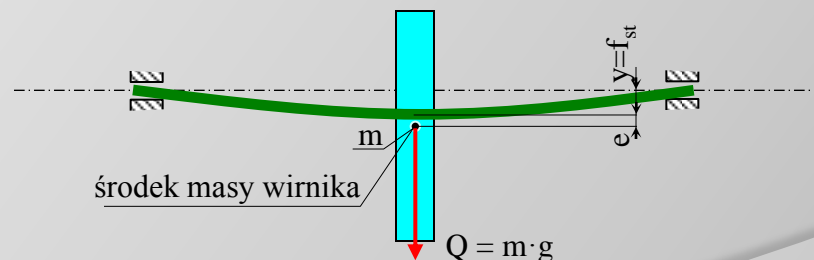
wewnętrzna płyta gumowo-betonowa



Drgania giętne układów o skończonej liczbie stopni swobody. Elementy modelowania i dynamiki maszyn wirnikowych. Prędkości krytyczne.

★Drgania giętne wałów i wirników

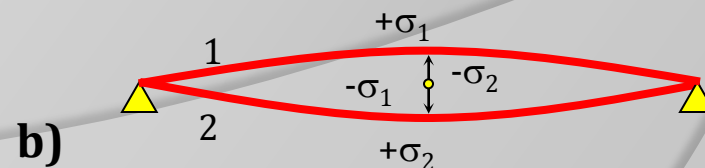
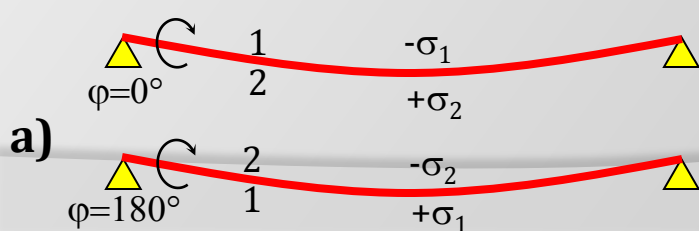
Ważnym zagadnieniem technicznym, związanym z eksploatacją maszyn wirnikowych (turbin, maszyn elektrycznych, pomp i sprężarek wirnikowych, wentylatorów, wirówek itp.) oraz okrętowych wałów napędowych, są drgania giętne wałów i wirników wywołane ich ruchem obrotowym. Źródłem wymuszeń drgań giętnych wałów i wirników jest występowanie nieuniknionego z powodu niejednorodności materiału, niedokładności wykonawczych obróbczych i montażowych, czasami z potrzeb konstrukcyjnych - pewnego, choćby szczątkowego niewyważenia. Polega ono na położeniu środka masy wirnika (wału) w pewnej odległości e zwanej mimośrodem, od osi obrotu jako osi geometrycznej wirnika.



Rys.1. Schemat wirnika z mimośrodowym położeniem środka masy

Na rys.1 jest pokazany schemat wirnika złożonego z jednej tarczy wirnikowej zamocowanej na sprężystym wale łożyskowanym na obu końcach. Masa m jest masą wirnika. Jednakże często jest to masa samej tarczy, gdyż wał przyjmuje się jako nieważki (ma małą masę w porównaniu z masą tarczy wirnikowej). Jeżeli wał jest poziomy, co występuje najczęściej, to w stanie początkowym pod statycznym działaniem ciężaru własnego Q wirnika ugnie się, przez co oś obrotu traczy wirnikowej, jako podstawowej masy wirnika, zostaje przesunięta na odległość $y=f_{st}$ od osi łączącej łożyska wału, zaś środek masy wirnika znajduje się w odległości $(e+y)$ od tej osi.

Podczas każdego obrotu ugiętego wału wirnika we włóknach 1 po wklęsłej stronie wału występuje ich **ściskanie** $-\sigma_1$ a we włóknach 2 po wypukłej stronie - **rozciąganie** $+\sigma_2$ (rys.2a dla $\varphi=0^\circ$). Po wykonaniu połowy obrotu sytuacja jest odwrotna - we włóknach 1 znajdujących się teraz po wypukłej stronie występuje ich rozciąganie $+\sigma_1$ a we włóknach 2 ściskanie $-\sigma_2$ (rys.2a dla $\varphi=180^\circ$). Po wykonaniu następnej połowy obrotu rozkład naprężeń we włóknach wału powraca do stanu początkowego. Taka przemienność rozkładu naprężeń powtarza się cyklicznie podczas każdego obrotu wału. Taka sama cykliczna przemienność naprężeń w skrajnych włóknach wału występuje również podczas drgań giętkich (poprzecznych) wału (rys.2b). Dlatego każdy obrót wału (wirnika) jest pewnego rodzaju wymuszeniem drgań giętkich wału (wirnika).



Z praktyki eksploatacyjnej wiadomo, że po rozruchu wirnika w miarę wzrostu prędkości obrotowej n [obr/min] zaczyna on drgać, a przy pewnej prędkości obrotowej nazywanej krytyczną prędkością obrotową n_{kr} drgania są najsilniejsze, rezonansowe. Stają się one wówczas niebezpieczne dla wirnika (wału), jego łożysk i całego urządzenia, w skład którego on wchodzi, a eksploatacja urządzenia w tych warunkach jest niedopuszczalna. Dopiero przy dalszym wzroście prędkości obrotowej $n > n_{kr}$ drgania wirnika i całego urządzenia maleją, a następnie zanikają prawie zupełnie i praca urządzenia staje się stabilna.

Drgania giętkie wirnika (wału) podczas ruchu obrotowego są wymuszone siłą dynamiczną niewyważonej masy, czyli siłą odśrodkową pochodzącą od mimośrodowego położenia środka masy. Jeżeli wirnik (wał) jest nawet doskonale wyważony ($e=0$), to każdy przypadkowy impuls poprzeczny, łatwo powstający podczas rozruchu, spowoduje ugięcie wału i przemieszczenie środka masy poza oś obrotu, a w konsekwencji powstanie siły odśrodkowej (od wirującej masy) wymuszającej drgania poprzeczne wirnika (wału).

Do dalszych rozważań nad drganiami giętkimi wałów i wirników, w celu wyeliminowania wpływu sił ciężkości na stan równowagi dynamicznej sił działających na wirujący wirnik, jak również w celu usunięcia początkowego statycznego ugięcia wału pod działaniem ciężaru własnego wirnika, wygodnie jest przyjąć wirnik złożony jak poprzednio z tarczy wirnikowej osadzonej na sprężystym wale o osi pionowej, najczęściej w połowie jego długości (rys.3a). Przyjęto podatne łożyska wału, co umożliwia jego swobodne ugięcia. Wyniki rozważań i analiz przeprowadzonych dla takiego wirnika są również ważne w przypadku wirnika o osi poziomej.

★ Wyznaczenie krytycznej prędkości obrotowej wirnika

Do rozważań przyjęto model wirnika przedstawiony na rys. 3a o masie m z mimośrodowością e położenia środka masy w stosunku do osi wału. Z chwilą nadania wirnikowi ruchu obrotowego z prędkością kątową ω , powstaje siła odśrodkowa $m \cdot e \cdot \omega^2$ wirująca wraz z wirnikiem, powodująca ugięcie y wału (rys.3b).

W wyniku ugięcia wału zwiększy się odległość środka masy m od osi obrotu do wartości $(y+e)$, przez co siła odśrodkowa osiągnie wartość $C=m(y+e)\omega^2$.

Z chwilą powstania ugięcia y wału, w wale wytwarza się napięcie sprężyste:

$$S = k \cdot y \quad k - \text{sztywność wału}$$

Przy odpowiednim ugięciu wału zachodzi równowaga dynamiczna między obu siłami:

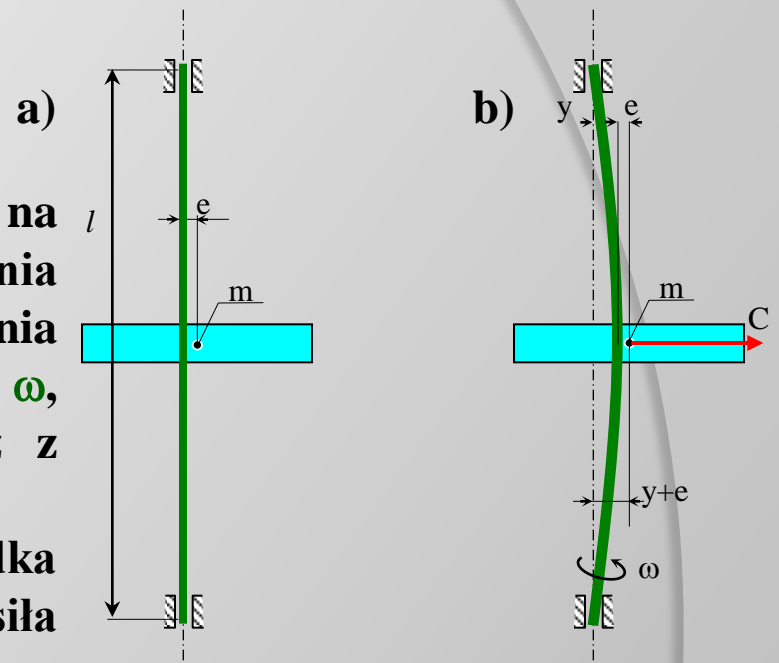
$$C = S,$$

$$m(y + e) \omega^2 = k \cdot y \tag{1}$$

Sztywność wału dla rozpatrywanego modelu wirnika (tarcza wirnikowa zamocowana w połowie długości wału) wynosi:

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

EI [Nm²] - sztywność wału na zginanie; l [m] - długość wału (odległość między łożyskami).



Sztywność k wału można również przedstawić w postaci ogólnej, niezależnej od typu wirnika jednotarczowego:

$$k = \frac{Q}{f_{st}} = \frac{m \cdot g}{f_{st}} \quad (2)$$

gdzie: $Q = m \cdot g$ [N] - ciężar wirnika, m [kg] - masa wirnika; g [m/s²] - przyspieszenie ziemskie, f_{st} [m] - statyczne ugięcie wirnika pod działaniem ciężaru własnego (przy poziomym położeniu wału, jak na rys. 1).

Z równania (1) wyznacza się wartość ugięcia y przy której zachodzi równowaga dynamiczna siły $C=S$.

$$y = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{m}{k} \cdot \omega^2}{1 - \frac{m}{k} \omega^2} \cdot e \quad (3)$$

Z powyższego wzoru wynika, że dla prędkości kątowej $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ugięcie wału osiąga wartość $y = \infty$, czyli, że jest to krytyczna wartość prędkości kątowej wirnika

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4a)$$

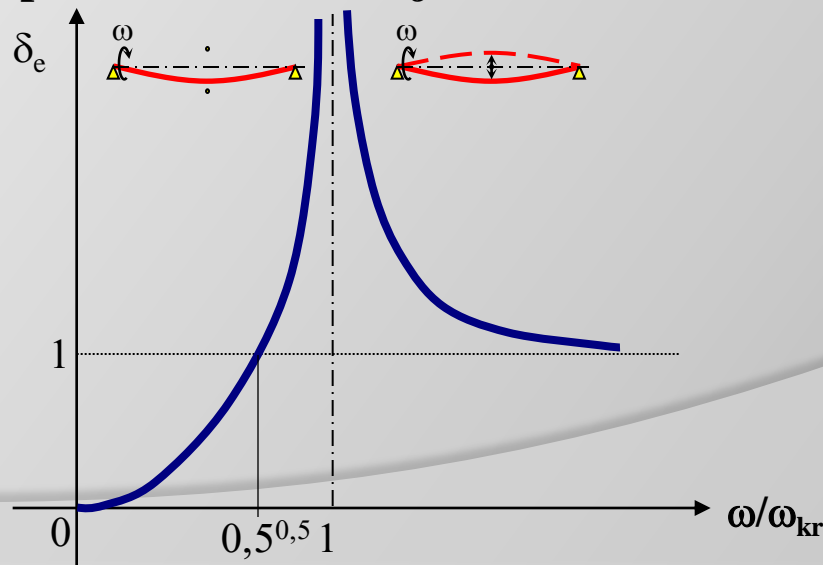
przy której następuje rezonans wymuszeń wywołanych obrotami wirnika i częstości drgań własnych ω_n wirnika traktowanego jako układ o jednym stopniu swobody drgań:

$$\omega_n \equiv \omega_{kr} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4b)$$

Wzór (3) praktyczniej jest przedstawić w postaci bezwymiarowej wyznaczając stosunek $\delta_e = y/e$ określający wielkość ugięcia wału w porównaniu z mimośrodowością środka masy. Jest to wielkość analogiczna do współczynnika δ_a zwiększenia amplitudy drgań wymuszonych o jednym stopniu swobody drgań. Współczynnik δ_e jest czasami nazywany współczynnikiem narastania drgań. Uwzględniając zależność (4) uzyskuje się ze wzoru (3) postać bezwymiarową:

$$\delta_e = \frac{y}{e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_{kr}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{kr}}\right)^2} \quad (5)$$

Zmienność wartości współczynnika δ_e w zależności od stosunku prędkości kątowych ω/ω_{kr} , względnie prędkości obrotowych n/n_{kr} , przedstawiamy w postaci wykresu na rys.4, przy czym dla zakresu wartości $\omega/\omega_{kr} > 1$ ujemną gałąź wykresu naniesiono po stronie dodatniej.



rys.4

Z wykresu na rys.4 wynika, że dla $\omega = 0$ ($\omega/\omega_{kr} = 0$) jest $\delta_e = 0$ czyli również $y = 0$, co oznacza, że nie ma ugięcia wału. W przedziale **podrezonansowym** dla wartości $0 < \omega < \omega_{kr}$; $0 < \omega/\omega_{kr} < 1$ ugięcie y wału początkowo bardzo wolno wzrasta, zaś dla wartości $\omega = 0,5^{0,5}\omega_{kr}$ jest równe mimośrodowości e położenia środka masy. Następnie szybko wzrasta osiągając dla prędkości krytycznej $\omega = \omega_{kr}$ wartość ∞ .

Po przekroczeniu rezonansu, czyli w przedziale **nadrezonansowym**, dla $\omega > \omega_{kr}$ ugięcie wału szybko maleje i dla dużych prędkości $\omega \gg \omega_{kr}$ asymptotycznie zbliża się do wartości równej mimośrodowości $y = e$.

Taki przebieg zmienności współczynnika δ_e wskazuje na występowanie odmiennych postaci obracającego się wału w przedziale pod- i nadrezonansowym. W przedziale podrezonansowym środek masy wirnika obraca się dookoła osi wału również wówczas, gdy jest ona ugięta pod działaniem ciężaru własnego wirnika przy poziomym położeniu wału (co pokazano schematycznie na rys.4, w lewym górnym rogu). Natomiast w przedziale nadrezonansowym środek masy wirnika zbliża się do osi obrotu wirnika (do linii łączącej łożyska) i wówczas wirnik mając ugiętą oś wału w takiej postaci obraca się dookoła środka masy. Jest to pokazane schematycznie na rys.4 z prawej strony u góry. Taki układ wirnika sprzyja, stabilności jego pracy.

Wykorzystując zależność między prędkością kątową i obrotową wzór na prędkość krytyczną można zapisać w postaci:

$$n_{kr} \approx 300 \sqrt{\frac{1}{f_{st} [cm]}} [obr / min]$$

Zależność powyższa to wzór Föppla służący do obliczania krytycznej prędkości obrotowej. Wzór daje wynik przybliżony, ale dostatecznie dokładny dla potrzeb eksploatacyjnych.

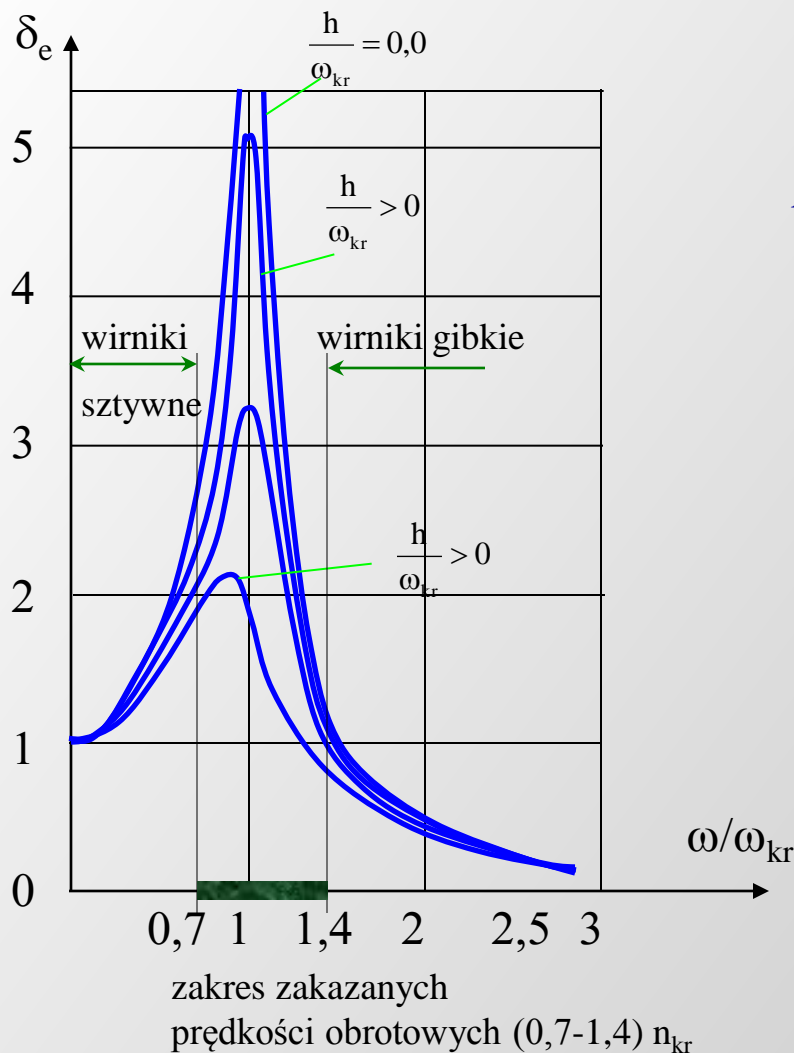
Przeprowadzone rozważania dotyczące współczynnika δ_e zostały wykonane z pominięciem tłumienia drgań. W rzeczywistości jednak tłumienie występuje i wpływa przez to ograniczająco na amplitudę drgań giętnych wirnika (wału), również przy krytycznej prędkości obrotowej n .

W celu znalezienia wpływu tłumienia na amplitudę drgań giętnych wirnika (wału), wyznaczamy współczynnik δ_e :

$$\delta_e = \frac{y}{e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_{kr}}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{kr}}\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{kr}}\right)^2}} \quad (7)$$

Jego graficzne odwzorowanie jest przedstawione na rys.5

Jak widać z wykresów zmienności współczynnika δ_e w zależności od wartości stopnia tłumienia $\gamma = h/\omega_{kr}$ (rys.5), wpływ tłumienia na wartość amplitudy drgań giętnych wirnika (wału) w przedziale przyrezonansowym (krytycznym) jest znaczny. Amplituda drgań wzrasta wprawdzie silnie, ale dzięki tłumieniu tylko do wartości ograniczonych, co ma istotne znaczenie.



Dla zabezpieczenia urządzeń przed nadmiernymi drganiami wprowadza się zakres zakazanych prędkości obrotowych w przedziale $n_{zakaz} \sim (0,7 \div 1,4)n_{kr}$, w którym nie wolno eksploatować urządzenia w sposób ciągły, a jedynie w sposób krótkotrwały, np. przy rozruchu i zatrzymaniu urządzenia, podczas przejścia od podrezonansowych prędkości obrotowych ($n < 0,7n_{kr}$) do nadrezonansowych ($n > 1,4n_{kr}$) i odwrotnie. Granice przedziału $0,7 \div 1,4$ należy traktować jako zalecenie i w zależności od rodzaju i ważności eksploatowanego urządzenia mogą być zawężone, nie bardziej jednak niż do wartości $\sim (0,85 \div 1,25)$. Dla zapewnienia bezpieczeństwa urządzenia przed nadmiernymi drganiami, podczas pracy w przyrezonansowym przedziale prędkości obrotowych konstruuje się wirniki dostatecznie sztywne. Dla warunku $n_{eksp} < 0,7 n_{kr}$ wirniki nazywa się wirnikami sztywnymi.

Na przykład, dla głównych turbin okrętowych stosuje się zasadę projektowania wirników sztywnych. Są one wprawdzie cięższe, ale bezpieczne w eksploatacji.

W wielu urządzeniach, zwłaszcza pomocniczych oraz lądowych, przewiduje się pracę urządzenia w przedziale nadrezonansowym. Takie wirniki, dla których zachodzi $n_{\text{eksp}} > 1,4n_{\text{kr}}$ nazywa się wirnikami gibkimi albo giętkimi. Przy eksploatacji urządzenia z wirnikiem gibkim należy zwracać uwagę, aby przy rozruchu i zatrzymywaniu urządzenia możliwie szybko „przejsć” przez przyrezonansowy zakres zakazanych prędkości obrotowych, uniemożliwiając w ten sposób nadmierne rozedrganie się wirnika. Przy projektowaniu wirnika gibkiego należy również zapewnić nie tylko bezpieczne oddalenie od rezonansu przy częstości drgań własnych **rzędu pierwszego** (podstawowego), ale również od rezonansu przy częstości **rzędu drugiego**, czyli zapewnić, aby $1,4 n_{\text{kr1}} < n_{\text{eksp}} < 0,7 n_{\text{kr2}}$.

W przypadku okrętowych wałów napędowych, zwłaszcza przy dostatecznie dużych odległościach między łożyskami wału, prawie zawsze w zakresie eksploatacyjnych prędkości obrotowych występuje krytyczna prędkość obrotowa pierwszego rzędu, a czasami i drugiego rzędu. Należy wówczas tak ustalać umowne reżimy pracy silowni okrętowej, aby znalazły się one w bezpiecznej odległości od rezonansów, a przy zmianie prędkości pływania trzeba możliwie szybko przechodzić przez przyrezonansowe przedziały prędkości obrotowych wałów.

Wyważanie wirników

Wcześniej wskazano na niewyważenie jako na źródło drgań giętkich wirnika. Ze względu na szkodliwość drgań wirnika dla eksploatacji maszyny i na występujące wówczas dynamiczne obciążenie łożysk, drgania całej maszyny wraz z zamontowanym na niej oprzyrządowaniem oraz przenoszenie drgań poprzez fundament maszyny na otoczenie (w przypadku maszyny okrętowej na kadłub okrętu) należy dążyć do wyeliminowania niewyważenia wirnika. Tę czynność nazywa się **wyważaniem wirnika**, które polega na doprowadzeniu, możliwie najdokładniejszym, środka masy wirnika do jego osi obrotu.

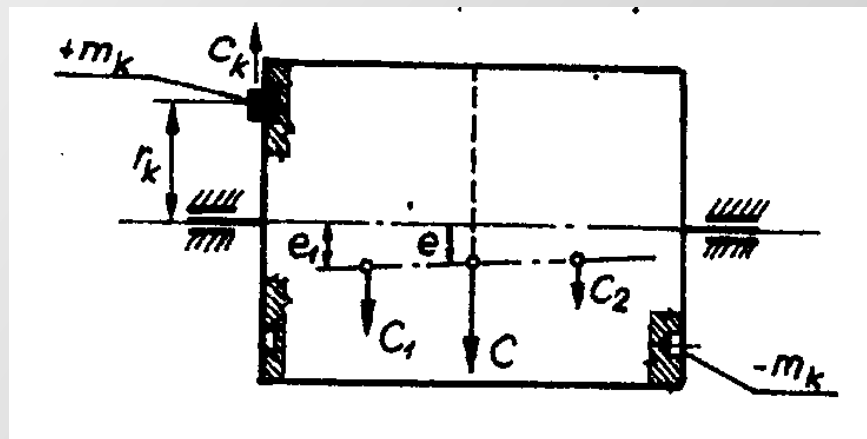
Rozróżniamy dwa rodzaje niewyważenia wirnika: **statyczne** i **dynamiczne** oraz odpowiednio do nich **wyważanie statyczne** i **dynamiczne**.

Wyważanie statyczne

Niewyważenie statyczne ma miejsce wówczas, gdy środek ciężkości wirnika znajduje się poza osią obrotu wirnika, a główna centralna oś bezwładności jest równoległa do osi obrotu lub co najmniej leży w jednej płaszczyźnie z osią obrotu (rys.6). Podczas obracania się wirnika od niewyważonej masy powstaje wirująca siła odśrodkowa **C**, która powoduje dynamiczne oddziaływanie na łożyska wirnika.

Siła **C** jest wypadkową sił **C₁** i **C₂** będących siłami odśrodkowymi pochodzącymi od niewyważonych mas lewej i prawej części wirnika, na które w myśli dzielimy wirnik.¹⁴⁴

Są dwa sposoby przesunięcia środka ciężkości do osi obrotu. Sposób pierwszy polega na dodaniu do czoła wirnika, po przeciwnej stronie w stosunku do położenia środka masy tej części wirnika, pewnej masy korekcyjnej $+m_k$ która wywoła powstanie korekcyjnej siły odśrodkowej C_k równoważącej siłę C_1 (rys. 6).

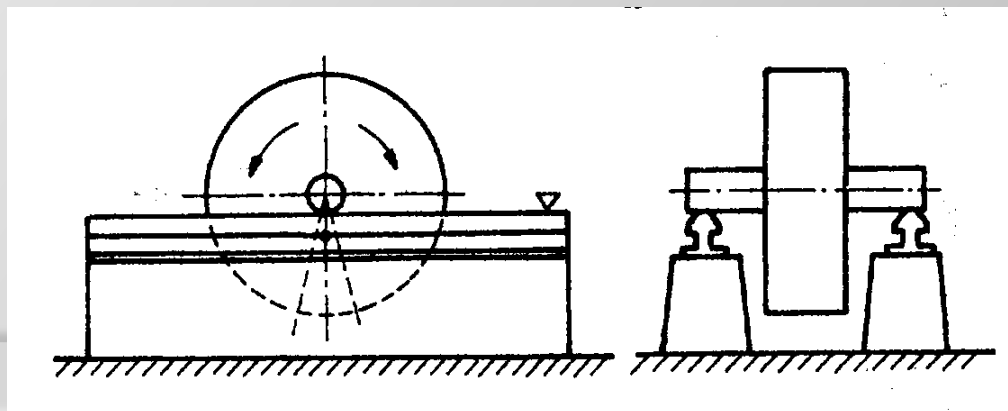


rys.6

Ze względu na duży promień r umieszczenia masy korekcyjnej w stosunku do bardzo małego mimośrodowego e_1 położenia masy części wirnika, masa korekcyjna może być niewielka. W celu łatwego zamocowania dobranej masy korekcyjnej na powierzchni wirnika jest wytoczony specjalny wgłębny pierścień w kształcie jaskółczego ogona, w który łatwo wprowadza się odpowiedni ciężarek, ustala we właściwym miejscu na obwodzie i umocowuje.

Drugi sposób polega na odjęciu pewnej masy wirnika, z reguły na czole wirnika po tej samej stronie osi obrotu. wirnika, po której znajduje się środek masy tej części wirnika.

Masę korekcyjną $-m_k$ odejmuje się najczęściej poprzez nawiercanie (nafrezowanie), możliwie daleko od osi obrotu (rys.6 lewa strona). Gdy środek ciężkości tej części wirnika zostanie w ten sposób przesunięty do osi obrotu, to zniknie siła odśrodkowa C_2 . Wyważanie statyczne wykonuje się najprościej, kładąc wirnik czopami na poziomych prowadnicach (pryzmach, szynach) stabilnie zafundamentowanych (rys.7). Jeżeli środek ciężkości wirnika znajduje się poza jego osią, to wirnik sam pod wpływem siły grawitacyjnej dzięki możliwości toczenia się po prowadnicach tak się ustawi, że środek ciężkości znajdzie się w dolnym położeniu pod osią. Opory toczenia powodują, że w rzeczywistości wirnik nie zdoła się potoczyć aż do tego położenia i środek ciężkości znajdzie się nieco przed pionem. Należy wówczas wykonać przetoczenie wirnika do tego położenia z obu kierunków toczenia i po każdym ustaleniu położenia wirnika nakreślić na czole wirnika linie pionowe. Przez dwusieczną tak wyznaczonego kąta przechodzi płaszczyzna, w której znajduje się środek ciężkości wirnika. Po przeciwnej stronie w stosunku do osi zamocowuje się masę korekcyjną $+m_k$ lub po tej samej stronie usuwa się masę $-m_k$.



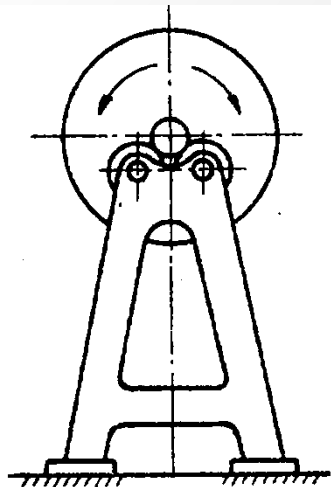
rys.7

Wyważanie statyczne wykonuje się dobierając wielkość masy korekcyjnej drogą kolejnych prób i mocując ją w możliwie dużej odległości od osi obrotu tak długo, aż wirnik wychylony z położenia równowagi już do niego nie powróci. Wirnik obtaczany po prowadnicach zachowuje wówczas równowagę w każdym położeniu.

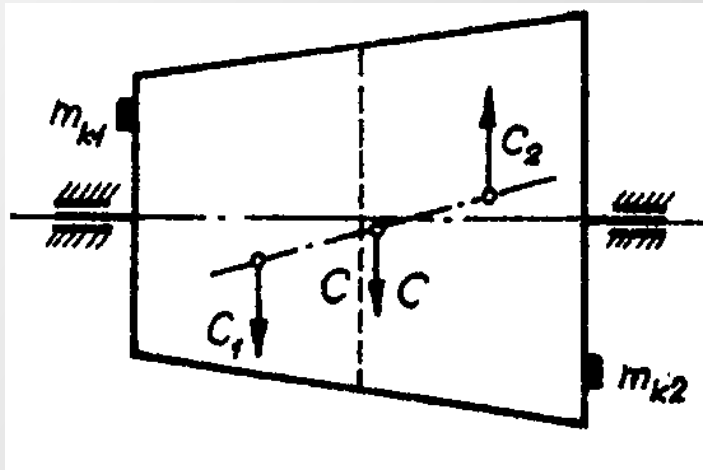
Czynności korekcyjne po obu stronach wirnika wykonuje się w miarę jednocześnie, aby w efekcie przesunąć środek ciężkości całego wirnika do jego osi obrotu i usunąć w ten sposób siłę odśrodkową C , czyli wyważyć wirnik statycznie. Dla wirników krótkich, np. wirników jednotarczowych masy korekcyjne wystarczy uwzględnić tylko z jednej strony wirnika.

Inny sposób statycznego wyważania wirnika polega na położeniu wirnika na dwóch specjalnych, masywnych stojakach posiadających po dwie dobrze ułożyskowane rolki. Stojaki można zmontować w regulowanej odległości między nimi stosownie do osiowej długości wirnika. Wirnik osadza się czopami na rolkach jak to pokazano na rys.8. Wirnik sam grawitacyjnie tak się ustawi na rolkach, że środek ciężkości znajdzie się w dolnym położeniu. Ze względu na występujące tarcie toczenia w łożyskach i tym razem należy dolne położenie wirnika wyznaczyć przez umożliwienie grawitacyjnego obrotu wirnika z obu kierunków obrotu. Dalsze postępowanie korekcyjne jest identyczne jak opisano przy wyważaniu wirnika na poziomych prowadnicach.

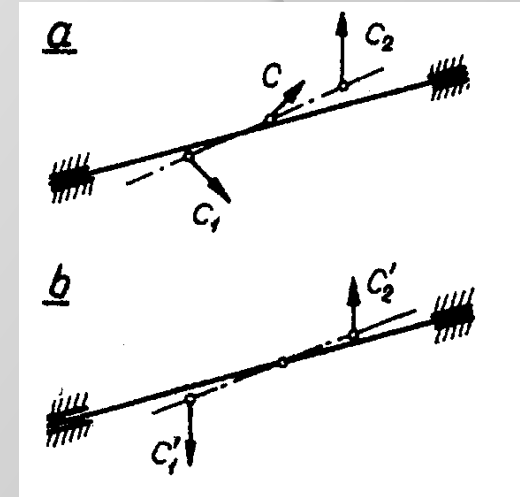
Niewyważenie dynamiczne ma miejsce wówczas gdy środek ciężkości wirnika znajduje się poza osią obrotu wirnika, a główna centralna oś bezwładności jest skośna w stosunku do osi obrotu (rys.9 oraz 10a).



rys.8



rys.9



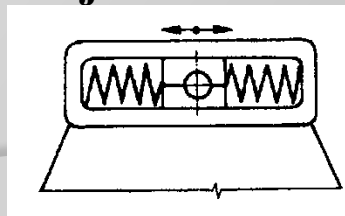
rys.10

W tym przypadku środki ciężkości części wirnika, na jakie teoretycznie dzielimy wirnik, są tak rozmieszczone, że oś je łącząca nie przecina osi obrotu, zaś powstałe siły odśrodkowe C_1 i C_2 nie leżą w jednej płaszczyźnie. Oczywiście podczas wirowania wirnika niewyważonego działają obciążenia dynamiczne. Wyważenie wirnika zaczyna się od wyważania statycznego. Dobierając odpowiednie masy korekcyjne możemy przesunąć środek ciężkości wirnika do osi obrotu. Jednakże wirnik jest nadal niewyważony, gdyż środki ciężkości części wirnika będą znajdować się po przeciwnych stronach osi obrotu, a związane z nimi siły odśrodkowe C_1 i C_2 będą przeciwnie skierowane tworząc wirującą parę sił (rys.10b). Ten stan nazywa się niewyważeniem momentowym. Na łożyska nadal działają obciążenia dynamiczne.

Dalsze wyważenie musi się odbywać na wyważarce dostosowanej do wyważania dynamicznego. Jest to urządzenie, w którym można zamontować wirnik.

Po jego założyskowaniu można obracać go z narastającą prędkością obrotową. Wirnik podczas wyważania jest jednym czopem zamontowanym w łożysku stałym, a drugim w łożysku sprężystym z możliwością jednokierunkowego ruchu, dzięki czemu ten czop ma możliwość wykonywania ruchów poziomych pod wpływem obciążenia dynamicznego czyli drgać (rys. 11).

Obracając wirnik i zwiększając jego prędkość obrotową obserwuje się drgania poziome czopa ułożyskowanego sprężysto, wywołane siłami dynamicznymi pochodzącymi od niewyważenia. W miarę zwiększania prędkości obrotowej dochodzi się do krytycznej prędkości obrotowej, kiedy amplituda drgań jest największa. Jeżeli ustali się, w jakim położeniu wirnika występuje największa amplituda drgań czopa, to jak wiadomo z teorii drgań wymuszonych tłumionych oraz drgań giętnych wirnika, w rezonansie kąt przesunięcia fazowego wychylenia wynosi $\varphi = 90^\circ$ a wychylenie jest opóźnione o ten kąt w stosunku do wymuszenia. Dlatego też łatwo wnosić o położeniu środka masy. Na czole wirnika należy umieścić ciężarek korekcyjny, którego wielkość ustala się drogą kolejnych przybliżeń, aż do usunięcia drgań czopa. Korektę wyważenia wirnika należy wykonywać na przemian na jednym i na drugim łożysku przez ich sprężyste lub stałe ułożyskowanie. Wyważanie dynamiczne można wykonać bez przekraczania krytycznej prędkości obrotowej, ale określenie miejsca znajdowania się środka ciężkości jest wówczas trudniejsze.



Przedstawiona procedura wyważania dynamicznego została tutaj omówiona w dużym uproszczeniu, aby przedstawić zasadę postępowania. W rzeczywistości jest to operacja bardziej złożona i technicznie trudna, zwłaszcza dla dużych wirników ze względu na ich dużą masę. Współczesne wyważarki są urządzeniami bardzo skomplikowanymi. Są wyposażone w odpowiednie czujniki, mierniki, przeliczniki i wskaźniki, które podają wprost wielkości i położenie niezbędnych mas korekcyjnych, jakie należy zamontować na czołach wirników, aby uzyskać wyważenie statyczne i dynamiczne. Wyważarki są budowane jako urządzenia specjalistyczne dostosowane do wielkości, masy i typu konstrukcyjnego wirników, które mają być na nich wyważane. Do pełnego wyważenia wirnika są z reguły potrzebne po dwie masy korekcyjne na każdą stronę wirnika, które odpowiednio rozmieszcza się w wytoczonym na czole wirnika wgłębnym pierścieniu w kształcie jaskółczego ogona. W takim wgłębieniu pierścieniowym ciężarki łatwo przesuwają obwodowo i ewentualnie uzupełniają w miarę wykonywania kolejnych przybliżeń wyważenia wirnika.

Na wyważarkach wyważanie przeprowadza się z dużą precyzją, jednak trudno oczekiwać idealnego wykonania, czyli przesunięcia środka ciężkości do osi obrotu wirnika. Trzeba liczyć się z pozostałością pewnego niewyważenia szczątkowego. Będzie ono źródłem wymuszeń drgań giętnych wirnika, ale dużo mniejszych, a przez to mniej szkodliwych czy niebezpiecznych. Nadal trzeba jednak pamiętać o istnieniu krytycznej prędkości obrotowej wirnika i o ograniczeniach eksploatacji wirnika (maszyny, urządzenia) w zakresie przyrezonansowych prędkości obrotowych.

Drgania skrętne i wzdluzne układów o skończonej liczbie stopni swobody. Elementy dynamiki maszyn korbowych. Drgania skrętne wałów i układów napędowych. Obroty krytyczne. Metoda macierzy przeniesienia. Metoda Holzera.

★ Uwagi ogólne

Ważnym zagadnieniem związanym z eksploatacją okrętowego układu napędowego z silnikiem spalinowym tłokowym napędzającym poprzez linię wałów (wały: oporowy, pośrednie i śrubowy) okrętową śrubę napędową, są **drżania skrętne**.

Drgania skrętne wałów są wywołane okresowo zmiennym momentem obrotowym przenoszonym przez te wały, na który składają się i mają wpływ na jego zmienność:

➤ moment obrotowy od sił gazowych działających na tłoki, zmieniający się odpowiednio do procesu roboczego przebiegającego w cylindrach silnika.

➤ moment od sił bezwładności mas układu korbowego (tłok, korbówód, korba) wykonujących ruch posuwisto-zwrotny przy każdym obrocie wału korbowego.

➤ moment od sił hydrodynamicznych działających na skrzydła śruby obracającej się w zewnętrznym ośrodku wodnym o częstości równej iloczynowi liczby skrzydeł śruby i liczby obrotów wału śrubowego.

Występujące drgania skrętne wywołują powstanie w wałach dodatkowych **naprężeń stycznych**, które sumują się z naprężeniami stycznymi od momentu obrotowego przenoszonego przez wały od silnika głównego do śruby napędowej i jako okresowo zmienne obciążają wały **zmęczeniowo**.

Szczególnie niebezpieczne jest wystąpienie rezonansu drgań skrętnych, kiedy wartości naprężeń stycznych od drgań skrętnych mogą przekroczyć określoną dla danych wałów wartość dopuszczalną i doprowadzić do zmęczeniowego pęknięcia wału. Niebezpieczeństwo to wynika i z faktu, że rezonans drgań skrętnych jest praktycznie nierozpoznawalny i może być nie zauważony przez obsługę siłowni okrętowej, w odróżnieniu od rezonansu drgań giętnych, przy którym występuje gwałtowne „bicie” wału w łożyskach, co natychmiast zwraca uwagę załogi na konieczność zmiany prędkości obrotowej wału i uniknięcie w ten sposób niebezpiecznej pracy urządzenia w rezonansie.

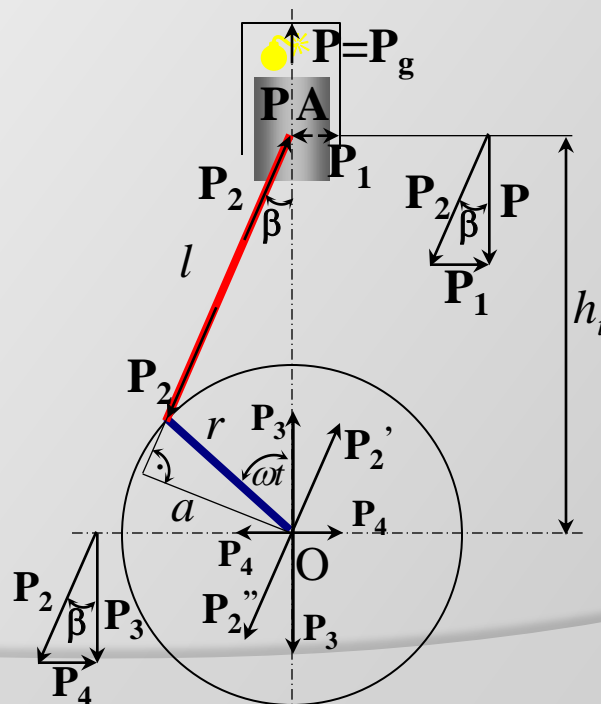
Dla każdego układu napędowego z tłokowym silnikiem głównym muszą być wykonane jeszcze w okresie projektowania dokładne obliczenia drgań skrętnych. Na te obliczenia składają się:

- wyznaczenie częstości własnych drgań skrętnych i odpowiadających im form drgań;
- wyznaczenie prędkości obrotowych układu, przy których, wystąpią rezonanse drgań skrętnych;
- obliczenie dodatkowych naprężeń od drgań skrętnych (zwłaszcza w rezonansach) i porównanie ich z wartościami dopuszczalnymi określonymi w odpowiednich przepisach.
- w przypadku wystąpienia nadmiernych naprężeń w rezonansie drgań skrętnych określenie zakresu przyrezonansowych prędkości obrotowych układu napędowego zabronionych dla pracy ciągłej.

Analiza dynamiczna układu korbowego

Układ korbowy złożony z tłoka, korbowodu i korby wału korbowego jest mechanizmem przeznaczonym do zamiany ruchu posuwisto-zwrotnego tłoka w cylindrze silnika spalinowego na ruch obrotowy wału korbowego. Jeżeli na czop tłokowy A działa jakaś siła P o kierunku zgodnym z osią cylindra, to łatwo znaleźć jej składowe (rys.):

- P_1 siłę docisku tłoka do gładzi cylindrowej;
- P_2 siłę przeniesioną wzdłuż korbowodu do czopa korbowego C.



$$P_2 = P / \cos \beta$$

$$P_1 = P \operatorname{tg} \beta$$

$$P_4 = P_2 \sin \beta = P_1$$

$$P_3 = P_2 \cos \beta = P$$

Silę P_2 redukuje się do osi O czopa ramowego (łożyskowego) wału korbowego (siły $P_2 = P_2' = P_2''$). W ten sposób uzyskuje się parę sił $P_2 P_2'$ dającą moment obrotowy o ramieniu a oraz siłę P_2'' oddziaływania na łożysko wału korbowego. Tę ostatnią siłę rozkłada się na składowe siły - pionową P_3 i poziomą P_4 .

Z trójkątów sił działających na czop tłoka i na łożysko wału korbowego uzyskuje się zależności:

$$P_1 = P \cdot \operatorname{tg}(\beta)$$

$$P_2 = \frac{P}{\cos(\beta)}$$

$$P_3 = P_2 \cos(\beta) = \frac{P}{\cos(\beta)} \cos(\beta) = P$$

$$P_4 = P_2 \sin(\beta) = \frac{P}{\cos(\beta)} \sin(\beta) = P \cdot \operatorname{tg}(\beta) = P_1$$

w których kąt β jest kątem odchylenia korbowodu.

W wyniku działania siły P na układ korbowy powstaje między innymi moment pary sił $P_2 P_2'$ jako moment obrotowy wału korbowego, który wynosi:

$$M = P_2 \cdot a = \frac{P}{\cos(\beta)} \cdot h_t \cdot \sin(\beta) = P \cdot h_t \cdot \operatorname{tg}(\beta) \quad (1)$$

Moment ten jest równy momentowi pary sił $P_1 P_4$ o ramieniu h_t (odległości czopa tłoka od osi wału korbowego) jako momentowi przeciwdziałania, tj. oddziaływania części ruchomych silnika na jego części stałe (ścianki cylindra, łożyska ramowe).

Jak wynika ze wzoru (1) moment obrotowy M nawet dla stałej wartości siły P jest okresowo zmienny, gdyż dla każdego obrotu wału zmieniają się okresowo kąt β odchylenia korbowodu oraz odległość h_t . Siłami P działającymi na czop tłokowy mogą być: siła gazowa P_g od ciśnienia gazów spalinowych w cylindrze na denko tłoka oraz siła bezwładności B_{pos} mas związanych z czopem tłokowym i wykonujących ruchy posuwisto-zwrotne.

Aby wyznaczyć siłę bezwładności B_{pos} należy najpierw wyznaczyć wielkość przyspieszenia czopa tłoka w ruchu posuwisto-zwrotnym. W dowolnej chwili t czop tłoka A zostaje przesunięty z górnego punktu zwrotnego (GPZ) na odległość x_t (rys.2). Tę samą odległość x_t można wyznaczyć jako sumę dwóch odcinków, będących częściami rzutów długości l korbowodu oraz ramienia r korby na oś x cylindra.

$$x_t = l(1 - \cos \beta) + r(1 - \cos \omega t) \quad (2)$$

Dokładne uzależnienie kąta β odchylenia korbowodu od kąta ωt obrotu korby jest bardzo złożone. Zwykle stosuje się różnego rodzaju uproszczenia lub poprawki, które są opisane w podręcznikach teorii silników spalinowych. Tutaj zostanie przedstawiony jeden ze sposobów wykorzystujących prostą zależność, że

$$\sqrt{1-a} \approx 1 - \frac{1}{2}a$$

jeżeli liczba a jest liczbą małą. Wprowadza się również stosunek λ długości r ramienia korby do długości l korbowodu $\lambda = r/l$.

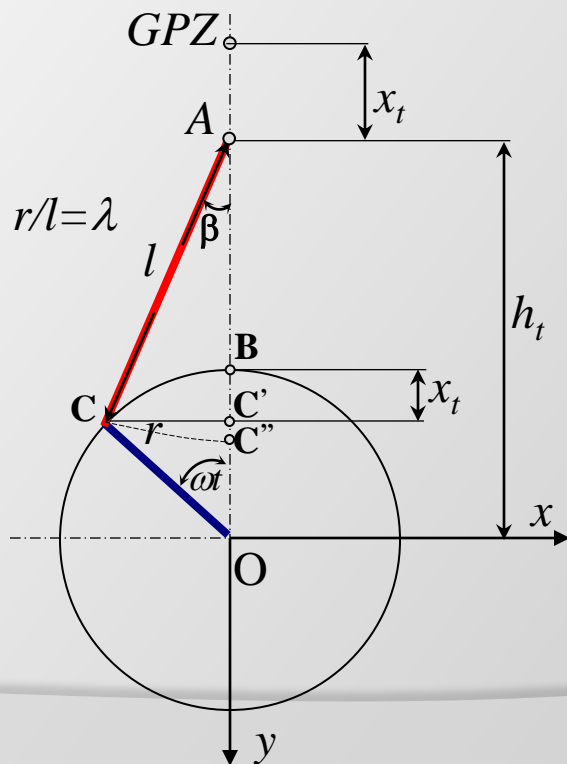
Wykorzystując znane wzory trygonometryczne oraz powyższe uproszczenia wzór (2) można zapisać w formie:

$$x_t \approx l \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t \right) + r(1 - \cos \omega t) = \left(r + \frac{1}{4} \lambda^2 l \right) - r \left(\cos \omega t + \frac{1}{4} \lambda \cos 2\omega t \right)$$

Z tej zależności poprzez kolejne obliczenie pochodnych znajduje się wyrażenie na prędkość \dot{x}_t i przyspieszenie \ddot{x}_t ruchu tłoka:

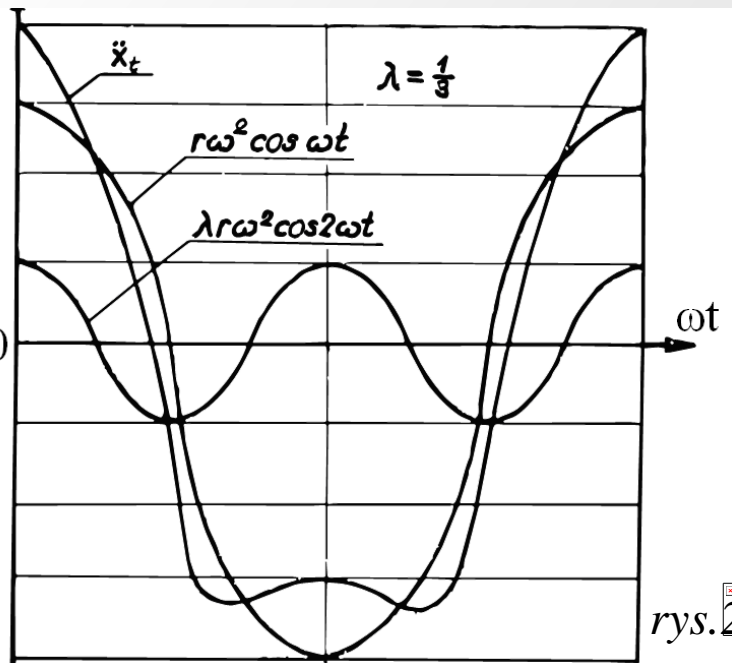
$$\dot{x}_t \approx r\omega \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\omega t \right)$$

$$\ddot{x}_t \approx r\omega^2 \left(\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t \right)$$



Przyspieszenie \ddot{x}_t czopa tłoka zmienia się zatem w cyklu każdego obrotu wału korbowego jak suma dwóch składowych harmonicznnych, co pokazano na rys.3. Tak samo zmienia się siła bezwładności B_{pos} mas związanych z czopem tłokowym. Jak łatwo sprawdzić, czop korby **C** wykonując ruch po obwodzie koła podlega jedynie przyspieszeniu dośrodkowemu, a siła odśrodkowa, jako siła bezwładności mas związanych z czopem korby, przechodzi przez oś **O** wału korbowego i nie ma wpływu na moment obrotowy silnika.

rys.2



rys. 2

Należy zatem określić masy m_{pos} związane z czopem tłokowym, wykonujące wraz z nim ruch posuwisto-zwrotny i wywierające na niego siłę bezwładności B_{pos} . Do tych mas należą przede wszystkim m_t masa tłoka wraz z masą czopa tłokowego, a ponadto część masy korbowodu.

Korbowód wykonuje bardzo złożony ruch **posuwisty i obrotowy** (wahliwy). Jeden z jego końców, mianowicie łeb korbowy, jako połączony z czopem tłokowym, wykonuje ruch posuwisto-zwrotny wzdłuż osi cylindra. Natomiast drugi koniec, czyli stopa korbowodu jako związana z czopem korby, wykonuje ruch po kole.

Wszystkie pozostałe punkty korbowodu wykonują ruchy eliptyczne. Dokładne uwzględnienie tych wszystkich ruchów dla wyliczenia sił bezwładności mas korbowodu byłoby bardzo skomplikowane. Dlatego dla uproszczenia obliczeń masę korbowodu m_k dzieli się na dwie części:

- odtłokową m_{kt} i przypisuje się ją do mas związanych z czopem tłoka, tj. wykonujących ruch posuwisto-zwrotny;
- odkorbową m_{kk} i przypisuje się ją do mas związanych z czopem korby, tj. wykonujących ruch obrotowy.

Podział masy korbowodu na obie części wyznacza położenie środka masy (ciężkości) korbowodu.

Całkowita masa m_{pos} związana z czopem tłokowym i wykonująca ruchy posuwisto-zwrotne wynosi:

$$m_{pos} = m_t + m_{kt}$$

i wpływa na wartość siły bezwładności B_{pos} :

$$B_{pos} = -m_{pos} \ddot{x} = -m_{pos} r \omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t)$$

Ta z kolei ma wpływ na wielkość momentu obrotowego od sił bezwładności:

$$M_b = B_{pos} \cdot h_t \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$h_t = l \cdot (\cos \beta + \lambda \cos \omega t)$$

Po przekształceniach i uwzględnieniu zależności trygonometrycznych otrzymujemy:

$$M_b = \frac{1}{2} m_{pos} r^2 \omega^2 \left[\frac{1}{2} \lambda \sin \omega t - \sin 2\omega t - \frac{3}{2} \lambda \sin 3\omega t \right]$$

Uwzględniając czwartą składową harmoniczną oraz zmniejszenie momentu dla krótkich korbowodów mamy:

$$M_b = \frac{1}{2} m_{pos} r^2 \omega^2 \left[\frac{1}{2} \lambda \sin \omega t - \left(1 + \frac{a \cdot b - I_k}{a \cdot l} \right) \sin 2\omega t - \frac{3}{2} \lambda \sin 3\omega t - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin 4\omega t \right]$$

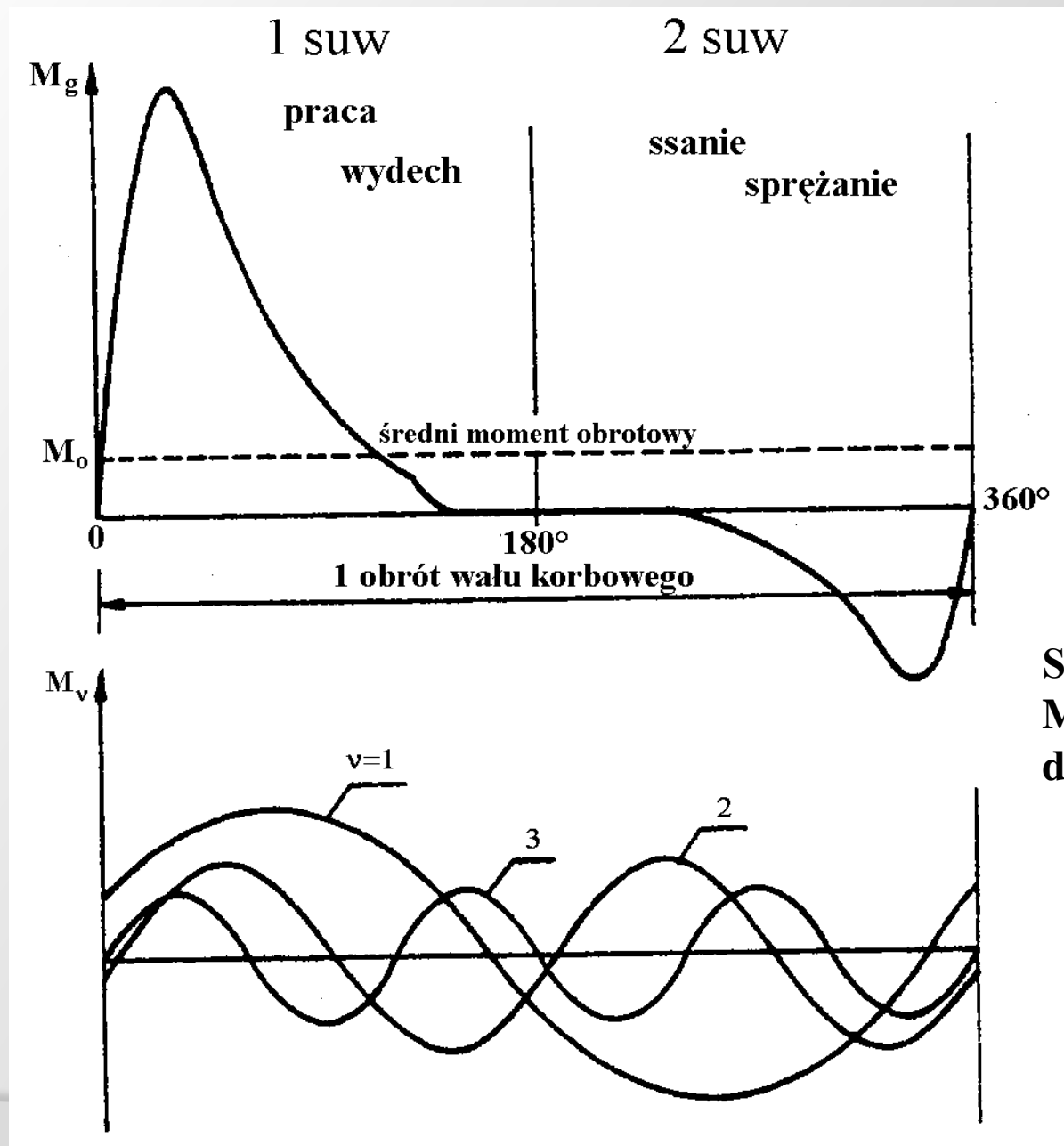
Analiza harmoniczna momentu obrotowego silnika spalinowego tłokowego

Jednym z głównych źródeł drgań skrętnych linii wałów układu napędowego jest okresowa zmienność momentu obrotowego silnika spalinowego tłokowego. Moment ten pochodzi od działania ciśnienia gazów spalinowych na tłok w cylindrze silnika.

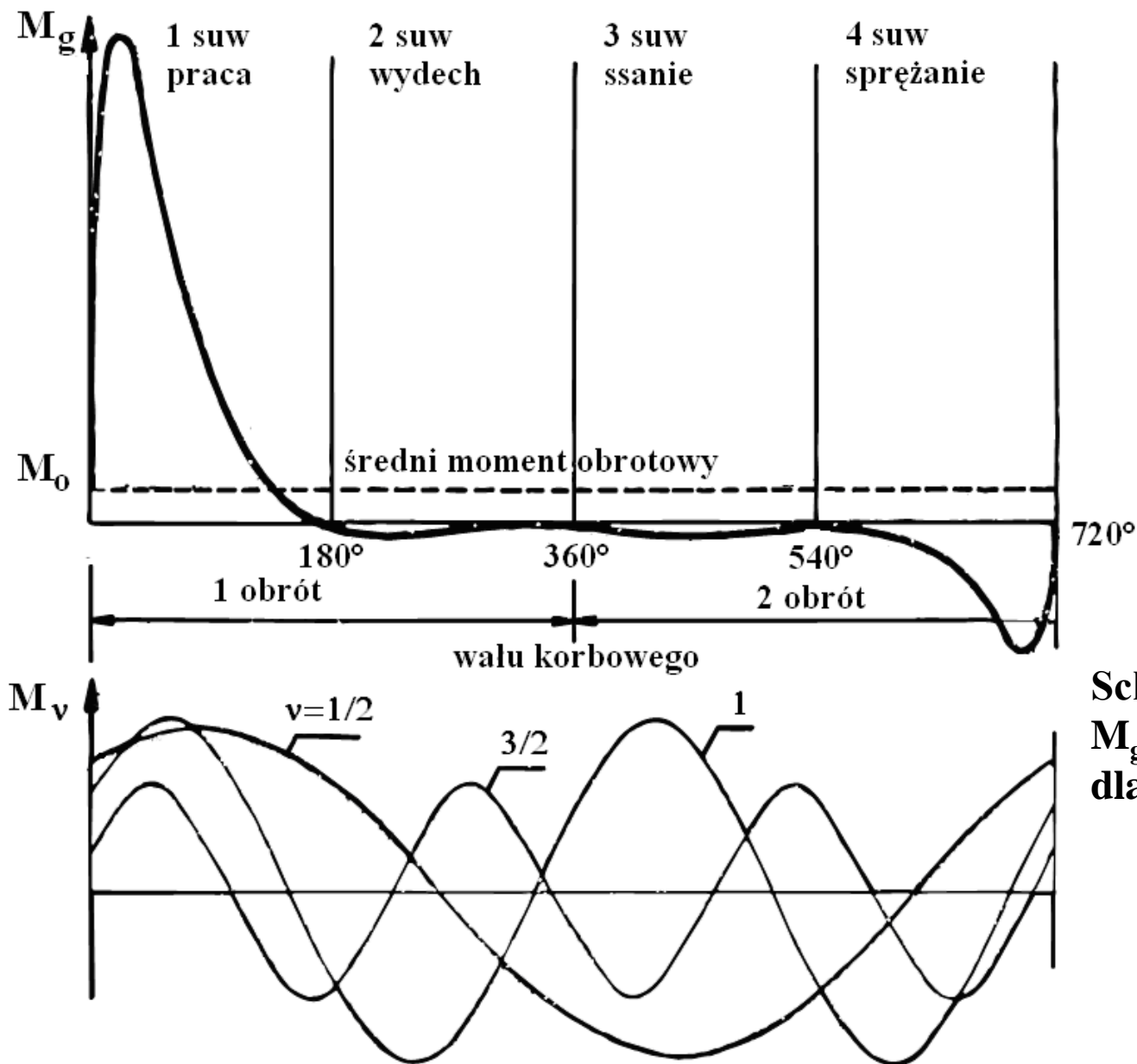
Moment obrotowy M_g od sił gazowych jako okresowo zmienny może być rozłożony na **składowe harmoniczne** i przedstawiony w postaci szeregu Fouriera. Ponieważ okres zmienności momentu M_g nie da się przedstawić w postaci funkcji, zatem jego analizę harmoniczną wykonuje się metodami numerycznymi. Analizy takie wykonują firmy produkujące silniki spalinowe, które podczas badań silników na hamowniach ustalają dokładne przebiegi zmienności momentu obrotowego M_g , a wyniki analiz przedstawiają w postaci odpowiednich wykresów i udostępniają biurom projektowym zajmującym się projektowaniem układu napędowego okrętu.

Przebiegi wykresów M_g zależą od rodzaju silnika, rodzaju spalanego paliwa, wielkości dawki paliwa, zastosowania doładowania, a przede wszystkim od typu silnika - dwusuwowego lub czterosuwowego.

W pierwszym przypadku okres zmienności momentu obrotowego M_g przypada na każdy obrót, a w drugim przypadku na każde dwa obroty wału korbowego. Ma to wpływ na numerację rzędów kolejnych składowych harmonicznych. Jest to schematycznie przedstawione na rysunkach.



Schemat rozkładu momentu M_g na składowe harmoniczne dla silnika 2 - suwowego



Schemat rozkładu momentu M_g na składowe harmoniczne dla silnika 4 - suwowego

Rzędem ν składowej harmonicznej momentu obrotowego M_g silnika nazywa się liczbę pełnych cykli zmian (sinusoid) momentu składowego M_ν przypadających na 1 obrót wału korbowego silnika. Dlatego dla silnika 2-suwowego numeracja jest określona liczbami całkowitymi, a dla silnika 4-suwowego liczbami *połówkowymi*.

Silnik 2-suwowy: $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

Silnik 4-suwowy: $\nu = 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, \dots$

Rzędy składowych harmonicznych odpowiadające liczbie cylindrów silnika oraz jej wielokrotności nazywa się **rzędami głównymi**. Na przykład, dla silnika 6-cylindrowego rzędami głównymi są:

silnik 2-suwowy: $\nu = 6, 12, 18, 24, \dots$,

silnik 4-suwowy: $\nu = 3, 6, 9, 12, \dots$

Pozostałe rzędy noszą nazwę **rzędów pobocznych**. Aby wykonać dostatecznie dokładne obliczenia teoretyczne drgań skrętnych, analizę harmoniczną przeprowadza się do kilkunastu, a nawet dwudziestu kilku rzędów składowych harmonicznych.

Końcowe wykresy analizy harmonicznej momentu obrotowego M_g silnika spalinowego, aby uniezależnić je od wielkości silnika, podaje się w postaci obliczonych współczynników harmonicznych c_ν [MPa] dla kolejnych składowych harmonicznych w funkcji średniego ciśnienia indykowanego p_i w cylindrze silnika, zależnego od **dawki paliwa, rodzaju spalania i ewentualnego zastosowania doładowania**. Takie wykresy mają charakter uniwersalny dla określonego typoszeregu silników, a mogą być nawet stosowane z pewnym przybliżeniem dla silników podobnych.

Za pomocą **współczynnika harmonicznego** c_v oblicza się amplitudę składowej harmoniczej M_v momentu obrotowego silnika stosując wzór:

$$M_v = c_v \cdot F \cdot r$$

M_v – amplituda v – tej składowej harmoniczej momentu obrotowego silnika;

c_v – współczynnik harmoniczny;

F – pole powierzchni denka tłoka;

r – promień wykorbienia.

Moment obrotowy silnika spalinowego M_g od sił gazowych można przedstawić w postaci szeregu Fouriera:

$$M_g = M_o + \sum_{i=1}^n M_v \sin(v\omega t + \varphi_v); \quad v = i - 2 \text{ suw}; \quad v = \frac{1}{2}i - 4 \text{ suw}$$

M_o – średni moment obrotowy silnika;

φ_v – kąt przesunięcia fazowego v -tej składowej harmoniczej;

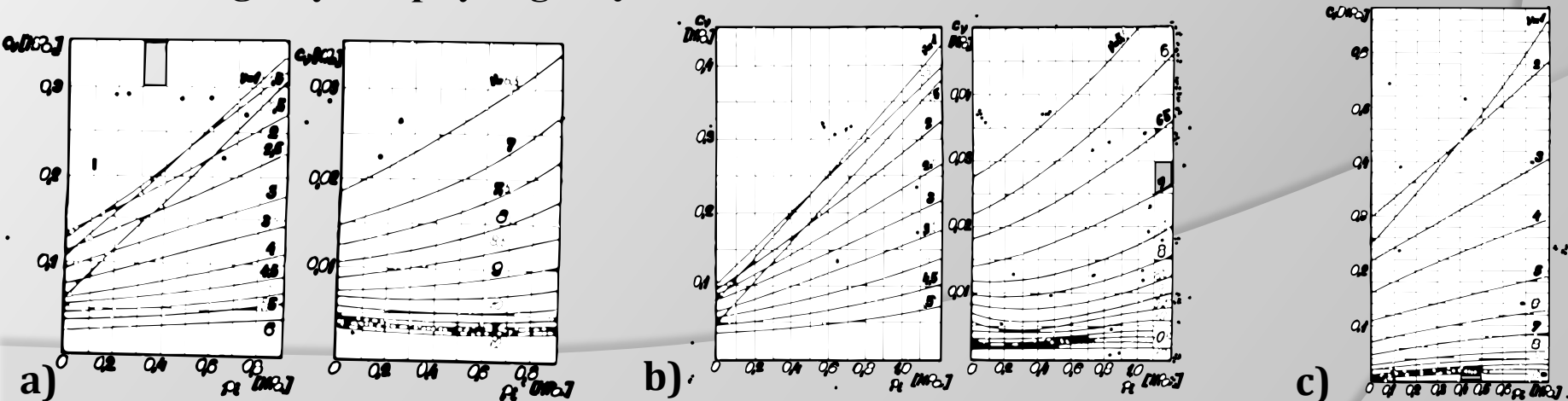
n – liczba uwzględnionych składowych harmoniczych.

Całkowity moment obrotowy silnika jest sumą momentu M_g od sił gazowych oraz momentu M_b od sił bezwładności mas wykonujących ruchy posuwisto-zwrotne:

$$M = M_g + M_b$$

Oczywiście dotyczy to tylko trzech lub czterech pierwszych rzędów składowych harmonicznym, gdyż tylko tyle ich zawiera wzór określający M_b . Dla dalszych rzędów składowe harmoniczne zależą wyłącznie od sił gazowych. Niektóre firmy podając wartości współczynników harmonicznym c_v uwzględniają już w nich łączny moment od sił gazowych i sił bezwładności.

Na kolejnych rysunkach zostały przedstawione wykresy o charakterze ogólnym współczynników c_v składowych harmonicznym dla silników czterosuwowych wysokoprężnym bez doładowania (rys.a) i z doładowaniem (rys.b) oraz dla silnika dwusuwowego wysokoprężnego (rys.c).



DRGANIA liniowe o skończonej liczbie stopni swobody - s.165

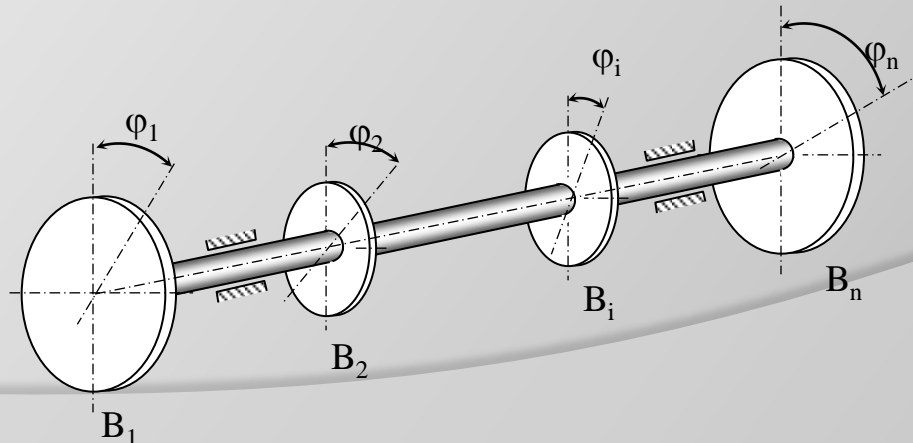
Drgania liniowe układów o skończonej liczbie stopni swobody. Zagadnienia ogólne modelowania układów ciągłych. Równania drgań układów dyskretnych. Drgania własne i wymuszone. Równania częstości. Wartości własne i ich interpretacja.

★ Uwagi ogólne

Teoria małych drgań układów o **wielu stopniach swobody** jest naturalnym uogólnieniem przedstawionej w wykładzie 6 teorii układów o dwóch stopniach swobody. Założenie drgań małych jest niezbędne do zachowania liniowości układu.

Różnorodność układów uniemożliwia wyczerpanie ich podstawowych modeli. Są jednak **dwa rodzaje układów o wielu stopniach swobody**, które stanowią **dwa z najważniejszych działów teorii drgań**.

Reprezentujący je model sprowadza się do belki lub sprężystego nieważkiego wału niosącego skończoną liczbę ciał skupionych. W pierwszym typie układów ciała te są traktowane jako cienkie tarcze mogące wykonywać ruch obrotowy dookoła osi wału (rys.1) związany z jego skręcaniem. Mówi się wtedy o drganiach **skrętnych** wałów z wieloma tarczami.



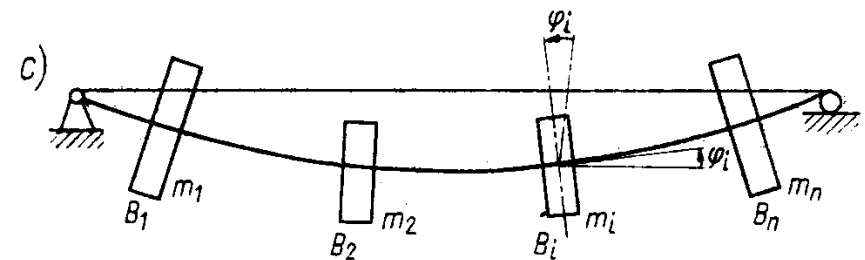
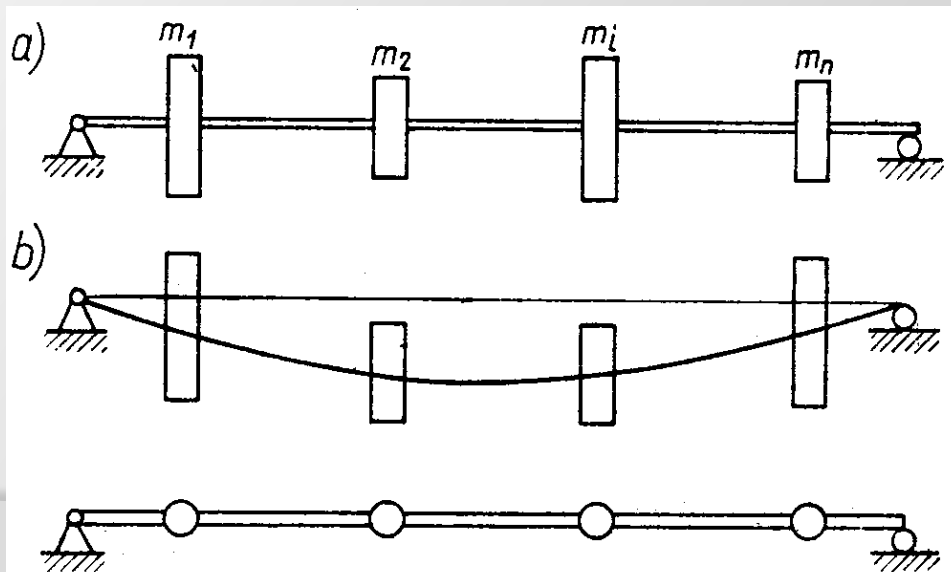
Rys.1

W drugim typie układów ciała te mogą, w pierwszym przybliżeniu, **wykonywać ruch postępowy** w kierunku poprzecznym do osi wału (rys. 2), związane z jego zginaniem. Bryły te mogą więc być traktowane jako punkty materialne.

Ściślej rzecz biorąc ruchowi temu towarzyszą **obroty tych brył** (rys. c) związane z kątem ugięcia wału. Uściślenie to jest konieczne tylko w przypadkach, gdy wał niesie tarcze o dużej średnicy (np. tarcze wirnikowe turbin) lub gdy średnica jego jest duża względem długości i zwykła teoria zginania belek przestaje być wystarczająco dokładna.

Pierwszy typ układów znajduje szerokie zastosowanie w dynamice maszyn o znacznej zmienności momentu napędowego lub momentu oporu, które mogą wzbudzać drgania skrętne wałów napędowych, np. wałów korbowych silników i sprężarek, maszyn elektrycznych, wałów napędowych (np. śrub okrętowych) itp.

Drugi typ układów są to przybliżone modele dynamiczne wałów, belek itp. elementów maszyn i konstrukcji, których masę skupiono w n punktach. Znajdują one szerokie i ważne zastosowanie w **dynamice maszyn wirnikowych** oraz w **dynamice konstrukcji nośnych**.



Rys.2

Rozpatrzmy szczegółowo układ z rys.1. Przyjmijmy kąty obrotu φ_i jako **współrzędne uogólnione** Na podstawie II prawa Newtona dla ruchu obrotowego otrzymujemy równania ruchu które dla małych drgań skrętnych mają postać:

$$\begin{aligned}
 B_1 \ddot{\varphi}_1 &= k_1(\varphi_2 - \varphi_1) \\
 B_2 \ddot{\varphi}_2 &= -k_1(\varphi_2 - \varphi_1) + k_2(\varphi_3 - \varphi_2) \\
 B_3 \ddot{\varphi}_3 &= -k_2(\varphi_3 - \varphi_2) + k_3(\varphi_4 - \varphi_3) \\
 B_4 \ddot{\varphi}_4 &= -k_3(\varphi_4 - \varphi_3)
 \end{aligned}
 \quad i=1,2,3,4 \quad (*)$$

Równania (*) opisują drgania własne skrętne układu o czterech stopniach swobodnych. Poszukujemy rozwiązań w postaci:

$$\varphi_i = \Phi_i \cos(\alpha t); \quad i = 1,2,3,4$$

Po podstawieniu do równań (*) otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$\begin{vmatrix}
 k_1 - B_1 \alpha^2 & -k_1 & 0 & 0 \\
 k_1 & k_1 + k_2 - B_2 \alpha^2 & -k_2 & 0 \\
 0 & -k_2 & k_2 + k_3 - B_3 \alpha^2 & -k_3 \\
 0 & 0 & -k_3 & k_3 - B_4 \alpha^2
 \end{vmatrix} = 0 \quad (**)$$

Układ równań różniczkowych (1) można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2)$$

gdzie: $\ddot{\mathbf{q}}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$; $\mathbf{q}(t)$ – jednokolumnowe macierze uogólnionych przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń.

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_s(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_s(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_s(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\mathbf{F}(t)$ – jednokolumnowa macierz sił zewnętrznych niepotencjalnych $F_i(t)$, działających na kierunku i -tej współrzędnej uogólnionej

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_s(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Siły $\mathbf{F}(t)$ są jawnymi funkcjami czasu t i nazywa się je siłami wymuszającymi. Siły te nie są funkcjami przyspieszenia (są nimi siły bezwładności), nie są siłami prędkości (są nimi siły tłumienia, np. wiskotycznego) i nie są funkcjami położenia (są nimi siły potencjalne, np. sprężystości, ciężkości).

↳ Drgania liniowe swobodne

Jeśli założyć w ogólnym modelu matematycznym (2) układów mechanicznych brak sił tłumiących i sił zewnętrznych tzn.

$$\forall_{t>0} \mathbf{B} = 0 \quad i \quad \mathbf{F}(t) = 0 \quad (5)$$

otrzyma się model matematyczny liniowego układu zachowawczego o wielu stopniach swobody

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) = 0 \quad (6)$$

gdzie: \mathbf{A} - macierz bezwładności; \mathbf{C} - macierz sztywności układu.

Macierze \mathbf{A} i \mathbf{C} są określone dodatnio (tzn. wyznaczniki główne macierzy i wszystkie wyznaczniki podmacierzy są dodatnie), a tym samym macierze te są nieosobliwe (wyznaczniki główne są różne od zera).

Zakłada się znajomość warunków początkowych ruchu układu analogicznie do warunków układu o jednym stopniu swobody:

$$\mathbf{q}(t=0) = \begin{bmatrix} q_1(t=0) \\ q_2(t=0) \\ \vdots \\ q_s(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ \vdots \\ q_{s0} \end{bmatrix} = \mathbf{q}_o ; \quad \dot{\mathbf{q}}(t=0) = \dot{\mathbf{q}}_o \quad (7)$$

Drgania swobodne układu o wielu stopniach swobody **nie zawsze są harmoniczne** niezależnie od warunków początkowych, tak jak jest to w przypadku układu o jednym stopniu swobody.

Istnieje możliwość doboru takich warunków początkowych, że drgania swobodne mas układu o wielu stopniach swobody są wówczas harmoniczne. Nazywa się je **drzganiami głównymi lub własnymi układu**.

☞ Drgania główne układu

Załóżmy, że wszystkie masy układu drgają harmonicznie z jednakową częstością i fazą tzn. przewiduje się równania różniczkowe ruchu w postaci

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \psi_1 \sin(\omega t + \phi) \\ \psi_2 \sin(\omega t + \phi) \\ \vdots \\ \psi_s \sin(\omega t + \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_s \end{bmatrix} \sin(\omega t + \phi) = \boldsymbol{\psi} \sin(\omega t + \phi) \quad (8)$$

gdzie:

- s – liczba stopni swobody układu,
- ψ_i – amplituda i -tej współrzędnej uogólnionej $q_i(t)$,
- ϕ – faza ruchu układu jednakowa dla wszystkich jego mas,
- $\boldsymbol{\psi}$ – macierz jednokolumnowa amplitud ψ_i .

Rozwiązania niezerowe, tzn. $\psi \neq 0$, istnieją, dla takiego układu równań, gdy wyznacznik główny macierzy $(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A})$ jest równy zero [macierz $(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A})$ jest wówczas osobliwa].

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} - \omega^2 a_{12} & \Lambda & c_{1s} - \omega^2 a_{1s} \\ c_{21} - \omega^2 a_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} & \Lambda & c_{2s} - \omega^2 a_{2s} \\ & \text{M} & & \text{M} \\ c_{s1} - \omega^2 a_{s1} & c_{s2} - \omega^2 a_{s2} & \Lambda & c_{ss} - \omega^2 a_{ss} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Wyznacznik ten po rozwinięciu jest wielomianem stopnia s względem ω^2 tzw. wielomianem charakterystycznym układu równań (12) lub równaniem częstości. Jeśli macierze \mathbf{A} i \mathbf{C} są dodatnio określone, to wszystkie pierwiastki $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_s^2$ równania (13) są liczbami rzeczywistymi i dodatnimi, niekoniecznie różnymi.

Liczby $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ są wobec przewidywanych równań ruchu (8) nazywane **częstościami drgań głównych lub częstościami drgań własnych układu**.

Każda z częstości ω_i podstawiona do równań (12) czyni macierz $(\mathbf{C} - \omega_i^2 \mathbf{A})$ osobliwą. Istnieje wówczas niezerowe rozwiązanie:

$$\psi^{(i)} = [\psi_1^{(i)} \ \psi_2^{(i)} \ \dots \ \psi_s^{(i)}]^T \quad (14)$$

odpowiadające i -tej częstości drgań własnych i spełniające równanie macierzowe:

$$(\mathbf{C} - \omega_i^2 \mathbf{A}) \psi^{(i)} = 0 \quad (15)$$

Należy zauważyć, że każdy wektor $\alpha \boldsymbol{\psi}^{(i)}$, gdzie $\alpha \neq 0$, jest też rozwiązaniem równania (11). Wektor $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ wyznaczony jest więc z dokładnością do stałego czynnika α i określa jednoznacznie i -tą postać drgań własnych (drgań głównych) odpowiadającą i -tej częstości drgań własnych. Układ o s stopniach swobody posiada zatem s częstości ω_i drgań własnych i s im odpowiadających postaci drgań $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$. Macierz \mathbf{X} utworzona z wektorów kolumnowych $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ postaci drgań własnych nazwano **macierzą modalną**

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} & \Lambda & \psi_1^{(s)} \\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} & \Lambda & \psi_2^{(s)} \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} \\ \psi_s^{(1)} & \psi_s^{(2)} & \Lambda & \psi_s^{(s)} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\Psi}^{(1)} \boldsymbol{\Psi}^{(2)} \dots \boldsymbol{\Psi}^{(s)}] \quad (16)$$

Poszukiwania częstości ω_i i postaci $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ drgań własnych jest w ogólności zagadnieniem poszukiwania wartości i wektorów własnych macierzy rozważanym w algebrze liniowej i przy obecnym rozwoju techniki komputerowej jest niezbyt trudne.

Warto zauważyć, że macierz dołączona \mathbf{D} macierzy $\mathbf{D} = \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A}$ spełnia równanie (15) tzn.

$$\mathbf{D} \mathbf{D} = 0 \quad (17)$$

przy czym macierzą dołączoną \mathbf{D} nazywa się macierz transponowaną macierzy utworzonej z dopełnień algebraicznych D_{ij} macierzy \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = [\mathbf{D}_{ij}]^T; \quad \mathbf{D}_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

gdzie:

Δ_{ij} jest wyznacznikiem macierzy utworzonej z macierzy \mathbf{D} po skreśleniu w niej i -tego wiersza i j -tej kolumny

Oznacza to, że elementy D_{ij} dowolnej kolumny macierzy dołączonej wyznaczonej dla i -tej częstości własnej ω_i , mają się do siebie tak, jak elementy wektora jednokolumnowego $\psi^{(i)}$ określającego i -tą postać drgań własnych

$$\frac{D_{j1}}{\psi_1^{(i)}} = \frac{D_{j2}}{\psi_2^{(i)}} = \dots = \frac{D_{js}}{\psi_s^{(i)}}$$

Założmy do dalszych rozważań, że częstości ω_i i postaci $\psi^{(i)}$ zostały wyznaczone, przy czym wszystkie częstości są różne i ułożone w rosnący ciąg wartości:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_s$$

Każdej częstości własnej ω_i odpowiada więc i -te drganie własne (i -te drganie główne)

$$\mathbf{q}^{(i)}(t) = \alpha_i \psi^{(i)} \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (18)$$

przy czym drgania te są niezależne liniowo. Ich suma jest więc rozwiązaniem ogólnym równania (6)

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^s \mathbf{q}^{(i)}(t) = \sum_{i=1}^s \alpha_i \psi^{(i)} \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (19)$$

tzn. przedstawia ruch swobodny układu zależny od $2s$ stałych α_i , ϕ_i wyznaczanych z $2s$ warunków początkowych ruchu (7)

$$\mathbf{q}(t=0) = \mathbf{q}_0 = \sum_{i=1}^s \alpha_i \psi^{(i)} \sin \phi_i; \quad \dot{\mathbf{q}}(t=0) = \dot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{i=1}^s \alpha_i \omega_i \psi^{(i)} \cos \phi_i \quad (20)$$

Przy dowolnych warunkach początkowych ruch układu nie jest na ogół ruchem własnym (głównym).

☞ Drgania wymuszone obciążeniem harmonicznym zmiennym liniowego układu zachowawczego

Zewnętrzne wymuszenia są zazwyczaj okresowe, ale nieharmoniczne. Można jednak te okresowe obciążenia przedstawić w postaci sumy nieskończonej składowych harmonicznymi.

W układzie liniowym obowiązuje zasada superpozycji, stąd rozważa się tutaj ruch układu wymuszony harmonicznym zmiennym obciążeniem. Ruch wypadkowy układu jest bowiem sumą ruchów składowych spowodowanych oddzielnie działającymi składowymi harmonicznymi wymuszenia.

Macierz podatności dynamicznej

Założmy, że na układ zachowawczy o s stopniach swobody i o znanej macierzy bezwładności \mathbf{A} i sztywności \mathbf{C} działa wektor s wymuszeń harmonicznymi na s kierunkach współrzędnych uogólnionych \mathbf{q} , o jednakowych zerowych fazach początkowych

$$\mathbf{F}(t) = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_s]^T \sin \nu t \quad (21)$$

gdzie:

$\mathbf{F}_a = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_s]^T$ wektor amplitud (rzeczywistych) sił wymuszających,
 ν – częstość harmonicznymi zmiennymi sił wymuszających; ν jest liczbą daną.

Równanie różniczkowe rozpatrywanego ruchu wymuszonego

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{F}_a \sin \nu t \quad (22)$$

ma rozwiązanie ogólne analogiczne do rozwiązania takiego równania ruchu dla układu o jednym stopniu swobody. Tutaj interesuje nas tylko rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Przewiduje się je w postaci wektora:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi} \sin \nu t = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_s]^T \sin \nu t \quad (23)$$

gdzie:

$\mathbf{\Phi} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_s]^T$ – wektor amplitud współrzędnych uogólnionych,
 ν – częstość harmonicznym zmian współrzędnych uogólnionych.

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu (23) i podstawieniu do (22) otrzymuje się równanie:

$$(-\mathbf{A} \nu^2 + \mathbf{C}) \mathbf{\Phi} \sin \nu t = \mathbf{F}_a \sin \nu t \quad (24)$$

a po podzieleniu przez $\sin \nu t$

$$(\mathbf{C} - \nu^2 \mathbf{A}) \mathbf{\Phi} = \mathbf{F}_a \quad (25)$$

gdzie: $\mathbf{C} - \nu^2 \mathbf{A} = \mathbf{K}$ – macierz tzw. sztywności dynamicznej układu zachowawczego

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} c_{11} - \nu^2 a_{11} & c_{12} - \nu^2 a_{12} & \Lambda & c_{1s} - \nu^2 a_{1s} \\ c_{21} - \nu^2 a_{21} & c_{22} - \nu^2 a_{22} & \Lambda & c_{2s} - \nu^2 a_{2s} \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} \\ c_{s1} - \nu^2 a_{s1} & c_{s2} - \nu^2 a_{s2} & \Lambda & c_{ss} - \nu^2 a_{ss} \end{bmatrix} \quad (26)$$

czyli $\mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{F}_a$

Jeśli założy się, że częstość ν wymuszenia jest różna od którejkolwiek częstości własnej ω_i

$$\nu \neq \omega_i \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (27)$$

to macierz \mathbf{K} jest **nieosobliwa**: $|\mathbf{K}| \neq 0$ i istnieje macierz odwrotna \mathbf{K}^{-1} . Nazwano ją **macierzą podatności dynamicznej układu zachowawczego**

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \Lambda & \gamma_{1s} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \Lambda & \gamma_{2s} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ \gamma_{s1} & \gamma_{s1} & \Lambda & \gamma_{ss} \end{bmatrix} = \mathbf{K}^{-1} = (\mathbf{C} - \nu^2 \mathbf{A})^{-1} \quad (28)$$

Macierz \mathbf{K} jak i $\mathbf{\Gamma}$ są symetryczne tzn.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T, \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T \quad (29)$$

Przy znanej częstości wymuszenia ν oraz oczywiście znanych macierzach \mathbf{A} i \mathbf{C} można wyznaczyć macierz podatności $\mathbf{\Gamma}$, a następnie wektor amplitud $\mathbf{\Phi}$ współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_a = \mathbf{\Gamma} \mathbf{F}_a \quad (30)$$

oraz równania ruchu układu (oczywiście przy $\nu \neq \omega_i, i=1, \dots, s$)

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{F}_a \sin \nu t$$

W przypadku $\nu = \omega_i$, $i=1, \dots, s$ macierz \mathbf{K} jest osobliwa (jest po prostu macierzą $\mathbf{C} - \omega_i \mathbf{A}$) i elementy macierzy podatności dążą do nieskończoności, a rozwiązania stają się nieograniczone. Mówi się wówczas o **rezonansie układu o wielu stopniach swobody**.

Uwzględniając (28) i (30) można napisać równanie amplitud współrzędnych uogólnionych q_i , z którego wynika sens fizyczny elementu γ_{ij} macierzy podatności dynamicznej $\mathbf{\Gamma}$: określa on wpływ amplitudy F_j j -tego wymuszenia na amplitudę Φ_i i -tej współrzędnej uogólnionej q_i dla danej częstości ν wymuszenia harmonicznego. Sens fizyczny elementu podatności γ_{ij} jest więc podobny do modułu podatności γ układu o jednym stopniu swobody.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \mathbf{M} \\ \Phi_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \Lambda & \gamma_{1s} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \Lambda & \gamma_{2s} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ \gamma_{s1} & \gamma_{s2} & \Lambda & \gamma_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \mathbf{M} \\ F_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}F_1 & \gamma_{12}F_2 & \Lambda & \gamma_{1s}F_s \\ \gamma_{21}F_1 & \gamma_{22}F_2 & \Lambda & \gamma_{2s}F_s \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ \gamma_{s1}F_1 & \gamma_{s2}F_2 & \Lambda & \gamma_{ss}F_s \end{bmatrix} \quad (31)$$

Praktyczne metody obliczania macierzy podatności dynamicznej

Obliczanie macierzy podatności $\mathbf{\Gamma}$ bezpośrednio wg wzoru (28) tzn. przez poszukiwanie macierzy odwrotnej \mathbf{K}^{-1} względem macierzy sztywności dynamicznej \mathbf{K} jest dla układów o liczbie stopni swobody większej niż dwa bardzo mało efektywne. Elementy macierzy podatności łatwiej wyznacza się wykorzystując zasadę ortogonalności drgań głównych.

Drgania wymuszone obciążeniem harmonicznym zmiennym liniowego układu niezachowawczego. Zespolona macierz podatności dynamicznej

Model matematyczny liniowego układu niezachowawczego opisuje równanie macierzowe:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C} \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (32)$$

Okazuje się, że w przypadku, gdy w układzie występuje tłumienie odpowiedzi układu, tzn. drgania poszczególnych jego mas odbywają się z pewnym, w ogólności różnym dla poszczególnych mas układu, opóźnieniem fazowym względem sił wymuszających, nawet wówczas, gdy mają one jednakową częstość i fazę początkową.

Można wprawdzie znaleźć takie szczególne skojarzenia częstości, amplitud i faz sił wymuszających, że masy układu będące pod działaniem takich harmonicznym wymuszeń drgają z jedną zgodną wzajemnie fazą.

Drgania tego rodzaju nie mają jednak praktycznie większego znaczenia. W ogólności bowiem przy dowolnym skojarzeniu sił harmonicznym o zgodnych nawet fazach opóźnienia fazowe ruchów mas układu są różne. Analiza ruchu takiego układu w dziedzinie liczb rzeczywistych jest bardzo utrudniona, nieefektywna. Wygodnie jest natomiast przedstawiać ruch układu w dziedzinie liczb zespolonych. Zakłada się więc, że dotychczas rozważany wektor wymuszeń harmonicznym

$$\mathbf{F}(t) = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_s]^T \sin \nu t \quad (33)$$

stanowi część urojoną $\text{Im} \bar{\mathbf{F}}(t)$ zespolonego wymuszenia harmonicznego

$$\bar{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}_a e^{j\nu t} = \mathbf{F}_a (\cos \nu t + j \sin \nu t) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M \\ F_s \end{bmatrix} e^{j\nu t} \quad (34)$$

gdzie:

j = jednostka urojona

$\mathbf{F}_a = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_s]^T$ wektor amplitud sił wymuszających o zgodnej fazie.

Równanie ruchu układu będącego pod działaniem zespolonego wymuszenia (34) można zapisać:

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t) + \mathbf{C} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}(t) = \mathbf{F}_a e^{j\nu t} \quad (35)$$

gdzie:

$\bar{\mathbf{q}}(t)$ – zespolony wektor współrzędnych uogólnionych,

$\dot{\bar{\mathbf{q}}}(t), \ddot{\bar{\mathbf{q}}}(t)$ – zespolone wektory przyspieszeń i prędkości uogólnionych układu.

Rozwiązanie szczególne równania (35) przewiduje się w postaci

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \bar{\Phi} e^{j\nu t} \quad (36)$$

gdzie:

$\bar{\Phi}$ – wektor zespolonych amplitud współrzędnych uogólnionych $\bar{\mathbf{q}}(t)$ o takiej samej częstotliwości ν .

Zespolona macierz sztywności dynamicznej układu wynosi:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{C} - \nu^2 \mathbf{A} + j\nu \mathbf{B} \quad (37)$$

Jeśli założyć, że macierz sztywności $\bar{\mathbf{K}}$ jest nieosobliwa, to istnieje macierz odwrotna do niej $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ zwana macierzą zespolonej podatności dynamicznej

$$\bar{\mathbf{\Gamma}} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} = [\mathbf{C} - \nu^2 \mathbf{A} + j\nu \mathbf{B}]^{-1} \quad (38)$$

i wówczas równanie amplitud współrzędnych uogólnionych jest postaci

$$\bar{\mathbf{\Phi}} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}_a = \bar{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{F}_a \quad (39)$$

a wektor współrzędnych uogólnionych

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \bar{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{F}_a e^{j\nu t} \quad (40)$$

Liczby zespolone umożliwiają uwzględnienie różnic faz sił wymuszających. Załóżmy bowiem, że siły wymuszające mają tę samą częstość ν , ale różne fazy ϕ_i

$$\mathbf{F}_i(t) = F_i \sin(\nu t + \phi_i) \quad (41)$$

Wówczas wektor sił wymuszających można przedstawić w postaci

$$\bar{\mathbf{F}}(t) = \begin{bmatrix} F_1 e^{j(\nu t + \phi_1)} \\ F_2 e^{j(\nu t + \phi_2)} \\ \mathbf{M} \\ F_s e^{j(\nu t + \phi_s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 e^{j\phi_1} \\ F_2 e^{j\phi_2} \\ \mathbf{M} \\ F_s e^{j\phi_s} \end{bmatrix} e^{j\nu t} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1 \\ \bar{\mathbf{F}}_2 \\ \mathbf{M} \\ \bar{\mathbf{F}}_s \end{bmatrix} e^{j\nu t} = \bar{\mathbf{F}}_a(t) e^{j\nu t} \quad (42)$$

wektor równania ruchu:

$$\bar{\mathbf{q}}(t) = \bar{\Gamma} \bar{\mathbf{F}}_a e^{j\nu t} \quad (43)$$

a stąd wektor $\mathbf{q}(t)$ równania ruchu rzeczywistego

$$\mathbf{q}(t) = \text{Im} \left\{ \bar{\Gamma} \bar{\mathbf{F}}_a e^{j\nu t} \right\} \quad (44)$$

Znajomość zespolonej macierzy podatności dynamicznej układu umożliwia więc łatwe poszukiwanie równań ruchu układu. Zwróćmy jednak uwagę na pewne aspekty określania zespolonych elementów macierzy podatności dynamicznej układu

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{11} & \bar{\gamma}_{12} & \Lambda & \bar{\gamma}_{1s} \\ \bar{\gamma}_{21} & \bar{\gamma}_{22} & \Lambda & \bar{\gamma}_{2s} \\ \text{M} & \text{M} & & \text{M} \\ \bar{\gamma}_{s1} & \bar{\gamma}_{s2} & \Lambda & \bar{\gamma}_{ss} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Macierz jest formalnie odwrotna do macierzy sztywności – wzór (38). Jednak przy znajomości macierzy \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} układu i przy jego liczbie stopni swobody równej tylko 2 odwrócenie macierzy sztywności bez pomocy komputera jest bardzo pracochłonne i znikają właściwie korzyści, o których była mowa wcześniej, wynikające ze stosowania liczb zespolonych. Oczywiście przy zastosowaniu obecnie dostępnych komputerów zadanie to staje się stosunkowo proste, wykracza ono niestety poza zakres tego wykładu.

Metody wykonywania pomiarów drgań

Cele i metody wykonywania pomiarów drgań

Pomiary drgań mechanicznych wykonuje się w celu:

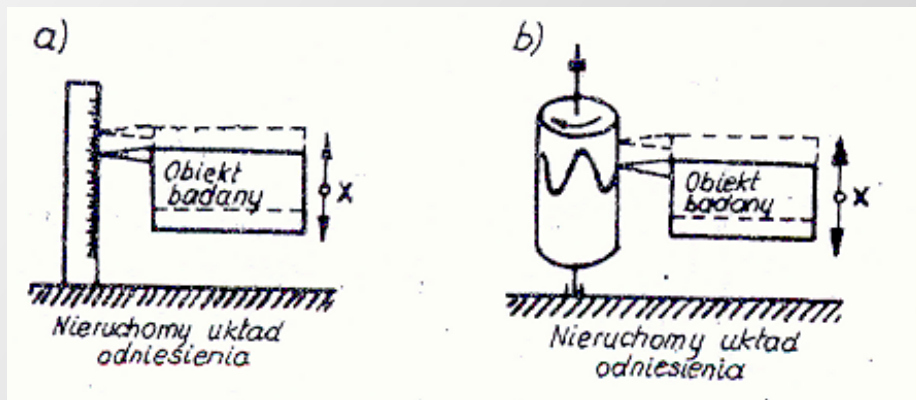
- wyznaczenia parametrów drgań (wychylenia, amplitudy, prędkości, przyspieszenia) i ich zmienności w czasie (charakterystyki cyklu zmian),
- wyznaczenia postaci drgań badanego obiektu (węzłów i strzałek),
- wyznaczenia rodzaju i intensywności drgań,
- ustalenia zależności drgań od obciążeń, kształtów i wymiarów konstrukcji oraz własności materiałów,
- określenia źródeł drgań (wymuszenia dynamiczne, kinematyczne, udary) i ich umiejscowienia,
- ustalenia wytycznych do zmniejszenia intensywności drgań poprzez zastosowanie izolacji, dodatkowego tłumienia lub dynamicznego eliminatora drgań,
- ustalenia ocen diagnostycznych co do stanu technicznego obiektu oraz niesprawności lub nieprawidłowości działania.

Głównym zadaniem prowadzenia diagnostyki drganiowej jest lepsza i łatwiejsza weryfikacja maszyn, których remont należy przeprowadzić lub w których wymagana jest wymiana łożysk. Wyniki pomiarów drgań dają bieżącą informację o stanie maszyny, dzięki czemu remont możemy zaplanować wtedy, gdy jest rzeczywiście wymagany.

Pomiary wykonuje się dla drgań liniowych i obrotowych (poprzecznych, podłużnych, giętnych, skrętnych). W zależności od potrzeb (kryteriów) mierzy się przede wszystkim przemieszczenia, prędkości lub przyspieszenia drgań.

Pomiary wykonuje się za pomocą układu pomiarowego złożonego z czujników umieszczonych w wybranych punktach badanego obiektu oraz urządzenia wskazującego, względnie rejestrującego mierzone wartości. Układ może zawierać analizator drgań, który bezpośrednio wypracowuje interesujące nas dane bez potrzeby żmudnej analizy wibrogramów, czyli otrzymanych z rejestratora wykresów zmienności w czasie mierzonych parametrów drgań.

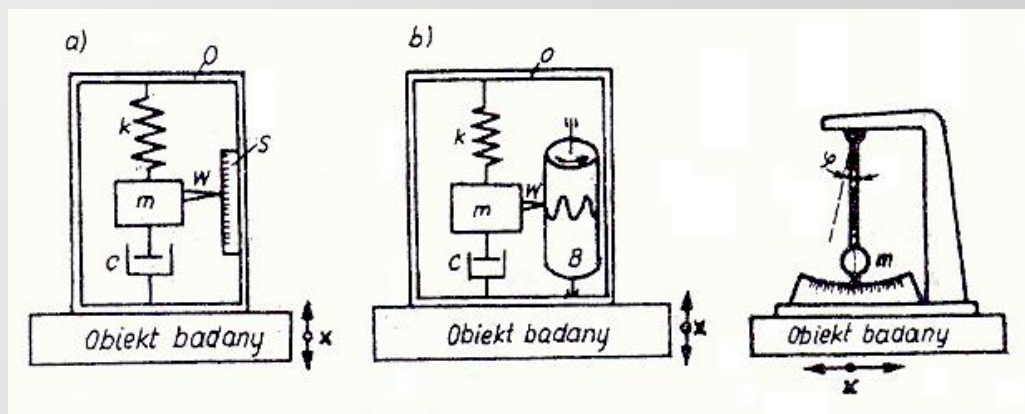
Są dwie podstawowe zasady pomiaru drgań. Pierwsza polega na pomiarze **przemieszczeń (prędkości, przyspieszeń)** obiektu względem nieruchomego układu odniesienia, a druga na pomiarze tych wielkości względem masy bezwładnika znajdującego się w przyrządzie pomiarowym, sztywno połączonym z badanym obiektem. Przyrządy (czujniki) działające według drugiej zasady nazywa się **inercyjnymi** lub **sejsmicznymi**.



Rys.1. Zasada pomiaru wychylenia x względem nieruchomego układu odniesienia:
a) wskazanie; b) rejestracja

Na rys.1 jest schematycznie przedstawiona zasada pomiaru wychylenia x drgającego obiektu względem nieruchomego układu odniesienia. Można albo tylko obserwować wskazania przyrządu (rys.a), albo rejestrować np. na taśmie przesuwającej się na powierzchni obracającego się bębna (rys.b).

Na rys.2 jest schematycznie przedstawiona zasada pomiaru wychylenia x względem masywnego bezwładnika m umieszczonego w obudowie o przyrządu. Przyrząd osadzony sztywno na obiekcie powtarza jego drgania (przesunięcia) x , natomiast zawieszony sprężynie bezwładnik inercyjnie zachowuje swoje nieruchome położenie wskazując na skali s wielkość w względnego przesunięcia (rys.a), które można również rejestrować (rys.b). Dla przesunięć poziomych x obiektu drgającego bezwładnik może być w postaci wahadła (rys.c).



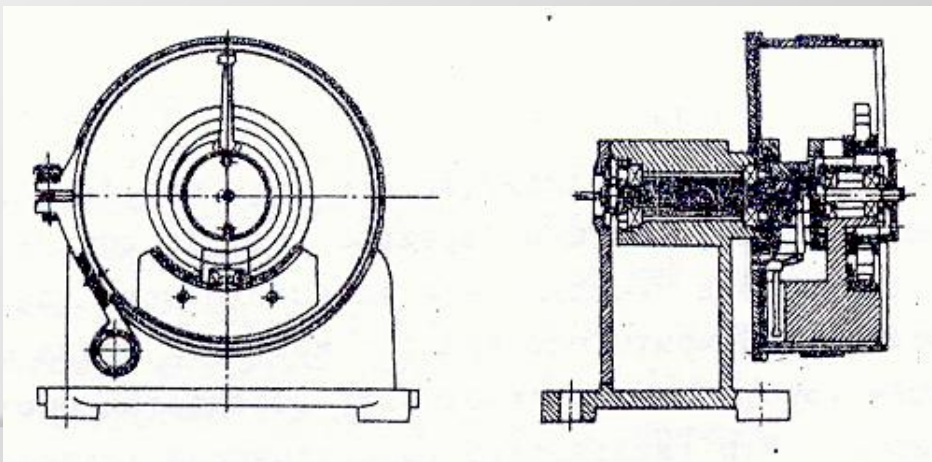
rys.2

Pierwsza zasada może być stosowana tylko w pewnych warunkach (np. laboratoryjnych), gdy możliwe jest ustalenie nieruchomego układu odniesienia. Dlatego prościej jest stosować drugą zasadę, ale z zastrzeżeniem, aby masa przyrządu była niewielka w stosunku do masy obiektu, gdyż inaczej mogłaby wpłynąć na zmianę parametrów drgań obiektu. Dlatego stosuje się odpowiednie, nieduże, lekkie czujniki wyniesione poza pomiarowy przyrząd rejestrujący, a połączone z nim kablami elektrycznymi lub falami radiowymi. W takim, przypadku rejestrator może być wielokanałowy - odbierający i rejestrujący sygnały od wielu czujników.

Ogólnie metody pomiarów drgań można podzielić na mechaniczne, wykorzystujące **czujniki inercyjne**, których wskazania są za pośrednictwem układu dźwigni mechanicznych przekazane do **rejestratora** drgań oraz elektryczne, wykorzystujące **różnego rodzaju czujniki przetwarzające mechaniczne parametry drgań na sygnały elektryczne**, przekazywane drogą kablową lub radiową do rejestratora. Najnowsza jest metoda laserowa.

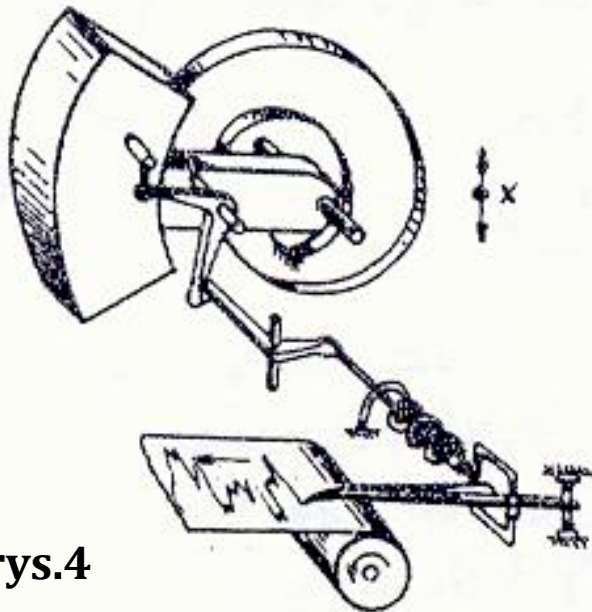
Mechaniczne wibro- i torsjografy

Z mechanicznych przyrządów pomiarów drgań najbardziej znane są wibro- i torsjografy Geigera, przeznaczone do pomiarów drgań liniowych (poprzecznych, wzdłużnych) i obrotowych (skrętnych). Na rys.3 jest przedstawiony wibrograf Geigera produkcji firmy Metallwerker KG-Meerane.



rys.3

W osłonie bębnowej połączonej z korpusem, przystosowanym do zamocowania przyrządu na badanym obiekcie, jest zamontowany bezwładnik w postaci wycinka masywnego pierścienia kołowego, który zawieszony na osi stanowi wahadło. Bezwładnik jest ułożyskowany i może wykonywać ruchy wahliwe względem osłony. Bezwładnik w swoim normalnym "zerowym" położeniu względem osłony jest utrzymywany za pomocą odpowiedniej sprężyny spiralnej i można go ustawić w pozycji dolnej (rys.3) do pomiaru drgań poziomych lub bocznej (rys.4) do pomiaru drgań pionowych, jak również pod dowolnym kątem stosownie do kierunku mierzonych drgań. Względne wahliwe ruchy bezwładnika są przekazywane za pomocą układu dźwigni odpowiednio powiększającego, wskazania do urządzenia rejestrującego drgania na przesuwnej taśmie papierowej, co schematycznie jest pokazane na rys.4.



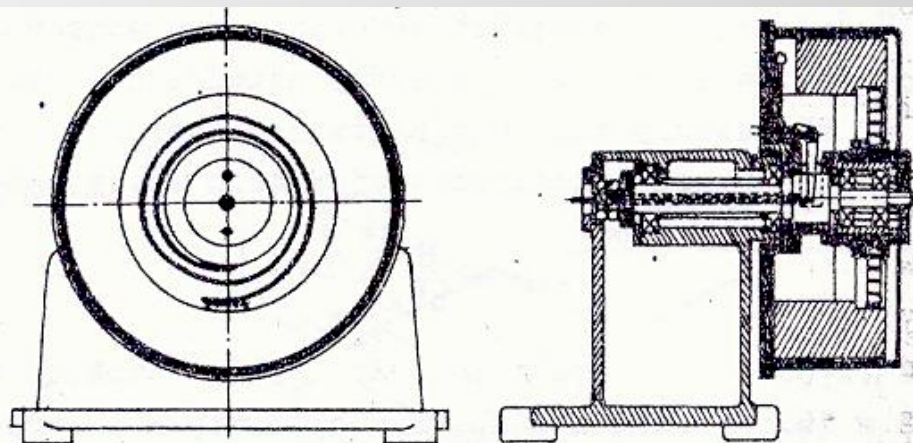
rys.4

Na taśmie obok wibrogramu jest przedstawiona graficznie również podstawa czasu przez znacznik uruchamiany od zegara w określonych odstępach czasu (np. 0,5; 1; 2 sekundy).

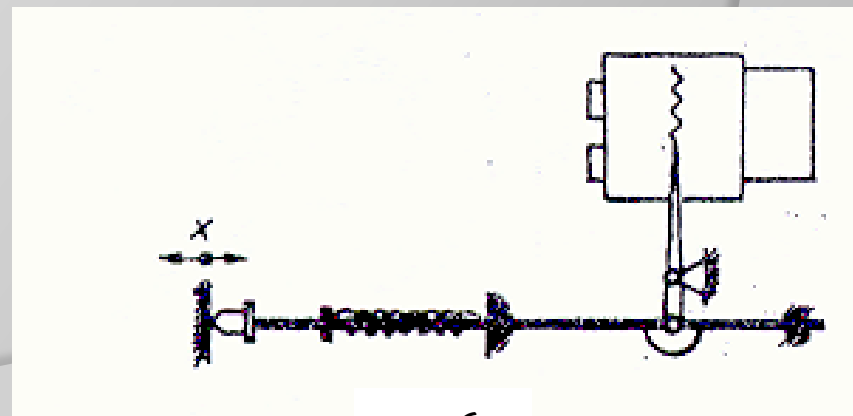
W torsjografie Geigera jest zamontowany bezwładnik w postaci masywnego pierścienia, czyli koła zamachowego (rys.5). Przyrząd jest budowany jako uniwersalny i wystarczy wymienić bezwładnik, aby uzyskać wibro- lub torsjograf, natomiast korpus i osłona bezwładnika wraz z układem dźwigniowym i rejestratorem pozostają bez zmiany.

W torsjografie bezwładnik znajduje się w bębnowej osłonie, jest w stosunku do niej ustalany w położeniu "zerowym" za pomocą sprężyny. Osłona ma możliwość obracania się w czasie pomiaru drgań skrętnych, jest napędzana wraz z bezwładnikiem od wału napędowego badanego obiektu za pomocą pasa. Jeżeli w wale napędowym występują drgania skrętne, a więc obraca się on niejednostajnie, to również w ruchu wirowym osłony występują odpowiadające tym drganiom zmiany prędkości kątowej, co przy jednostajnym ruchu obrotowym bezwładnika daje względne ruchy obrotowe bezwładnika i osłony przekazywane za pomocą układu dźwigniowego do rejestratora. Na taśmie rejestracyjnej, poza torsjogramem i podstawą czasu, są zaznaczane również obroty wału napędowego.

Wibro- torsjograf Geigera stracił obecnie swoje praktyczne znaczenie wobec pojawienia się innych nowoczesnych, wygodniejszych metod pomiarów drgań. Natomiast do szybkich, "podręcznych" pomiarów drgań używane są małe przenośne przyrządy zwane tastografami. Schemat działania tastografu przedstawiony jest na rys.6.



rys.5



rys.6

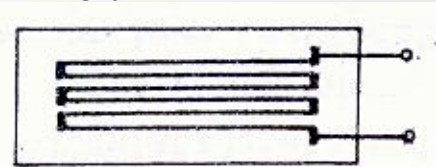
Tastograf jest trzymany w rękę przez osobę wykonującą pomiary, która spełnia rolę nieruchomego układu odniesienia. Z przyrządu wystaje iglica umieszczona w rurowej osłonie wraz ze sprężyną dociskającą końcówkę iglicy do badanego obiektu drgającego. Wywołane drganiami przemieszczenia x końcówki iglicy, za pomocą układu dźwigniowego powiększającego wskazanie, są przekazywane do rejestratora. Na przesuwnej taśmie papierowej jest wykreślany wibrogram oraz podstawa czasu.

Wykonane na wibro-, torsjo- lub tastografie wibrogramy wymagają następnie opracowania w celu wyznaczenia częstości i amplitud drgań, a w przypadku torsjogramu również rzędu składowej harmonicznej na podstawie ustalenia liczby okresów drgań między kolejnymi znakami obrotów wału.

Metody elektryczne pomiarów drgań

Tą ogólną nazwą można określić te metody pomiarów drgań, w których w skład układu pomiarowego wchodzi czujniki przetwarzające mechaniczne parametry drgań (przemieszczenia lub przyspieszenia określone odkształceniem drgającego obiektu, przyspieszenia) na **odpowiednie wielkości elektryczne**, możliwe do przekazania na odległość drogą kablową lub radiową do przyrządów mierzących wartości tych wielkości oraz je rejestrujących. Między wartościami wielkości elektrycznych a mierzonymi mechanicznymi parametrami drgań muszą zachodzić określone zależności ilościowe. W przeszłości wynaleziono bardzo wiele rodzajów i typów czujników przetwarzających wielkości mechaniczne na elektryczne, ale obecnie w zasadzie są stosowane tylko 3 rodzaje, a mianowicie tensometry elektrooporowe, czujniki piezoelektryczne i czujniki indukcyjne.

W tensometrach elektrooporowych jest wykorzystywane zjawisko zmiany oporności (przewodności) elektrycznej drutu przy jego odkształceniu sprężystym. Gdy drut jest rozciągany, to jego oporność elektryczna wzrasta. Tensometry są wykonywane z **cienkiego drutu oporowego** (najczęściej z konstantanu lub chromonikieliny), którego kilka odcinków o określonej długości, zwanej **bazą tensometru**, umieszcza się między dwoma warstwami folii z tworzywa sztucznego, łącząc je w jeden ciąg, skleja się i sprasowuje. Skrajne druciki mają wyprowadzenia do połączenia tensometru z kablami (rys.7).

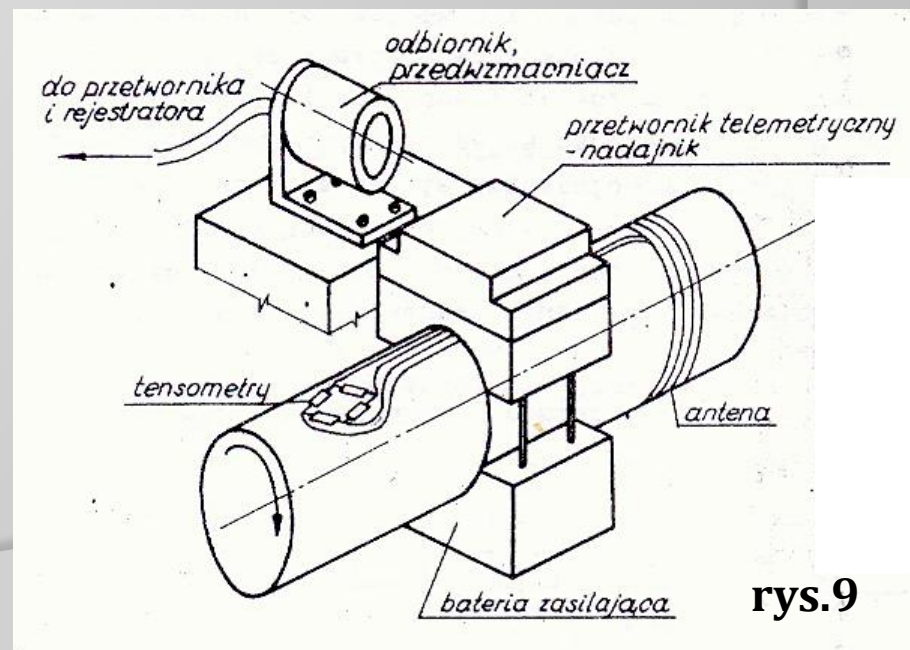
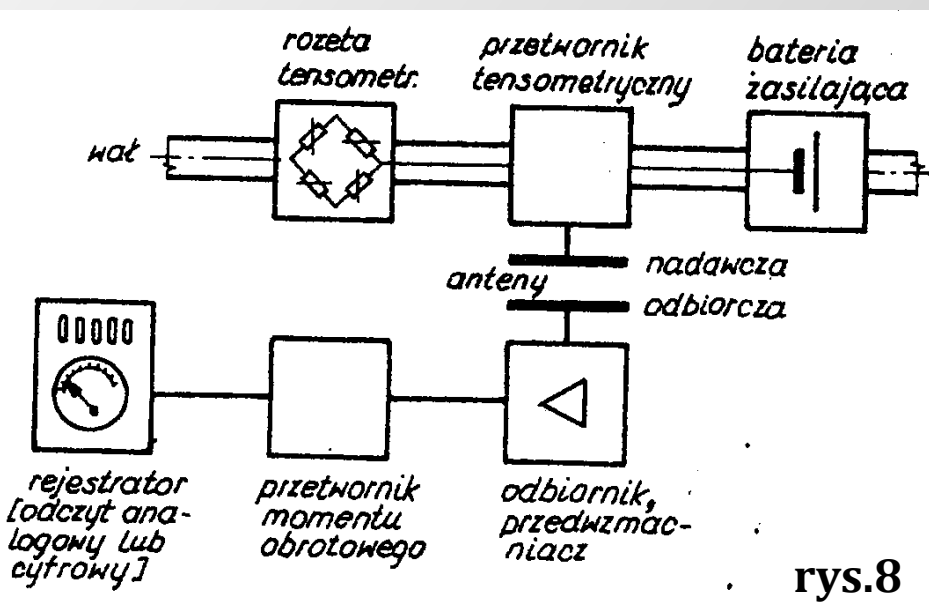


Tensometry przykleja się specjalnym klejem do powierzchni badanego obiektu z zachowaniem odizolowania ich od podłoża. Przyklejenie musi być, na tyle dobre, aby tensometr odkształcał się (wydłużał lub skracał) wraz z odkształceniem się tego obiektu podczas drgań. Tensometr jest włączony do układu **mostka elektrycznego** umożliwiającego pomiar wartości ΔR **zmiany oporności tensometru** w stosunku do jego normalnej oporności **R**. Wartość tej zmiany po uwzględnieniu **współczynnika k czułości** tensometru oraz charakterystyki mostka pomiarowego świadczy o wydłużeniu względnym ϵ tensometru, a więc i badanego obiektu. Nowoczesne mostki tensometryczne podają automatycznie wartości zmierzonych odkształceń oraz przekazują je do rejestratora. W przypadku drgań zliczają liczbę zmian odkształceń w jednostce czasu podając częstość drgań. Metodą tensometryczną można mierzyć częstości drgań do rzędu 20-50 Hz w zależności od charakterystyki aparatury elektrycznej.

Zaletą metody tensometrycznej jest bardzo mała masa czujnika (tensometru) nie mająca wpływu na parametry drgań badanego obiektu. Tensometry można nakleić w nawet trudno dostępnych miejscach.

Wadą tensometrów elektrooporowych jest ich wrażliwość na zmiany temperatury. Aby wyeliminować wpływ temperatury na wskazania tensometru stosuje się układy kompensujące z dwu lub więcej tensometrów.

Metodą tensometryczną można mierzyć zarówno drgania liniowe (poprzeczne, podłużne), jak i skrętne. Dla pomiaru drgań skrętnych tensometry nakleja się na wał napędowy. Powstaje jednak wówczas problem połączenia wirujących wraz z wałem tensometrów z mostkiem pomiarowym. Można to zrobić za pośrednictwem pierścieni umieszczonych na obwodzie wału i szczotek ślizgowych, względnie za pomocą fal radiowych, ściślej biorąc - sprzężenia indukcyjnego lub pojemnościowego. W tym drugim przypadku na wale musi być zamontowany specjalny układ telemetryczny (rys.8, 9).

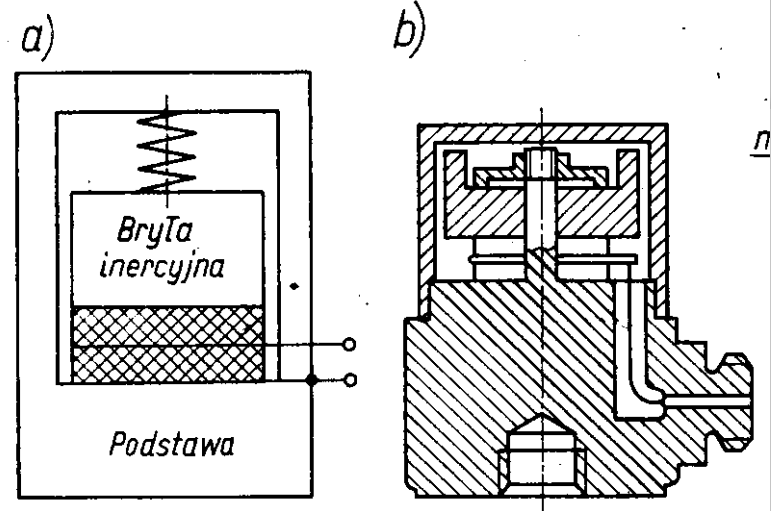
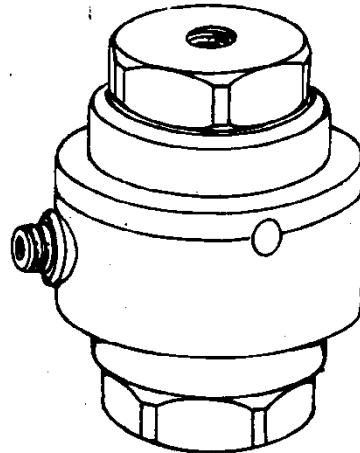
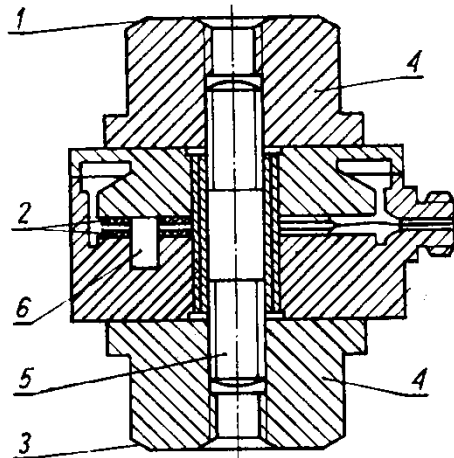
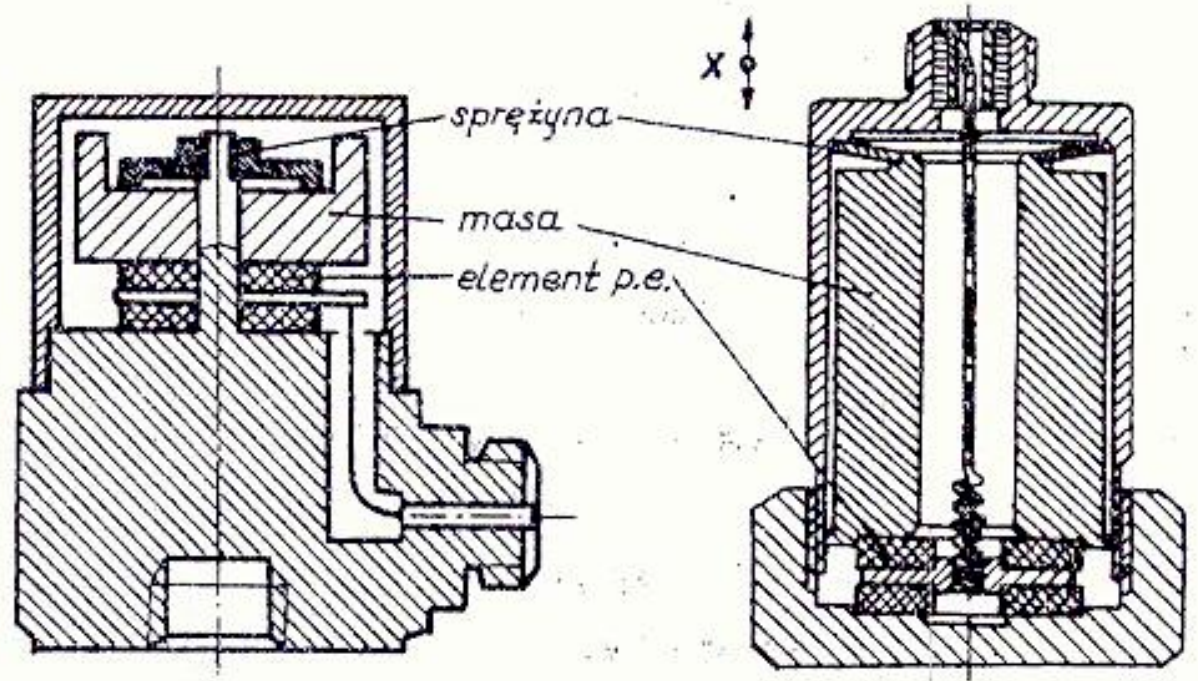
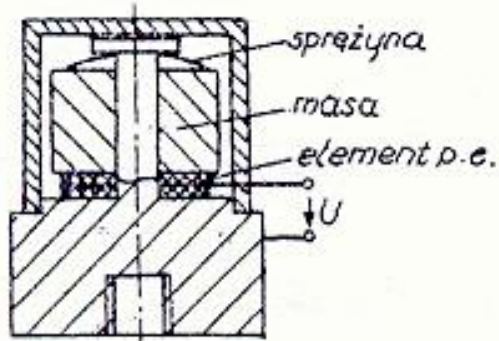


Na wale są naklejone 4 tensometry ułożone i połączone w rozetę. W urządzeniu telemetrycznym znajduje się przetwornik zmiany napięcia w tensometrach na częstotliwość przekazywaną poprzez antenę nawiniętą na wale do odbiornika połączonego z przedwzmacniaczem sygnału przejętego przez antenę. Ten sygnał częstotliwościowy jest z kolei zamieniany w przetworniku na wartości mierzonego momentu obrotowego w wale i przekazywany do rejestratora magnetycznego albo przez przetwornik analogowo-cyfrowy do komputera. Odczyt wartości może być analogowy lub cyfrowy. W skład układu jest włączony również pomiar obrotów nieodzowny do analizy drgań skrętnych.

W czujnikach piezoelektrycznych jest wykorzystywane zjawisko fizyczne powstawania ładunków elektrycznych przeciwnych znaków na ściankach piezoelementu pod działaniem sił ściskających lub rozciągających. Powstaje w ten sposób potencjał elektryczny o ładunku proporcjonalnym do wielkości odkształcenia. Jeżeli będzie to siła bezwładności pochodząca od masy wykonującej drgania, to mierzone napięcie będzie proporcjonalne do przyspieszenia ruchu drgającego masy. Czujnik piezoelektryczny jest więc **przyspieszeniemierzem** (akcelerometrem). Mierzone wartości przyspieszeń są następnie poprzez odpowiednie układy całkujące przeliczane na odpowiadające im wartości prędkości i przemieszczeń (amplitud). Jako materiał piezoelektryczny głównie są stosowane **kryształy kwarcu, cyrkonianutytanianu ołowiu, tytanianu baru oraz soli Seignette'a**.

Na rys.10 są pokazano przykłady czujników piezoelektrycznych. Podstawowymi elementami czujnika są płytki wycięte z materiału piezoelektrycznego, oddzielone blaszką metalową oraz odpowiednio duża masa dociskana do płytek sprężyną. Całość znajduje się wewnątrz metalowej składanej obudowy.

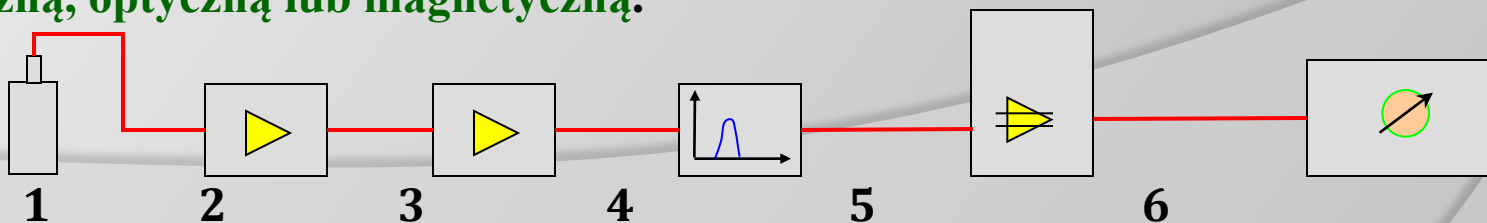
rys.10



Od blaszki metalowej oraz obudowy wyprowadza się przewody elektryczne (kabel) do elektrycznego miernika napięcia. Czujniki piezoelektryczne są wykonywane w różnych rozmiarach o różnych masach od 2 do kilkuset gram, stosowane do pomiarów drgań o częstościach do 100 kHz. Stosownie do wielkości badanego obiektu jego masy i spodziewanej częstości drgań dobiera się z typoszeregu odpowiedni czujnik, zwracając uwagę na jego częstość drgań własnych, aby uniknąć rezonansu. Czujnik mocuje się do obiektu za pomocą wkrętu, magnesu, kleju albo specjalnej masy plastycznej (kitu).

Układ pomiarowy zawiera

- 1) czujnik piezoelektryczny;
- 2) przedwzmacniacz w którym następuje zmiana ładunku na napięcie i wstępne wzmocnienie sygnału;
- 3) wzmacniacz dla wzmocnienia sygnału pomiarowego;
- 4) filtr przeznaczony do wycięcia niepożądanych zakłóceń oraz wybrania interesujących nas zakresów częstości lub częstości dyskretnych;
- 5) analizator w którym przeprowadza się analizę częstotliwościowo-amplitudową mierzonych drgań;
- 6) rejestrator zapisujący mierzone parametry; zapis może być wykonywany metodą graficzną, optyczną lub magnetyczną.



Zarejestrowane wartości pomiarowe mogą być następnie odtwarzane na oscyloskopie lub zapisane na papierze do analitycznej oceny drgań. Mogą być również za pomocą przetwornika analogowo-cyfrowego zarejestrowane w komputerze, a następnie z wykorzystaniem odpowiedniego programu komputerowego poddane analizie, a wyniki wydrukowane na monitorze lub drukarce. W układ pomiarowy może być włączonych stosownie do potrzeb więcej czujników odpowiednio rozmieszczonych na obiekcie. W efekcie pozwala to na określanie fazy oraz formy drgań i umożliwia wyznaczenie częstości rezonansowych.

Do pomiaru drgań skrętnych stosuje się również **czujniki indukcyjno-bezwładnościowe** firmy Hottinger. Muszą być one umieszczone w osi wału, czyli na jego końcu. Pozwalają mierzyć amplitudy drgań do $\pm 3^\circ$.

Metoda laserowa pomiaru drgań

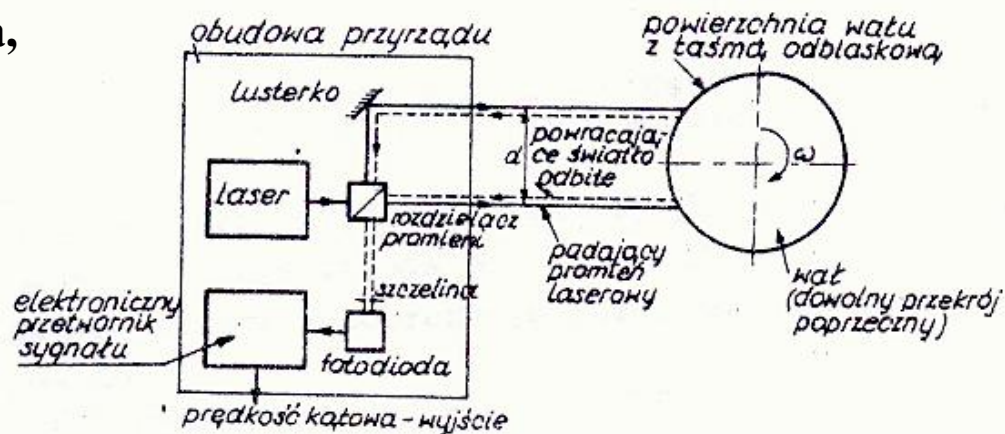
Najnowszą metodą pomiarów drgań jest metoda laserowa.

Jest to metoda bezkontaktowa pozwalająca mierzyć prędkość obrotową oraz drgania wału - wzdłużne, poprzeczne (giętne wywołane niewyważoną masą) i skrętne (wywołane zmiennym momentem obrotowym). Nie można natomiast mierzyć statycznego skrzywienia wału dla pomiaru mocy.

Na obwodzie wału jest nałożona samoprzylepna taśma ze specjalnej folii odblaskowej. Na folię kieruje się dwarozdzielone promienie lasera krystalicznego, prowadzone równoległe w określonej odległości d , które po odbiciu od folii wracają do aparatu (rys.11) i są po połączeniu skierowane na fotodiode. Dla połączonych promieni zachodzi zjawisko Dopplera i wynikowa częstotliwość jest proporcjonalna do prędkości kątowej ω obracającego się wału. Światło padające na fotodiode zmienia odpowiednio natężenie prądu przepływającego przez nią, który w elektronicznym przetworniku wypracowuje sygnał proporcjonalny do prędkości kątowej ω wału, a przy jej zmianach - parametry drgań skrętnych wału.

Elementy pokazane na rys.11 ze schematycznym wskazaniem obudowy stanowią lekki przyrząd, który może być podczas pomiaru trzymany w ręku lub na statywie w odległości 5-50 cm od badanego obiektu. Jest on połączony kablem z aparatem właściwym wypracowującym dane z wskaźnikiem cyfrowym pomierzonych wartości.

Ze względu na niebezpieczeństwo uszkodzenia wzroku promieniami laserowymi, przyrząd przenośny ma odpowiednie zabezpieczenia, ale wymaga też odpowiedniej ostrożności przy posługiwaniu się nim. Do włączenia lasera służy odrębny klucz, a gdy laser nie otrzymuje promienia odbitego od folii odblaskowej na wale, to wyłącza się sam.



Czujniki elektrodynamiczne i przetworniki elektromagnetyczne

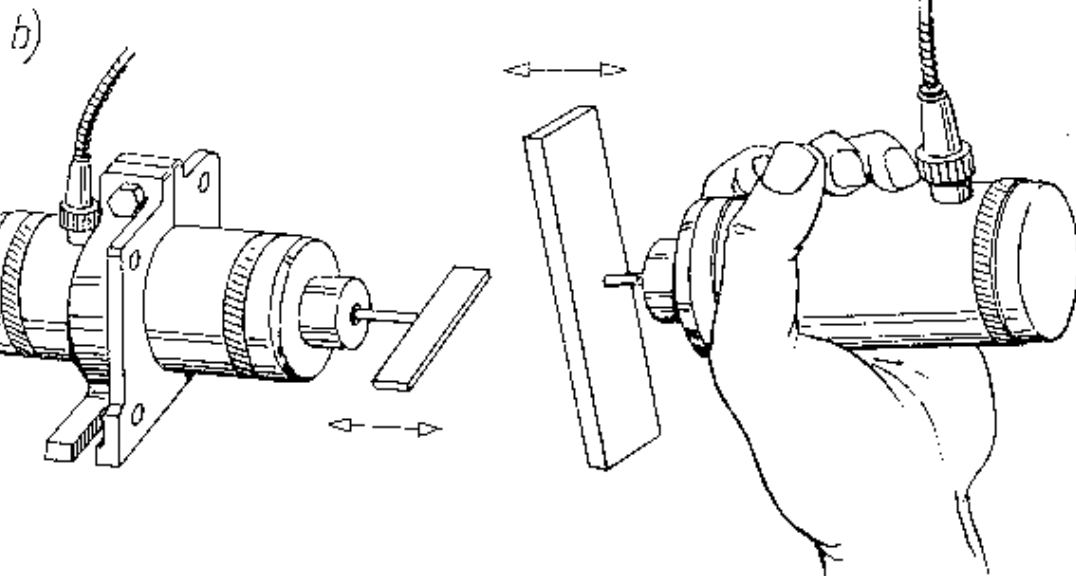
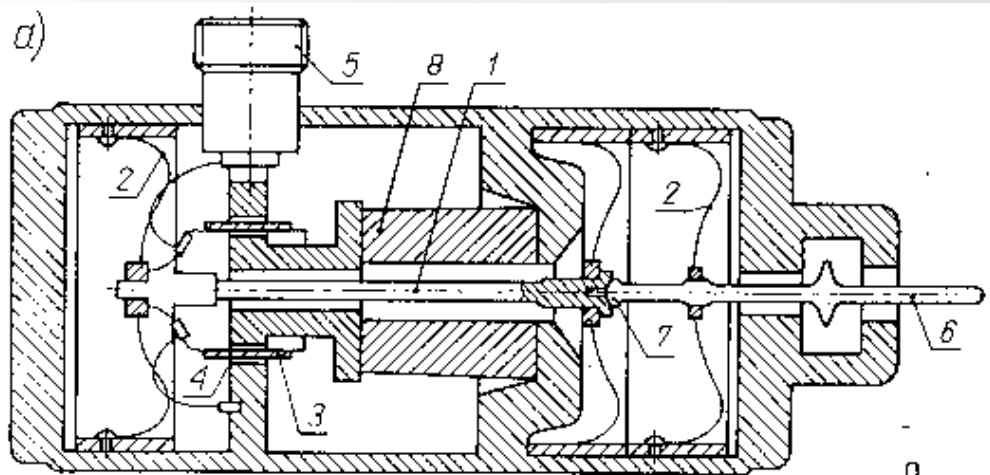
Czujniki elektrodynamiczne są budowane w dwóch wersjach: do pomiaru drgań **względnych i bezwzględnych**.

Siła elektromotoryczna jest proporcjonalna do prędkości względnej cewki i magnesu (prędkości cewki w polu nieruchomego magnesu lub prędkości magnesu względem nieruchomej cewki).

W pierwszym rozwiązaniu (rys. 12) trzpień elementu ruchomego czujnika (zwykle cewki) styka się z obiektem drgającym. A więc ten czujnik mierzy drgania badanego obiektu względem układu odniesienia, w którym jest zamocowana obudowa czujnika. Układ odniesienia zwykle nie jest nieruchomy; co może wprowadzić pewien błąd przy pomiarze drgań, gdyż wówczas będą mierzone drgania obiektu względem ruchomej obudowy czujnika. Jeśli jednak częstość obudowy, np. przy chwyceniu ręką jest mała względem częstości mierzonej, to błąd ten nie jest duży. Rysunek 12 przedstawia czujnik elektrodynamiczny drgań względnych typu PR 9261 firmy Philips.

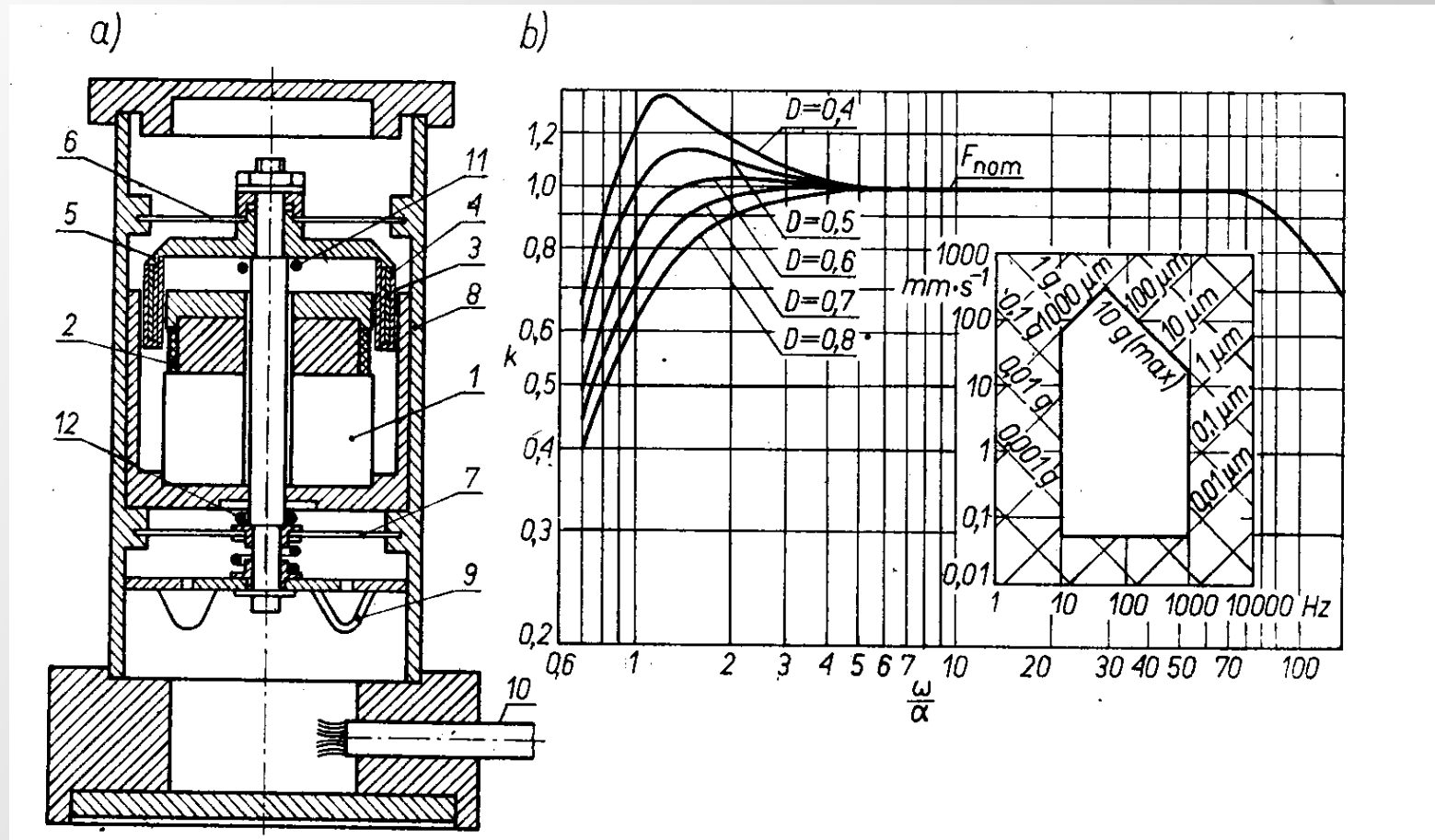
Natomiast czujnik drgań bezwzględnych (rys.13) nie wymaga kłopotliwego układu odniesienia, znacznie ułatwiając pomiary.

Rysunek 13a przedstawia czujnik elektrodynamiczny drgań bezwzględnych typu PR 9266 firmy Philips, a rys. 13b przedstawia charakterystykę czułości w funkcji częstości.



Rys. 12

- 1- trzpień układu ruchomego,
- 2 - sprężyny membranowe,
- 3 - cewka,
- 4 - szczelina powietrzna,
- 5 - gniazdo do przyłączenia kabla,
- 6 - końcówka trzpienia,
- 7 - połączenie kulkowe,
- 8 - magnes trwały.



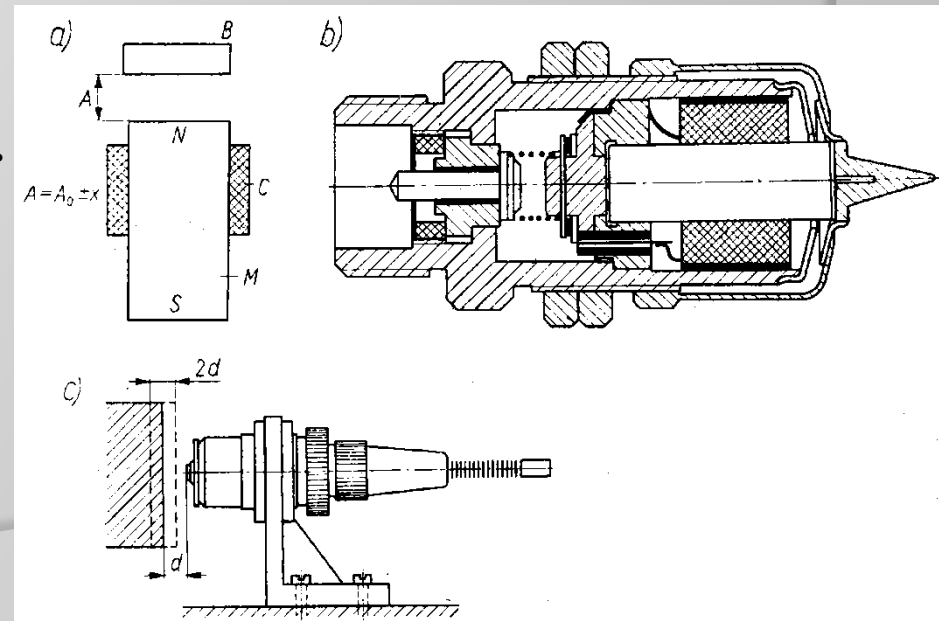
Rys. 13
 1 - magnes trwały, 2 - cewka korekcyjna, 3 - cewka pomiarowa. 4 - dodatkowa cewka tłumiąca, 5 - tuleja tłumiąca, 6, 7 - sprężyny membranowe, 8 - obudowa, 9 - prowadnice, 10 - kabel, 11, 12 - ograniczniki.

Jeżeli częstość mierzonych drgań jest odpowiednio duża w porównaniu z częstością własną czujnika, jego masa sejsmiczna jest praktycznie: nieruchoma, a zatem siła elektromotoryczna indukująca się w cewce jest proporcjonalna do bezwzględnej prędkości mierzonych drgań.

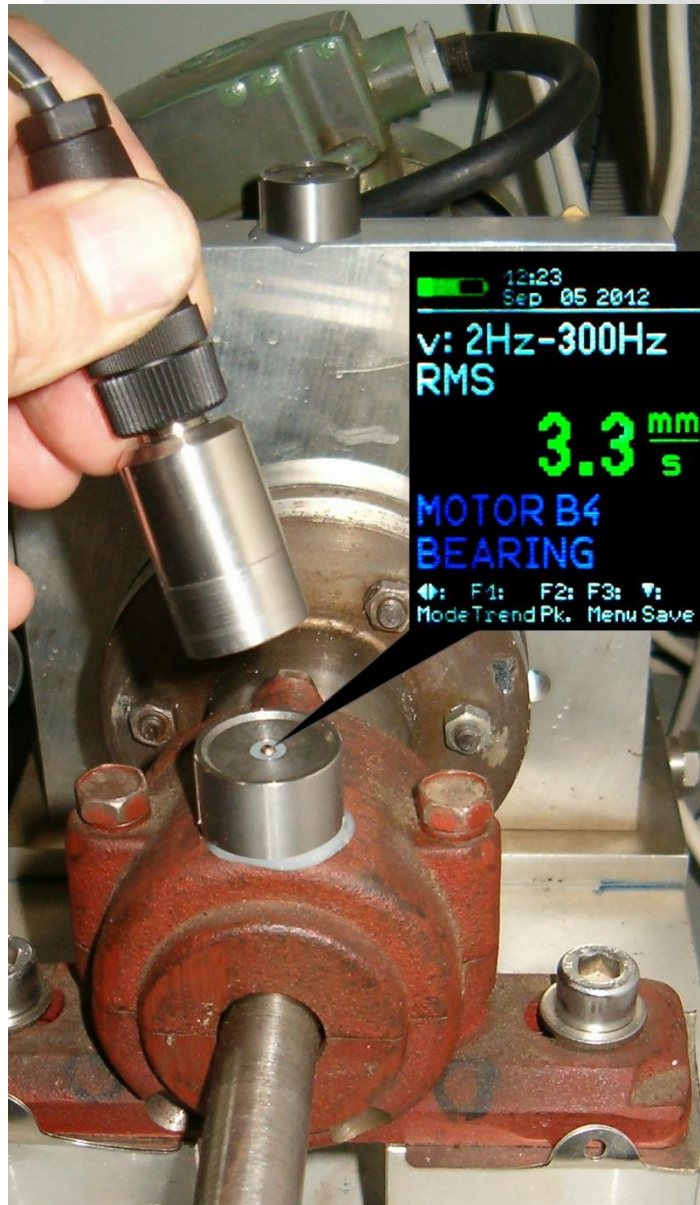
W celu pomiaru przemieszczenia lub przyspieszenia, napięcie wyjściowe przetwornika można odpowiednio scałkować lub zróżniczkować.

Przetwornik elektromagnetyczny. Umożliwia on bezstykowy pomiar drgań. W stalowej obudowie znajduje się magnes trwały i cewka. Przy zmianie położenia ferromagnetycznego ciała B (może nim być drgający obiekt) zmienia się strumień magnetyczny przenikający cewkę (rys.14). Rysunek 14 przedstawia przetwornik elektromagnetyczny, przy czym rys. 14a przedstawia zasadę działania, rys. 14b -przetwornik typu PR 9262 firmy Philips, a rys. 14c - przykład zamocowania.

W cewce indukuje się siła elektromotoryczna, proporcjonalna do zmian strumienia w czasie. Dokładność czujników elektromagnetycznych jest mniejsza niż elektrodynamicznych i nadają się one raczej do wykrywania drgań niż ich badań jakościowych.



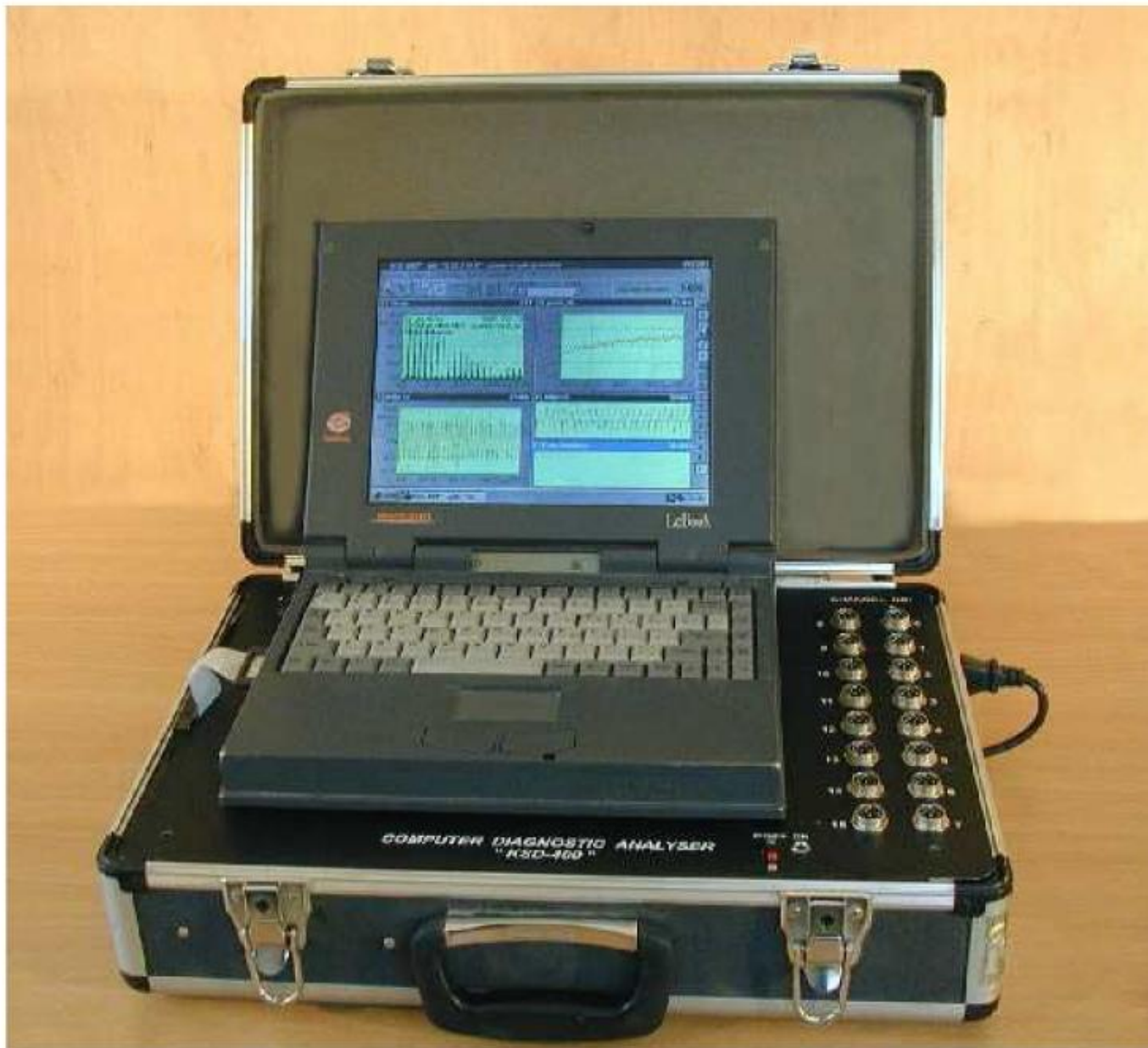
Mierniki VM22 / VM24 / VM25



- Monitorowanie maszyn wirujących i tłokowych według ISO 10816-1/-6 etc.
- Ocena stanu łożysk tocznych według VDI 3832 etc. (VM24 and VM25).
- Wyświetlanie przebiegów na wyświetlaczu.
- Analiza częstotliwości (VM25).
- Bezdotykowy pomiar prędkości obrotowej za pomocą lasera (VM25).
- Czujnik temperatury na podczerwień (VM25).
- Elektroniczna identyfikacja punktów pomiarowych za pomocą znaczników VIMD w podstawie czujnika.
- Interfejs USB, oprogramowanie komputerowe do pomiaru i zarządzania punktami pomiarowymi w konwencji Mimosa i archiwizacji danych pomiarowych.
- Kieszonkowy rozmiar.



Przenośny analizator dźwięku i drgań SVAN 912AE



rys. 7. Widok analizatora diagnostycznego KSD-400.

Podstawowymi elementami analizatora są:

- ❖ czujniki przekształcające wielkości mechaniczne na elektryczne sygnały;
- ❖ wzmacniacze pomiarowe dopasowujące sygnały z czujników do współpracy z kartą przetwornika AC (są to wymienne panele pozwalające dopasować poszczególne tory pomiarowe do potrzeb użytkownika);
- ❖ 16-kanalowa karta przetwornika AC o standardzie PCMCIA typu NIDAQ-700 lub 6024E;
- ❖ komputer klasy IBM typu "notebook" z wejściem typu USB (wraz z oprogramowaniem), jest on niezależnym urządzeniem zestawu z możliwością wykorzystania do obsługi dowolnych programów.

PARAMETRY TECHNICZNE.

Parametry cyfrowej obróbki sygnałów:

- Ilość kanałów pomiarowych: 16;
- Ilość próbek na kanał: 4 – 262144;
- Częstotliwość próbkowania: 16 – 100000 lub 200000;
- Odstępy pomiarów czasowych: 0.1 - 3600 s;
- Odstęp pomiaru w funkcji obrotów: 10 - 500 obr/min;
- Tryb zapisu na dysk: binarny oraz tekstowy.

Zakresy pomiarowe.

- Zakres pomiarowy częstotliwości:
 - drgania bezwzględne: 4 - 15.000 Hz (przy czujnikach CP-03) (-3 dB);
 - drgania względne: 0 - 10.000 Hz (-3dB);
- Zakres pomiarowy przyspieszeń: 0 - 70 m/s² (RMS);
- Zakres pomiarowy prędkości drgań: 0 - 70 mm/s (RMS);
- Zakres pomiarowy amplitudy drgań: 0 - 700 μm (RMS);
- Zakres przesunięć względnych: 0,5 - 3,2 mm;
- Zakresy innych czujników wg życzeń użytkownika.

Analizator drgań firmy Brüel & Kjaer

Opis systemu

Analizator drgań to 6 kanałowy rejestrator typu 3050-A-60 Moduł LAN-XI 51.2kHz (CCLD, V) firmy Brüel & Kjaer. W zestawie znajduje się również kalibrator akustyczny 4231 oraz kalibracyjny wzbudnik drgań 4294. Urządzenie posiada sondę tacho MM0360, zestaw mikrofonów 4189-A-021 oraz akcelerometr 4514-B. Pomiar i analizę drgań dokonuje się specjalistycznym oprogramowaniem (program analizy FFT, program analizy rzędów, rejestrator sygnałów, PULSE time). Całością steruje stacja centralna (laptop Latitude E6510 firmy Dell).



Parametry

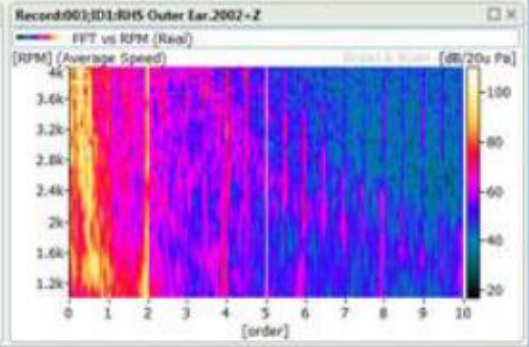
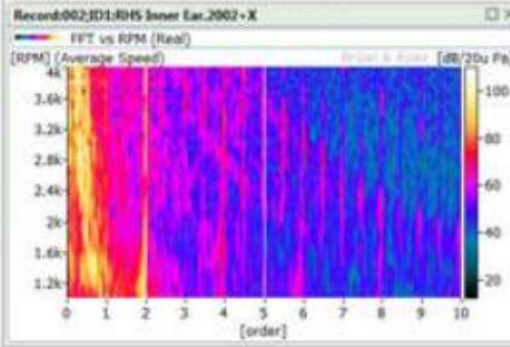
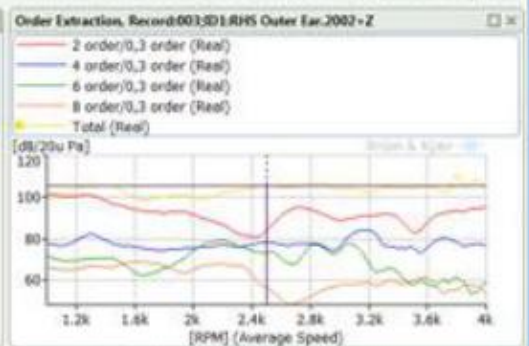
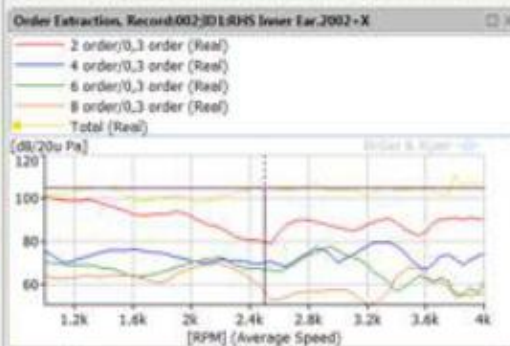
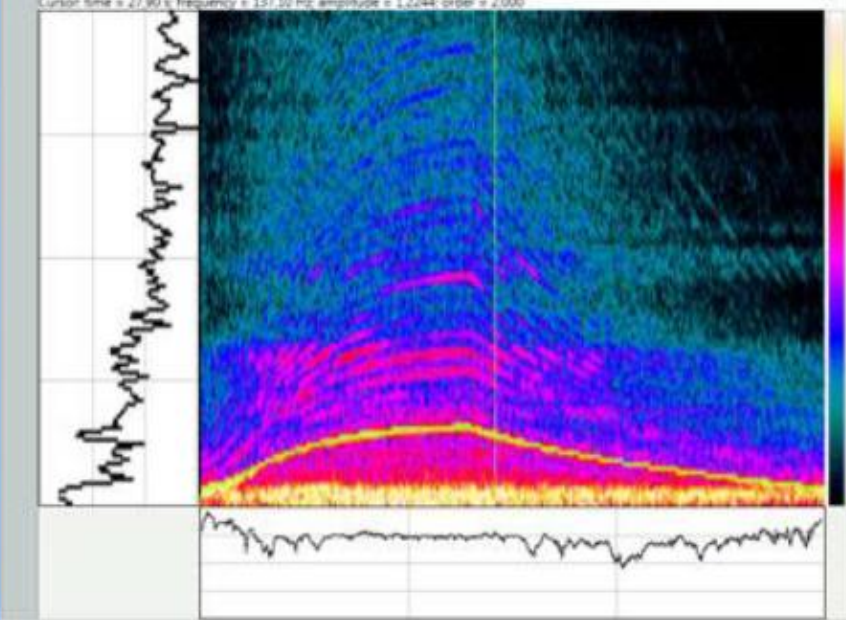
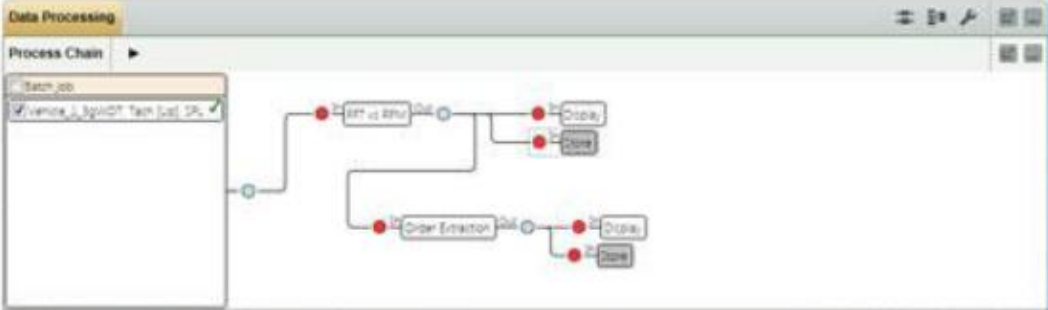
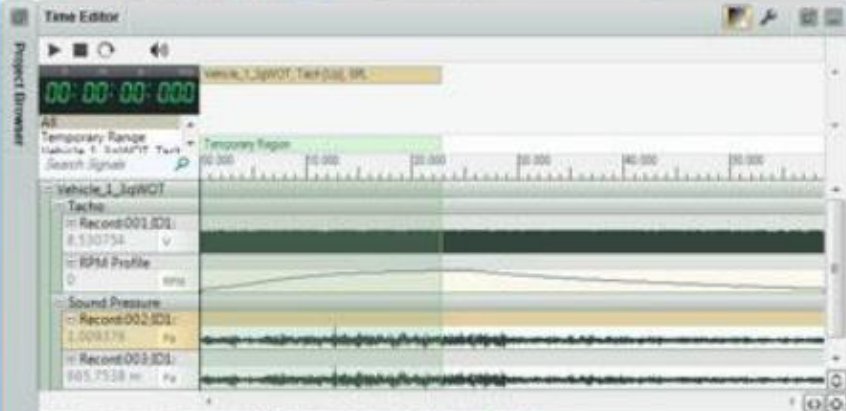
Zakres napięć wyjściowych typowego akcelerometru/mikrofonu z wbudowanym przedwzmacniaczem CCLD wynosić 120 dB szerokopasmowo 10 Hz - 51 kHz, oraz 160 dB wąskopasmowo w pasmach 6 Hz. Maksymalne napięcie szczytowe wynosi 10 V a liniowość $\pm 0,03$ dB w zakresie 120 dB. Przetwarzanie danych w analizatorze jest 24 bitowe. Pasma rejestrowanych częstotliwości wynosi DC – 51 kHz.

Kalibrator akustyczny jest klasy 1 i LS ma dwa poziomy sygnału wzorcowego 94 dB i 114 dB przy częstotliwości 1kHz. Posiada świadectwo wzorcowania GUM. Dokładność kalibracji jest rzędu $\pm 0,2$ dB.

Kalibracyjny wzbudnik drgań generuje sygnał drganiowy o częstotliwości $159,15 \text{ Hz} \pm 0,02\%$ (1000 rad/s) i amplitudzie $10 \text{ m/s}^2 \text{ (rms)} \pm 3\%$.

Oprogramowanie

- Oprogramowanie do analiz w 6 kanałach w czasie rzeczywistym zapewnia:
- Analizę szerokopasmową oraz FFT zarejestrowanych sygnałów w sześciu kanałach, w czasie rzeczywistym, FFT: 50-6400 linii, widma i funkcje wzajemne (w tym korelacyjne).
 - Konwersją zarejestrowanych danych do uznanych formatów (Universal File Format (.uff), ASCII, Binary, Time Data Format (.tdf), Wave file (.wav), *.mat, *.hdf, *.ati),
 - Detekcję i sygnalizację uszkodzeń okablowania oraz zakłóceń elektromagnetycznych we wszystkich kanałach w oprogramowaniu i układach wejściowych, podobnie sygnalizacja przesterowań zarówno na panelu przednim rejestratora jak i w oprogramowaniu.
 - Podczas rejestracji system zapewnia podstawową analizę (oscyloskop, FFT, przebieg czasowy) podczas jej trwania, z podsłuchem wybranych kanałów.



Project Browser

- Project 1
 - Core
 - New Test
 - Imported Data
 - Vehicle_3_3gWOT_dot
 - Tacho
 - Sound Pressure
 - RHS Inner Ear
 - RHS Outer Ear
 - Acceleration
 - Vehicle_2_3gWOT_dot
 - Tacho
 - Sound Pressure
 - RHS Inner Ear
 - RHS Outer Ear
 - Acceleration
 - Vehicle_4_3gWOT_dot
 - Tacho
 - Sound Pressure
 - RHS Inner Ear
 - RHS Outer Ear
 - Acceleration
 - Vehicle_3_3gWOT_dot
 - Tacho
 - Sound Pressure
 - RHS Inner Ear
 - RHS Outer Ear
 - Acceleration
 - New Test Setup
 - Processed Data
 - Preliminary Analysis
 - Voltage
 - Sound Pressure
 - RHS Inner Ear
 - RHS Outer Ear
 - A
 - Voltage
 - Sound Pressure
 - RHS Inner Ear
 - RHS Outer Ear

Time Editor

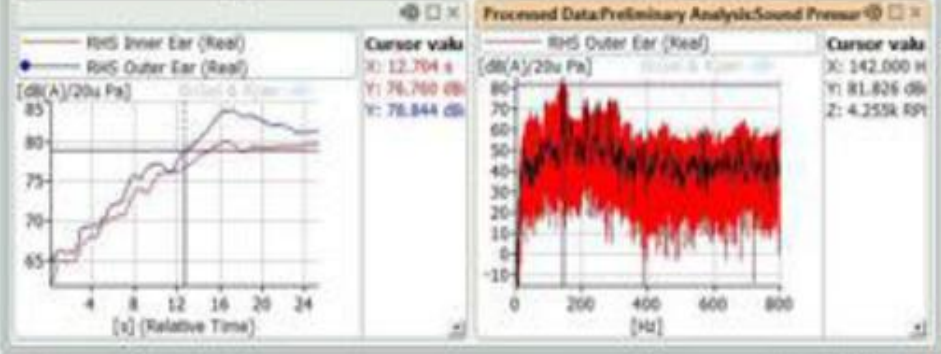
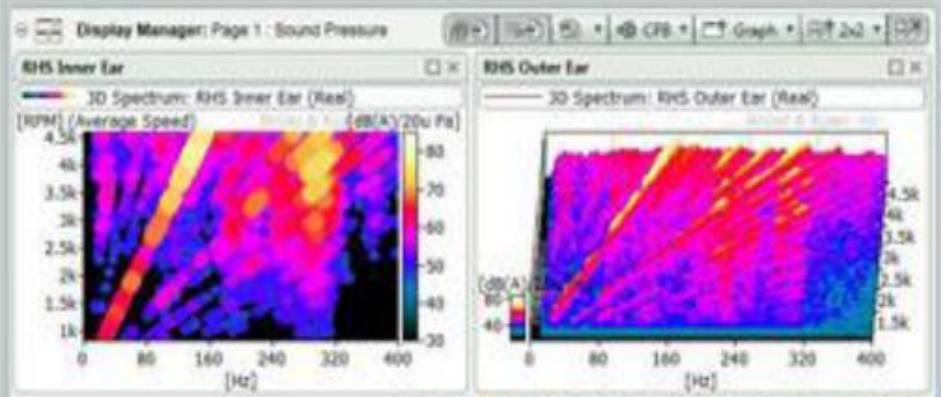
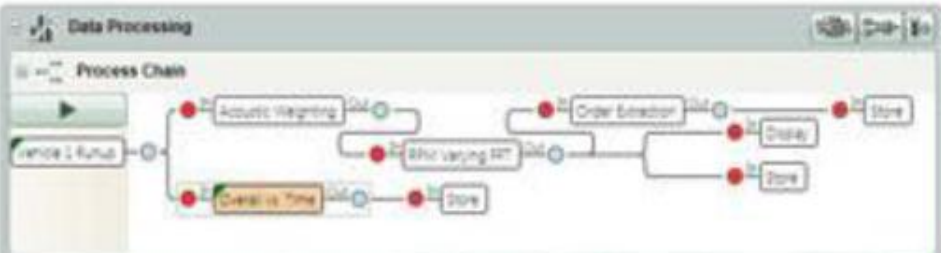
00:00:58.999

Vehicle 1 Runup
Vehicle 1 Run-Down

Search Signal

Vehicle_3_3gWOT_dot

- Tacho
 - Engine Tacho
 - RPM Profile
- Sound Pressure
 - RHS Inner Ear
 - RHS Outer Ear
- Acceleration
 - Steering Wheel X
 - Steering Wheel Y
 - Steering Wheel Z
 - Gear Stick X
 - Gear Stick Y



1	-3050-B-060-	6-kanalowy Moduł LAN-XI 51.2kHz (CCLD, V)	54.230,08
2	-7770--N6-	PULSE FFT Analysis, 1-6 Channel Node-locked License	44.674,22
3	M1-7770--N6-	Annual Software Maintenance and Support Agreement for PULSE FFT Analysis, 1-6 Channel Node-locked License	7.878,15
4	-7702--N2-	PULSE Order Analysis, 1-2 Channel Node-locked License	25.750,66
5	M1-7702--N2-	Annual Software Maintenance and Support Agreement for PULSE Order Analysis, 1-2 Channel Node-locked License	4.547,31
6	-7708--N6-	PULSE Time Data Recorder 1-6 Channel, Node-locked License	18.421,71
7	M1-7708--N6-	Annual Software Maintenance and Support Agreement for PULSE Time Data Recorder 1-6 Channel, Node-locked License	3.254,58
8	-7789--N-	PULSE Time, Node-locked License	13.173,30
9	M1-7789--N-	Annual Software Maintenance and Support Agreement for PULSE Time, Node-locked License	2.325,93
10	-4231---	Kalibrator akust. klasy 1 i LS, 94 i 114 dB, 1 kHz	5.401,05
11	-4294---	Kalibracyjny wzbudnik drgan	11.019,57
12	AO-0087-D-050-	Kabel ekranowany BNC/BNC, 5 m	1.937,25
13	AO-0587-D-050-	Cable single screen coax, SMB (F) to BNC (M), 5m (16,7ft), max.+105°C (221°F)	366,54
14	MM-0360---	CCLD Laser Tacho probe, with retro reflective tape 1,0meter. (without cables)	2.710,92
15	-4189-A-021-	Zestaw z TEDS, mikrofon 4189 + przedwzmacniacz 2671	14.477,35
16	-4514-B--	Akcel. DeltaTron, 10mV/g, TEDS, izolowany, bez kabla, złącze z góry	5.503,02
17	AO-0531-D-050-	Kabel akcelerometru wtyki 10-32 UNF i BNC, 5 m	346,86
18	-9999---	Jednostka centralna systemu Pulse	6.150,00
19	M1-3560--005-	PULSE Software Agreement for Educational Partners, 5 years	0,00

222.168,50

Drgania parametryczne. Równania Mathieu i Hilla – interpretacja rozwiązań. Wpływ tłumienia.

W dotychczas rozważanych zagadnieniach parametry układu były stałe lub można było pominąć ich zmienność przy zachowaniu dostatecznej dokładności wyniku. Są jednak zagadnienia, w których uproszczenie to może w sposób istotny oddalić wyniki analizy od rzeczywistego przebiegu ruchu, przeocząc przy tym nowe zjawiska ważne nie tylko poznawczo ale i praktycznie. Należą do nich szczególnie zagadnienia stateczności dynamicznej, ruchu układów o zmiennej masie (rakiety) lub zmiennym momencie zredukowanym (mechanizmy korbowe i inne). Zachodzi wtedy potrzeba uwzględnienia zmienności parametrów układu, a przez to zmienności współczynników równań opisujących jego ruch.

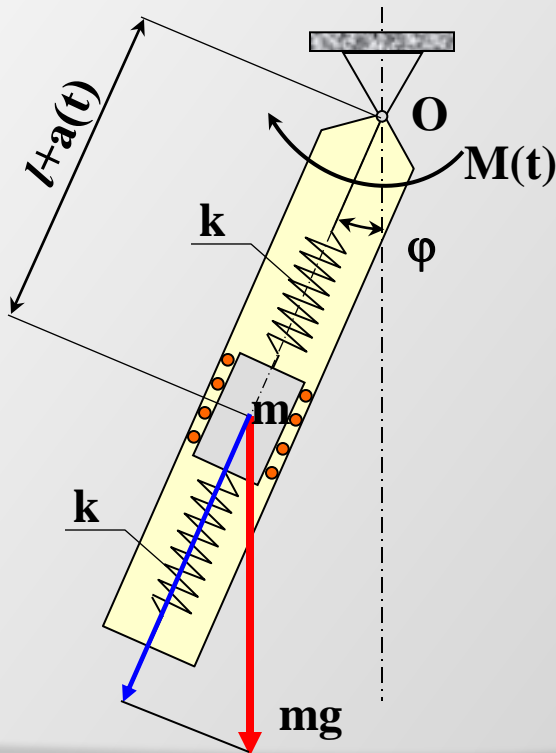
W ogólnym przypadku układu liniowego o jednym stopniu swobody równanie to będzie miało postać:

$$\frac{d}{dt} [m(t) \cdot \dot{x}] + c(t) \cdot \dot{x} + k(t) \cdot x = P(t)$$

Współczynniki tego równania są zwykle w układach maszynowych okresowymi funkcjami czasu. Okresowa zmienność jednego lub kilku z tych współczynników powoduje oddziaływanie na układ, które jest nazywane *wzbudzeniem parametrycznym*.

Możliwe jest więc wystąpienie drgań bez występowania zewnętrznej siły zmiennej - wymuszającej, tj. przy $P(t) = 0$. Drgania takie są nazywane *drzganiami parametrycznymi*.

W celu wprowadzenia w problematykę drgań parametrycznych rozpatrzmy małe drganie układu przedstawionego na rysunku. W odległości $l+a(t)$ od osi obrotu znajduje się ciało o masie m , zamocowane w bezmasowym pudle za pomocą dwóch sprężyn (każda o sztywności k)



Podczas wahań ciało o masie m przemieszcza się wzdłuż prowadnic i jego masowy moment bezwładności względem punktu O ulega zmianie. Przy wyprowadzeniu równań ruchu skorzystamy z twierdzenia, że pochodna krętu układu względem czasu jest równa sumie momentów sił działających na układ, czyli:

$$\frac{d(B\dot{\phi})}{dt} = \sum_{i=1}^n M_i \quad (1)$$

Niech ruch masy w prowadnicach będzie opisany funkcją: $a \cdot \sin \omega t$, wówczas masowy moment bezwładności względem punktu O wynosi:

$$B = m(l + a \sin \omega t)^2; \quad \omega^2 = 2k / m$$

Lewa strona równania (1) opisana jest wzorem:

$$\frac{d(B\dot{\varphi})}{dt} = B\ddot{\varphi} + \frac{dB}{dt}\dot{\varphi} = m(l + a \sin \omega t)^2 \ddot{\varphi} + 2m(l + a \sin \omega t)a\omega\dot{\varphi}\cos \omega t$$

Moment sił pochodzi od siły ciężkości i od zewnętrznego momentu $M(t)$. Wobec tego

$$\sum_{i=1}^n M_i = -mg(l + a \sin \omega t)\sin \varphi + M(t)$$

a po przyjęciu $\sin \varphi \approx \varphi$ z równania (1) otrzymujemy:

$$\ddot{\varphi} + P(t)\dot{\varphi} + Q(t)\varphi = R(t) \tag{2}$$

gdzie:

$$P(t) = \frac{2a\omega \cos \omega t}{l + a \sin \omega t}; \quad Q(t) = \frac{g}{l + a \sin \omega t}; \quad R(t) = \frac{M(t)}{m(l + a \sin \omega t)^2}$$

Dalej będziemy rozważać równanie (2). Wprowadzimy nową zmienną $y(t)$ zdefiniowaną przez zależność:

$$\varphi(t) = y(t) \cdot e^{-\left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \right]}$$

Z równania (3) otrzymujemy:

$$\dot{\varphi}(t) = \left(\dot{\varphi}_0 - \frac{1}{2} P \cdot y \right) \cdot e^{-\left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \right]}$$

$$\ddot{\varphi} = \left(\ddot{\varphi}_0 - \frac{1}{2} P \cdot \dot{\varphi}_0 - \frac{1}{2} P \cdot \dot{y} + \frac{1}{4} P^2 \cdot y \right) \cdot e^{-\left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \right]}$$

co po podstawieniu do równania (2) prowadzi do usunięcia członu z pierwszą pochodną φ i otrzymania równania:

$$\ddot{y} + p(t)y = r(t)$$

(4)

gdzie

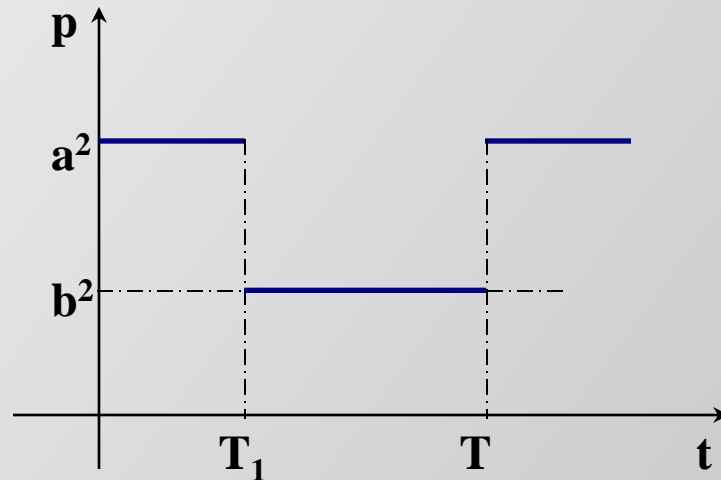
$$p(t) = Q - \frac{1}{4} P^2 - \frac{1}{2} P \cdot \dot{y}, \quad r(t) = R \cdot e^{-\left[-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t P(\tau) d\tau \right]}$$

Jeśli $p(t) = p(t + T)$, gdzie T jest okresem zmian współczynnika p , to równanie (4) będziemy nazywać *równaniem Hilla*.

Obecnie zajmiemy się dwoma szczególnymi przypadkami równania Hilla. Najpierw omówimy tzw. *równanie Meissnera*. Będziemy dalej rozważać równanie:

$$\ddot{y} + p(t)y = 0 \tag{12}$$

przy czym funkcja $p(t)$ ma formę przedstawioną na rysunku.



Równanie ruchu ma postać:

$$\ddot{y}_a + a^2 y_a = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < t - mT \leq T_1 \tag{13}$$

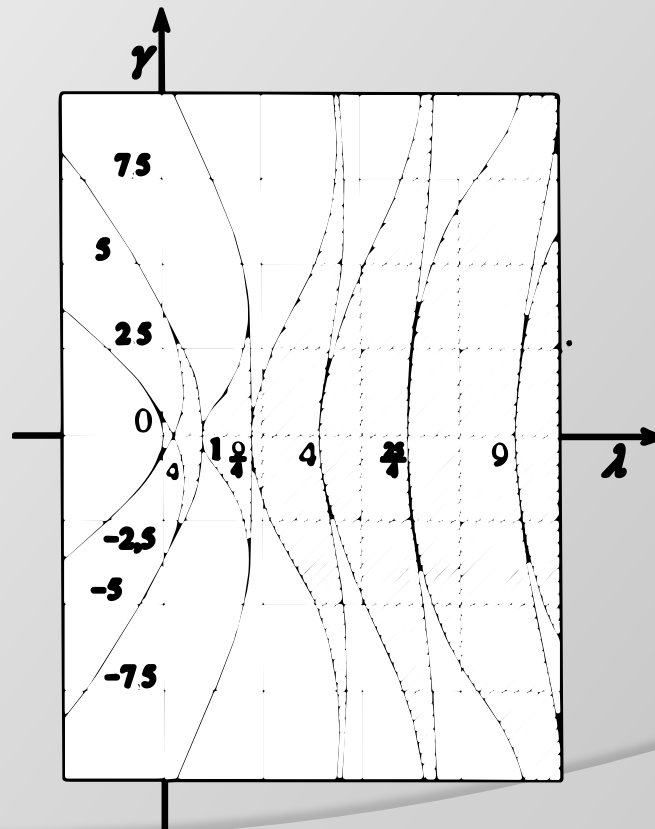
$$\ddot{y}_b + b^2 y_b = 0 \quad \text{dla} \quad T_1 < t - mT < T \tag{14}$$

gdzie $m=0,1,\dots$

Drugim szczególnym przypadkiem równania Hilla jest *równanie Mathieu* o postaci:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\lambda^* + \gamma^* \cos \Omega t) y = 0 \quad (15)$$

gdzie λ^* oznacza kwadrat częstości drgań własnych, a γ^* jest amplitudą wzbudzenia parametrycznego.

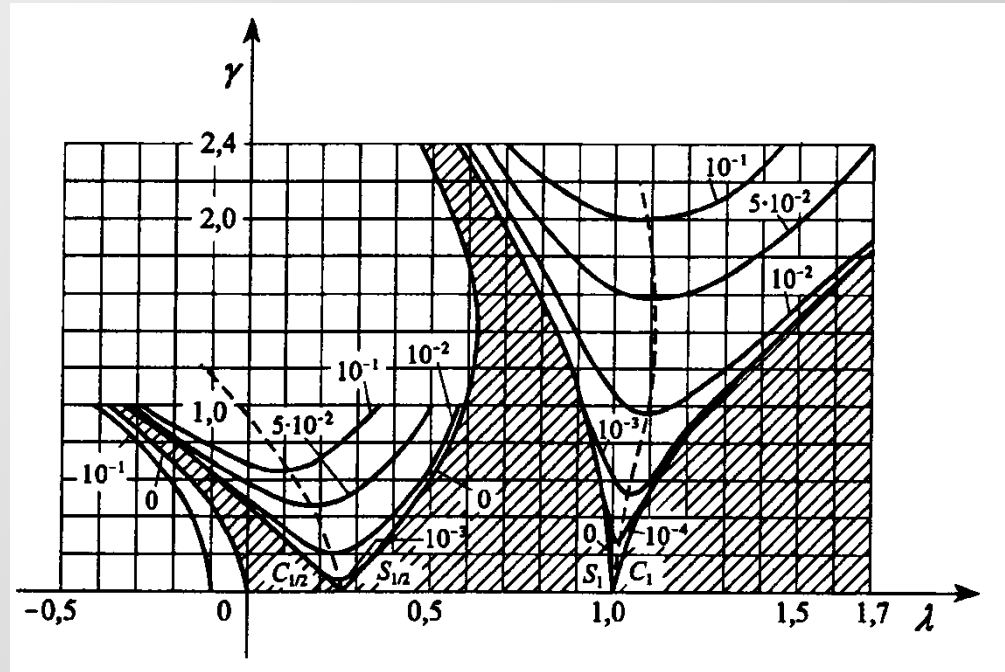


$$\lambda = \lambda^* / \Omega^2; \quad \gamma = \gamma^* / \Omega^2;$$

obszar zakreskowany
oznacza obszar stateczny

Uogólnione równanie Mathieu zawierające człon z **liniowym tłumieniem** jest postaci:

$$\ddot{y} + P_0 \dot{y} + (\lambda^* + \gamma^* \cos \Omega t) y = 0 \quad (17)$$



Z rysunku widać, że ze wzrostem tłumienia zwiększają się obszary stateczności. Natomiast ze wzrostem parametru λ pojawiają się kolejne obszary utraty stateczności, które są coraz węższe i mają mniejsze znaczenie w technice.

**Podział i charakterystyka układów niezachowawczych. Drgania samowzbudne.
Stateczność układów.**

Układy niezachowawcze czyli **nieodwracalne, nieizolowane**.

W układach takich dynamika zależy od czasu natomiast operator energii nie zależy od czasu. Układy niezachowawcze to np. układy w którym istnieją siły tarcia. Praca sił niezachowawczych równa się stracie energii mechanicznej.

Jeśli niektóre siły są niezachowawcze to praca tych sił zmienia się w inną formę energii.

$$\frac{d}{dt}(E + V) = vQ(y, v); \quad v = \dot{y} \quad (1)$$

Wyrażenie po lewej stronie równania (1) przedstawia pochodną energii całkowitej układu przypadającą na jednostkę masy. Iloczyn znajdujący się po prawej stronie równania (1) jest proporcjonalny do zmian energii całkowitej wywołanych siłą niezachowawczą $Q(y, v)$. W zależności od znaku tego iloczynu energia **jest dostarczana** do układu **lub odbierana** od niego.

A. Jeśli $vQ(y, v) = 0$, dla $v \neq 0$ na całej płaszczyźnie (y, v) , to układ poruszając się wzdłuż krzywej $y(t)$, $v(t)$ rozprasza energię i nazywamy go układem **dysypacyjnym**.

B. Jeśli $vQ(y, v) < 0$, dla $v \neq 0$ na całej płaszczyźnie (y, v) , to układ taki nazywamy układem **zachowawczym**.

C. Jeśli w niektórych obszarach płaszczyzny (y, v) mamy $vQ(y, v) > 0$, a w pozostałych obszarach tej płaszczyzny $vQ(y, v) < 0$, to układ taki nazywamy układem **samowzbudnym**.

Układy **dyssypacyjne** lub **samowzbudne** nazywamy układami niezachowawczymi. Ponadto układy drgające można podzielić na **stacjonarne** i **niestacjonarne**. Układy stacjonarne charakteryzują się tym, że ich parametry **nie zmieniają się w czasie**. W odróżnieniu od nich układy, w których niektóre parametry zależą od czasu, nazywamy **układami niestacjonarnymi**.

Układy **stacjonarne dyskretne** opisane są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi o **stałych współczynnikach**, podczas gdy układy **dyskretne niestacjonarne** opisane są przez równania różniczkowe zwyczajne o **współczynnikach zależnych od czasu**.

1. Drgania swobodne - pojawiają się w układach autonomicznych (siła wymuszająca zależna od czasu jest równa zero) lub też są częścią drgań nieustalonych w układach nieautonomicznych (siła wymuszająca zależna od czasu jest różna od zera) . Zachodzą bez udziału zewnętrznego źródła energii lub zewnętrznego wymuszenia i generowane są przez warunki początkowe.

2. Drgania wymuszone - zachodzą w układach nieautonomicznych ze zmiennym w czasie wymuszeniem zewnętrznym.

3. Drgania parametryczne - zachodzą tylko w układach niestacjonarnych i są wynikiem zmian w czasie parametrów układu.

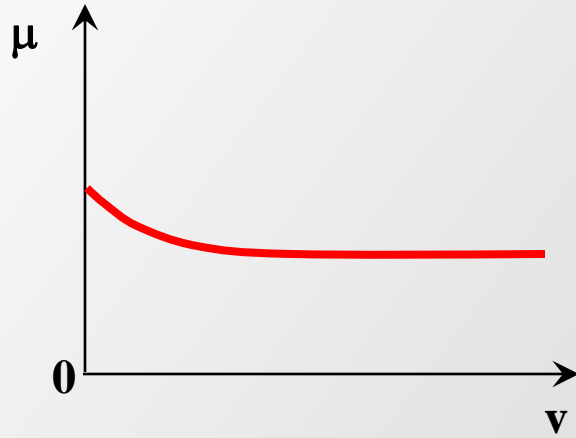
4. Drgania samowzbudne - pojawiają się w układach niezachowawczych. Dopływ energii do układu drgającego jest regulowany poprzez drgania i pochodzi od układu niedrgającego.

Praktycznie występującymi przypadkami drgań są **drgania wymuszone** lub **drgania samowzbudne**.

W przypadku drgań samowzbudnych nie ma zmiennej siły zewnętrznej niezależnej od ruchu drgającego układu. Do powstania i utrzymywania się tych drgań niezbędne jest **źródło energii** nie mające jednak cech zmienności. Energia ta może na przykład pochodzić z **energii napędowej maszyny czy urządzenia**. Wykorzystując tę energię układ sam generuje siłę zmienną warunkującą jego drgania. Jeśli ruch ten zostanie uniemożliwiony, to znika również siła zmienna.

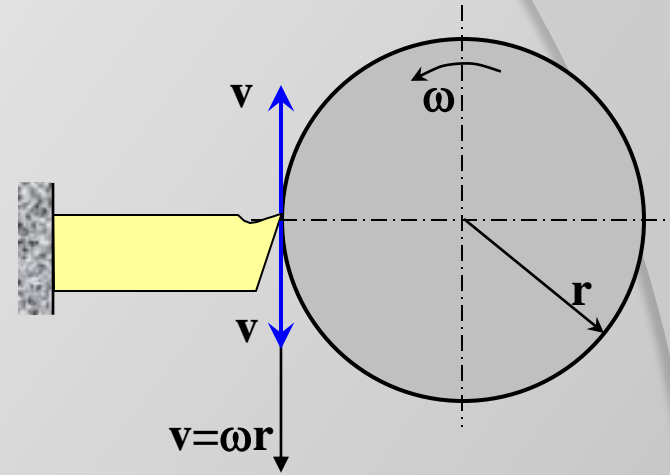
Powszechnie występujący typ drgań samowzbudnych, słyszany w zakresie częstości akustycznych jako **skrzypienie zawiasów** czy **obluzowanego połączenia, zgrzyt zasuwy** itd. związany jest z ujemną charakterystyką tarcia suchego. Współczynnik tarcia maleje nieco z prędkością względną elementów przesuwających się po sobie (rys. 1).

Drgania samowzbudne są jedną z powszechnych przyczyn drgań narzędzi skrawających, takich jak np. **nóż tokarski** (rys. 2).



Rys.1

Rys.2



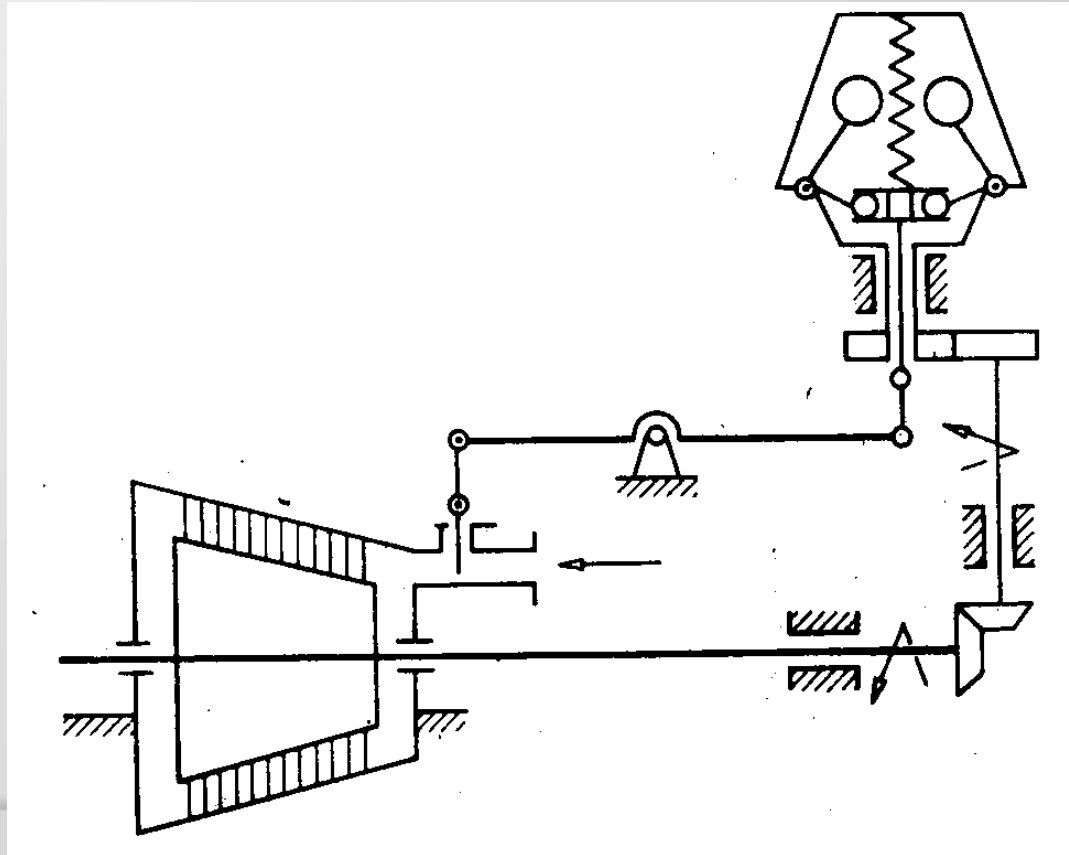
Drgania o kierunku ruchu, zapoczątkowane przy uruchomieniu jednego elementu (wrzeciono) względem drugiego (noża), powodują, że w części cyklu drgań, gdy kierunek ruchu drgającego, np. elementu drugiego, jest zgodny z kierunkiem ruchu elementu pierwszego, ich prędkość względna jest nieco mniejsza niż w drugiej części cyklu. W wyniku tego pierwszy element (wrzeciono) oddziałuje na drugi element (nóż) większą siłą i dostarcza mu więcej energii w pierwszej części cyklu niż odbiera w drugiej. W każdym więc cyklu ruchu zostaje pewna ilość energii skierowana (z energii napędowej w rozważanym przykładzie) na podtrzymanie drgań układu. Jest to jednocześnie równoznaczne z wzajemnym oddziaływaniem obu elementów siłą zmieniającą się w cykl drgań (zmienny przyrost siły tarcia zmieniający swój znak względem średniej wartości tej siły zgodnie z cyklem drgań). Taki sam jest mechanizm drgań strun smyczkowych instrumentów muzycznych, drgania struny utrzymywane są mimo stałego kierunku ruchu smyczka.

W sposób opisany wyżej struna pobiera energię od smyczka, a jej ruch drgający generuje przyrost siły tarcia, zmieniający znak w cyklu drgań.

W konsekwencji układy samowzbudne wykonują z reguły **drgania z jedną z częstości drgań własnych** układu (noża z suportem itd. czy struny).

Szeroką dziedzinę przykładów tego typu stanowią układy **regulacji automatycznej**.

Na rysunku 3 przedstawiono przykład regulacji prędkości obrotowej turbiny ze sprzężeniem zwrotnym (sztywnym). W określonych warunkach układ taki może podtrzymywać niezanikające wahania prędkości, stanowiące drgania samowzbudne. Energia pochodzi oczywiście z energii napędowej maszyny.

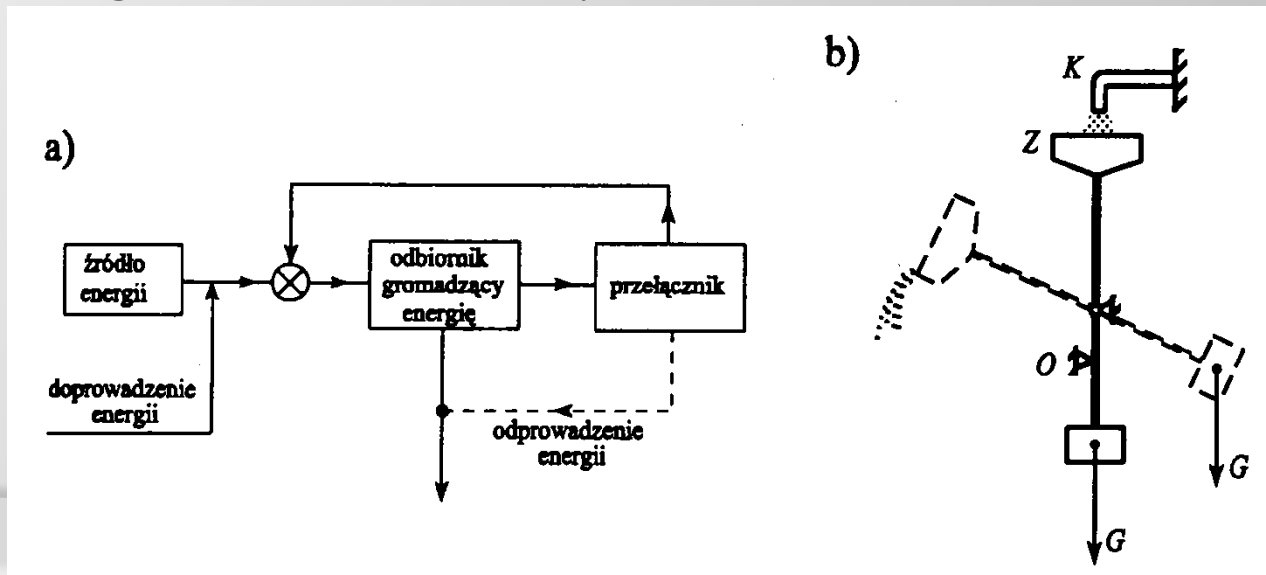


Drgania samowzbudne mogą być wynikiem przepływu cieczy lub gazu. **Kołysanie gałęzi, drgania łopatek turbin, skrzydeł samolotu (flutter)**, mogą być wynikiem podobnego jak opisany lub bardziej złożonego mechanizmu **samowzbudzenia aerodynamicznego**.

Układy mechaniczne o ruchach sprzężonych mogą generować drgania samowzbudne kosztem energii, np. napędowej. Tego rodzaju charakter może mieć **wężykowanie kierowanych kół samochodu, pisanie kredą na tablicy i towarzyszący temu pisk, pisk tramwaju podczas ruchu po torach na zakręcie, skrzypienie zawiasów w drzwiach, drgania noża tokarskiego podczas obróbki**.

Układ samowzbudny charakteryzujący się źródłem energii i układem wykonującym drgania oraz urządzeniem otwierającym lub zamykającym przepływ energii ze źródła nazywa się **układem typu drganiowego**.

Drugim typem drgań samowzbudnych są **drgania typu relaksacyjnego**.



rys.4

Dźwignia wskutek ciężaru skupionego G znajduje się w pozycji bliskiej pionu i takiej, że zbiornik Z znajduje się nad kurkiem dostarczającym wodę. Jeśli moment pochodzący od ciężaru wody będzie większy od momentu wywołanego ciężarem G , to dźwignia gwałtownie się obróci, woda zostanie wylana i pod wpływem ciężaru G dźwignia powróci do położenia wyjściowego. Opisany wyżej cykl znowu się powtórzy. Źródłem energii jest tutaj woda dostarczana z kranu K , zaś odbiornikiem gromadzącym energię (potencjalną) jest zbiornik Z , a przełącznikiem jest dźwignia wykonująca ruch obrotowy.

Zagadnienie drgań samowzbudnych jest związane z problemem **stateczności**. Pojawienie się drgań samowzbudnych jest bowiem wynikiem utraty: **stateczności statycznej, dynamicznej równowagi** lub **ruchu ustalonego układu**.

Drgania samowzbudne nie tylko wpływają na **jakość maszyn i dokładność ich działania**, ale mogą być również **przyczyną poważnych awarii turbin, samolotów i nawet mostów**.

W odróżnieniu od drgań wymuszonych wykrycie ich przyczyny jest **często trudne**.

W przypadku wystąpienia drgań jakiejś maszyny pierwszym i naczelnym zadaniem jest ustalenie czy te drgania są **wymuszone** czy **samowzbudne**. Często może to być wykryte przez pomiar częstości drgań. Ma to duże znaczenie, gdyż środki zaradcze, które należy zastosować, są całkowicie różne w każdym z tych dwóch możliwych przypadków.

1. W przypadku drgań wymuszonych maszyna, konstrukcja lub jakaś jej część, na którą będzie działać okresowo zmienna siła, może zostać pobudzona do silnych, niedopuszczalnych drgań, szczególnie w warunkach bliskich rezonansu; do poprawy tej sytuacji podstawowym działaniem jest:

- a) wykrycie i eliminacja lub ograniczenie wymuszenia;**
- b) możliwość zmiany charakterystyki układu (rozkład masy, sztywności) w celu zmiany jego częstości własnych i oddalenia się od rezonansu;**
- c) tłumienie drgań, w szczególności przez zastosowanie tłumika dynamicznego.**

2. W przypadku drgań samowzbudnych maszyna, konstrukcja lub jakaś jej część, której stan równowagi lub ruchu ustalonego jest w określonych warunkach niestateczny, może rozwinąć silne, niedopuszczalne drgania; do poprawy tej sytuacji podstawowym działaniem jest:

- a) wykrycie i jeśli to możliwe **wyeliminowanie** lub **ograniczenie mechanizmu samowzbudzenia**; (z uwagi na różnorodne możliwe przyczyny często przysparza to znacznych trudności lub prowadzi nawet do przeoczenia możliwości istnienia takiego mechanizmu i wystąpienia drgań samowzbudnych);**
- b) poszukiwanie możliwości spełnienia kryteriów stateczności, tak by kombinacja parametrów układu i reżimu jego pracy eliminowała możliwość utraty stateczności i wystąpienia drgań samowzbudnych; wynika stąd istotne znaczenie analizy stateczności układu do projektowania jak i ustalenia warunków eksploatacji maszyn i urządzeń; 227**
- c) tłumienie drgań.**

Kryterium rachunkowe stateczności

Dla równania charakterystycznego o ogólnej postaci w formie:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2)$$

warunki konieczne i wystarczające aby układ był stateczny asymptotycznie określają dwa kryteria: Routha i Hurwitza.

Kryterium Routha

Aby wszystkie części rzeczywiste pierwiastków równania (2) były ujemne, a więc aby układ dynamiczny był stateczny asymptotycznie, potrzeba i wystarcza, by były **większe od zera** wszystkie wyrazy pierwszej kolumny tablicy Routha.

Tablica 10.1. Tablica Routha

	1	2	3
	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
$r_0 = \frac{a_n}{a_{n-1}}$	$c_{13} = a_{n-2} - r_0 a_{n-3}$	$c_{23} = a_{n-4} - r_0 a_{n-5}$	$c_{33} = a_{n-6} - r_0 a_{n-7}$
$r_1 = \frac{a_{n-1}}{c_{13}}$	$c_{14} = a_{n-3} - r_1 c_{23}$	$c_{24} = a_{n-5} - r_1 c_{33}$	$c_{34} = \dots$
$r_2 = \frac{c_{13}}{c_{14}}$	$c_{15} = c_{23} - r_2 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - r_2 c_{34}$	$c_{35} = \dots$
$r_3 = \frac{c_{14}}{c_{15}}$	$c_{16} = c_{24} - r_3 c_{25}$	$c_{26} = \dots$	\dots
$r_4 = \frac{c_{15}}{c_{16}}$	$c_{17} = c_{25} - r_4 c_{26}$	\dots	\dots
$r_5 = \frac{c_{16}}{c_{17}}$	\dots	\dots	\dots

Kryterium Hurwitza

Układ jest stateczny asymptotycznie, gdy wszystkie współczynniki równania charakterystycznego są **dodatnie** (warunek konieczny) oraz wszystkie podwyznaczniki do rzędu **n-1** wyznacznika Δ_n są dodatnie. Wyznacznik Hurwitza Δ_n buduje się ze współczynników równania charakterystycznego (2).

Na przekątnej głównej ustawia się w kolejności od a_{n-1} w lewym górnym rogu do a_0 w prawym dolnym. Nad przekątną ustawia się współczynniki równania w porządku wskaźników malejących, a pod przekątną główną – wskaźników rosnących.

$$\Delta_n = \begin{array}{cccccccc} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_4 & a_2 & a_0 \end{array}$$

Metody analityczne badania drgań nieliniowych. Rodzaje nieliniowości. Cechy układów nieliniowych. Drgania własne i wymuszone tarciem. Przykłady techniczne drgań nieliniowych.

Wcześniejsze wykłady poświęcone były drganiom układów liniowych o jednym, dwóch i wielu stopniach swobody. Oznaczało to, że równania drgań takich układów były opisane równaniami **różniczkowymi liniowymi**, które z matematycznego punktu widzenia mają **ściśle rozwiązania analityczne**. Należy pamiętać, że modele liniowe są tylko pewnym przybliżeniem zjawisk i procesów występujących w technice.

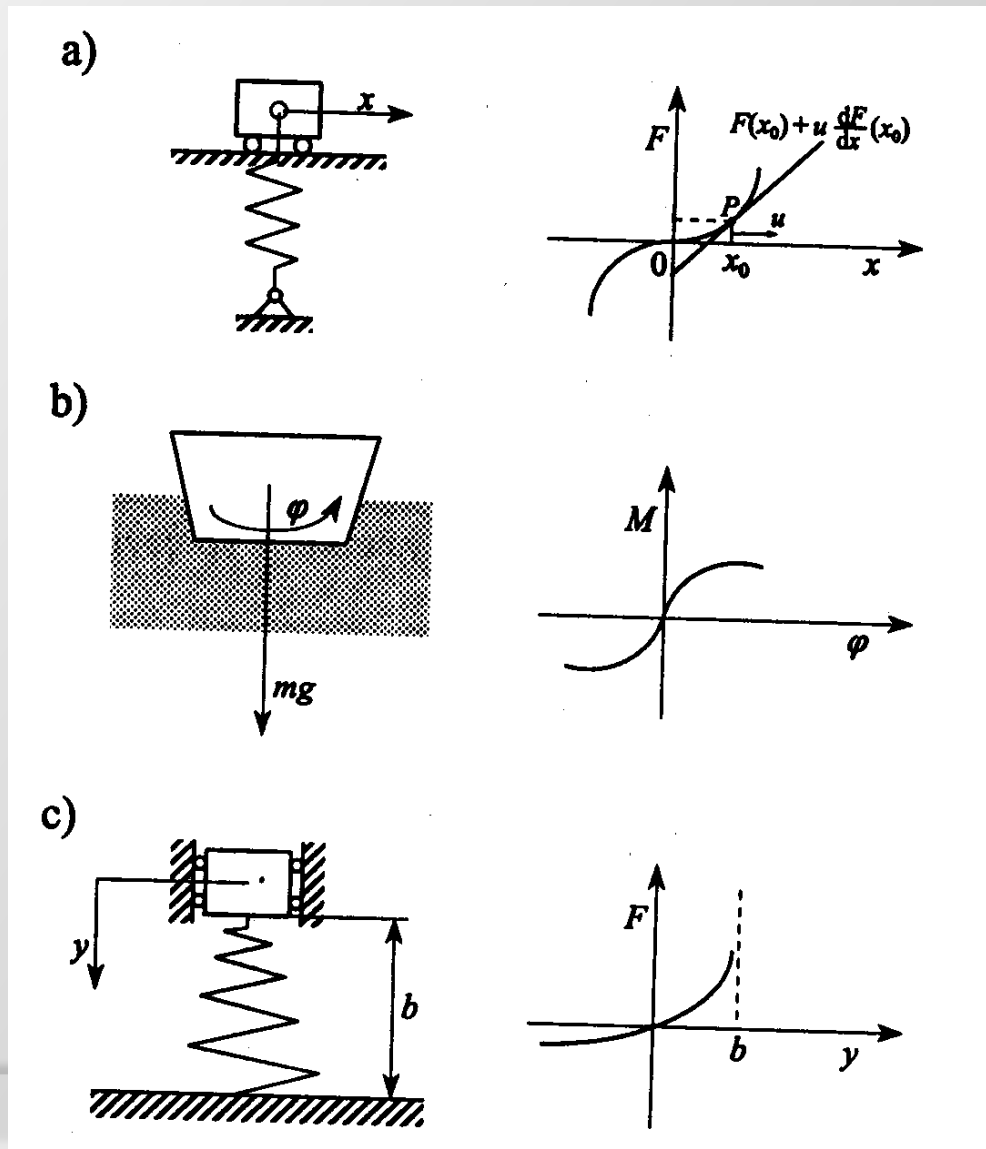
Ponieważ układy liniowe umożliwiają znalezienie rozwiązania analitycznego, co dla **układów nieliniowych** występuje bardzo rzadko, to uzasadniona jest **linearyzacja układu nieliniowego**. **Linearyzacja** jest jednak uzasadniona dla **małych nieliniowości i małych drgań**, występujących w analizowanym układzie.

Nieliniowość pojawiająca się w układach mechanicznych jest związana z **nieliniową zależnością** albo **sił pozycyjnych** od przemieszczeń uogólnionych, albo **sił oporu** od prędkości uogólnionych.

Dla układu o jednym stopniu swobody siły te wzięte z przeciwnymi znakami nazywamy **charakterystykami siłowymi**. Okazuje się jednak, że nie zawsze taki podział jest możliwy.

Wspomniane **siły pozycyjne** zależą tylko od położenia, czyli współrzędnych uogólnionych, i można je podzielić na **zachowawcze** i **niezachowawcze**. Niech przykładowo **$F(q)$** lub **$M(q)$** będzie odpowiednio taką siłą lub momentem sił. Jeśli różniczka **dF/dq** rośnie ze wzrostem wartości **q** , to charakterystykę nazywamy **charakterystyką sztywną**, przy czym **$d^2F/dq^2 > 0$** .

W przeciwnym przypadku charakterystykę nazywamy **charakterystyką miękką**. Jeśli $F(q)=-F(-q)$, to charakterystykę nazywamy **charakterystyką symetryczną**. Ilustruje to rys. 1.



rys.1

Na rys. 1a zaznaczono punkt pracy **P**. Jeśli rozpatrywać małe drgania wokół położenia x_0 to charakterystykę można zlinearyzować, biorąc pod uwagę tylko pierwsze człony szeregu Taylora.

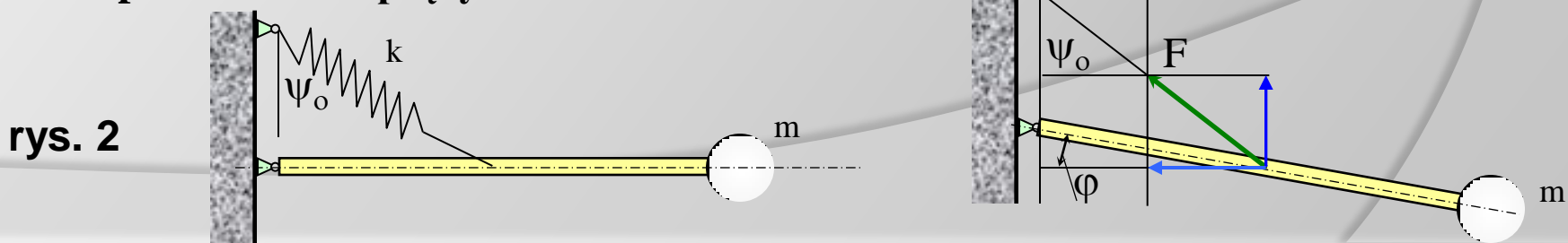
Okazuje się, że niekiedy nieliniowość jest znaczna już przy małym przemieszczeniu lub obrocie, co ma miejsce np. w **układach z luzami**, i nie może być pominięta na drodze trywialnej linearyzacji.

Drugim rodzajem sił są siły oporu zależące tylko od prędkości. Należą do nich **siły oporu ośrodka**, **siły tarcia w węzłach mechanizmów i robotów**, **siły tarcia konstrukcyjnego i wewnętrznego w materiałach** itp. W przypadku linearyzacji takich sił zagadnienie jest stosunkowo proste. Okazuje się bowiem, że siły te, chociaż niekiedy duże, mogą mieć mały wpływ na procesy drganiowe i np. przy wyznaczaniu częstości drgań mogą być **linearyzowane bądź nawet pomijane**.

Istnieją jednak również kontrprzykłady, kiedy ich uwzględnienie decyduje o charakterze całego procesu i pominięcie ich jest niemożliwe (np. drgania samowzbudzone wywołane tarciami).

Wymienione nieliniowości należą do **nieliniowości typu fizycznego**.

Istnieją również **nieliniowości typu geometrycznego**, przykładem może być wahadło poziome podwieszone sprężysto.



W licznych zagadnieniach nieliniowych (dotyczących np. dynamiki łożysk ślizgowych) linearyzacja jest dokonywana dopiero na drugim etapie - małych drgań dokoła stanu równowagi, który zostaje uprzednio wyznaczony oddzielnie.

Uwzględnienie występujących rzeczywiście nieliniowości może być również konieczne do uzyskania żądanej dokładności analizy w potrzebnym zakresie zmian badanych wielkości. Drgania takich układów będą opisane więc równaniami różniczkowymi nieliniowymi. Utrudni to bardzo analizę. Nie ma bowiem całkowicie ogólnych metod rozwiązania takich równań i zawsze są one niewspółmiernie bardziej pracochłonne w stosunku do analizy liniowej.

Rozpatrzymy niektóre praktycznie ważne przypadki i metody rozwiązywania równań nieliniowych. Do takich zagadnień należą:

- drgania swobodne nieliniowych układów zachowawczych, a więc drgania układów z nieliniową charakterystyką sprężystą,**
- drgania wymuszone takich układów,**
- drgania swobodne z nieliniowym tłumieniem, ma to szczególne znaczenie do analizy ustalania się drgań samowzbudnych; umożliwia wyznaczenie cyklu granicznego, a więc i ocenę dopuszczalności i wpływu tych drgań, np. na proces obróbki skrawaniem,**
- drgania układu o jednym, dwóch i wielu stopniach swobody z tarciem.**

Drgania swobodne nieliniowego układu zachowawczego o jednym stopniu swobody

Równanie drgań swobodnych nieliniowego układu zachowawczego o jednym stopniu swobody można przedstawić w postaci:

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (1)$$

gdzie $f(x)$ jest siłą pozycyjną odniesioną do jednostki masy.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right) + f(x) = 0; \quad \text{gdzie} \quad \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x f(x) dx = E = \text{const}; \quad (2)$$

Równanie to wyraża równanie zachowania energii:

$$U(\dot{x}) + V(x) = E \quad (3)$$

Uwzględniając warunki początkowe: dla $t=t_0=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0=v_0$ otrzymuje się całkowitą energię:

$$E = \frac{v_0^2}{2} + \int_0^{x_0} f(x) dx \quad (4)$$

Przy wykorzystaniu równania (2) oraz (4) otrzymuje się:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2 \left[E - \int_0^x f(x) dx \right]}; \quad t = \pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2 \left[E - \int_0^x f(x) dx \right]}} + t_0 \quad (5)$$

Znaczenie praktyczne tak uzyskanego rozwiązania jest ograniczone. Służy ono głównie do wyznaczania okresu drgań swobodnych.

Zastosowanie metody płaszczyzny fazowej

Jedną z podstawowych metod analizy własności drganiowych układów nieliniowych jest metoda płaszczyzny fazowej.

Wprowadzając zmienne (na płaszczyźnie fazowej) \mathbf{x} , \mathbf{v} równanie toru fazowego otrzymuje się wprost z (2₁):

$$\frac{v^2}{2} + V(\mathbf{x}) = E \quad (6)$$

Dla różnych warunków początkowych, a więc różnych wartości E otrzymuje się rodzinę krzywych, z których każda jest rozwiązaniem odpowiadającym określonym warunkom początkowym.

Z równania toru fazowego (6) wynika

$$v = \pm \sqrt{2} \sqrt{E - V(\mathbf{x})} \quad (7)$$

Z zależności tych wynikają ogólne własności torów fazowych układu zachowawczego:

- są one symetryczne względem osi \mathbf{x} ,
- w punktach przecięcia z osią \mathbf{x} jest ona do nich prostopadła,
- punkty osobliwe \mathbf{x}_r , w których jednocześnie jest $v = 0$ i $f(\mathbf{x}_r) = 0$ wyznaczają na płaszczyźnie fazowej punkt odpowiadający położeniu równowagi układu.

Rodzaj równowagi (i postać trajektorii w otoczeniu jego położenia) zależy od charakteru zmian energii potencjalnej $V = V(x_r)$ układu w jego sąsiedztwie.

Równanie krzywej fazowej (7) w sąsiedztwie położenia równowagi, określonego współrzędną x_r jest równe:

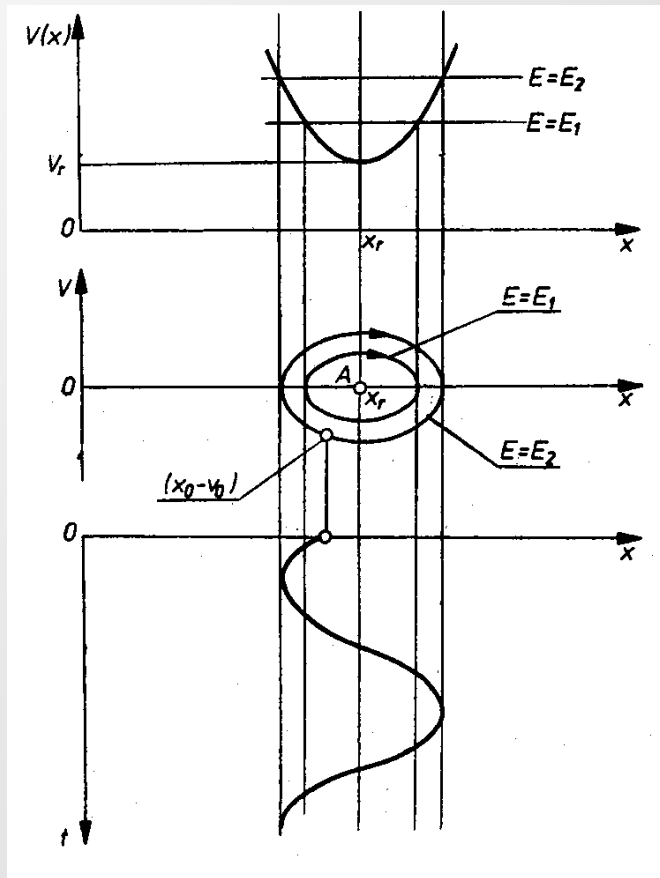
$$v \approx \sqrt{2} \sqrt{E - V_r - \frac{1}{2} V_r^k (x - x_r)^k} \quad (8)$$

1) Dla k parzystego (np. $k = 2$)

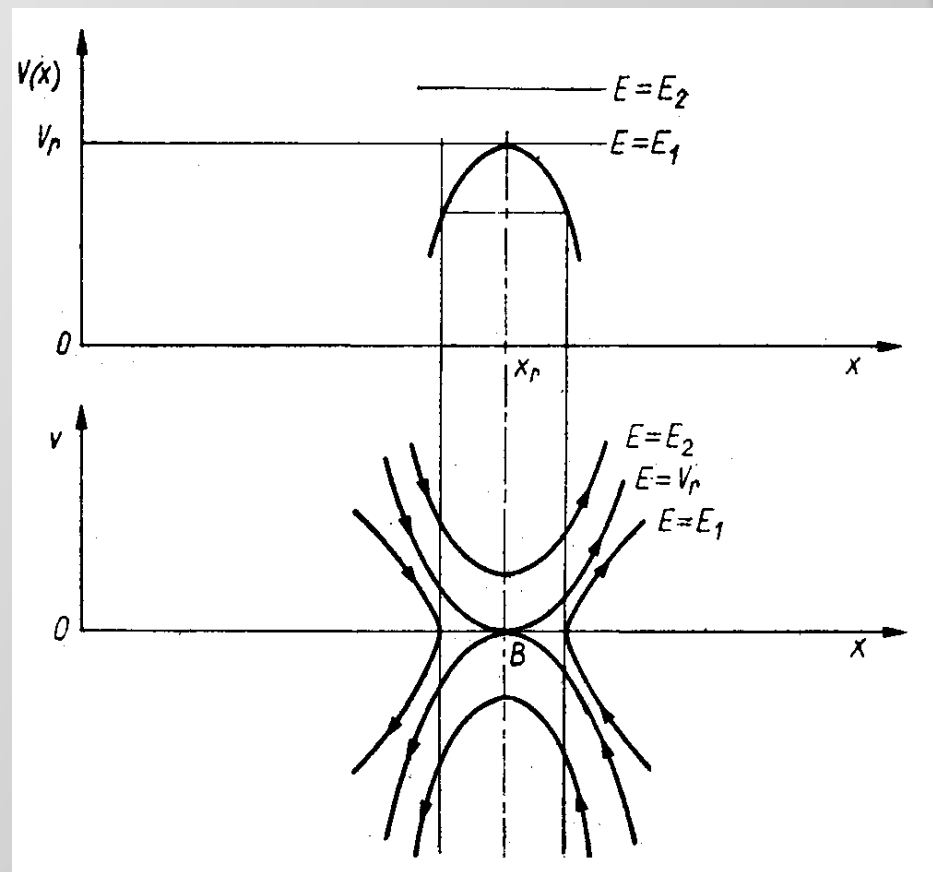
- Przy $V_r^k > 0$ energia potencjalna ma w położeniu równowagi minimum. Równowaga jest stateczna, a przykład krzywych fazowych pokazuje rys. 3. Tory fazowe są krzywymi zamkniętymi. Drgania są okresowe, ale wskutek nieliniowości, nie są harmoniczne. Kierunek ruchu w czasie punktu fazowego po torze fazowym zaznaczono, na rys. 3, strzałkami. Kierunek ten wynika z faktu, że dla $v > 0$ przemieszczenie x wzrasta, dla $v < 0$ przemieszczenie maleje.

- Przy $V_r^k < 0$ energia potencjalna ma w położeniu równowagi $x = x_r$ maksimum. Położenie równowagi $x = x_r$ jest niestateczne. Przykładowy obraz torów fazowych dla takiego przypadku pokazano na rys. 4. Odpowiadający położeniu równowagi punkt osobliwy B nazywa się **siodłem**.

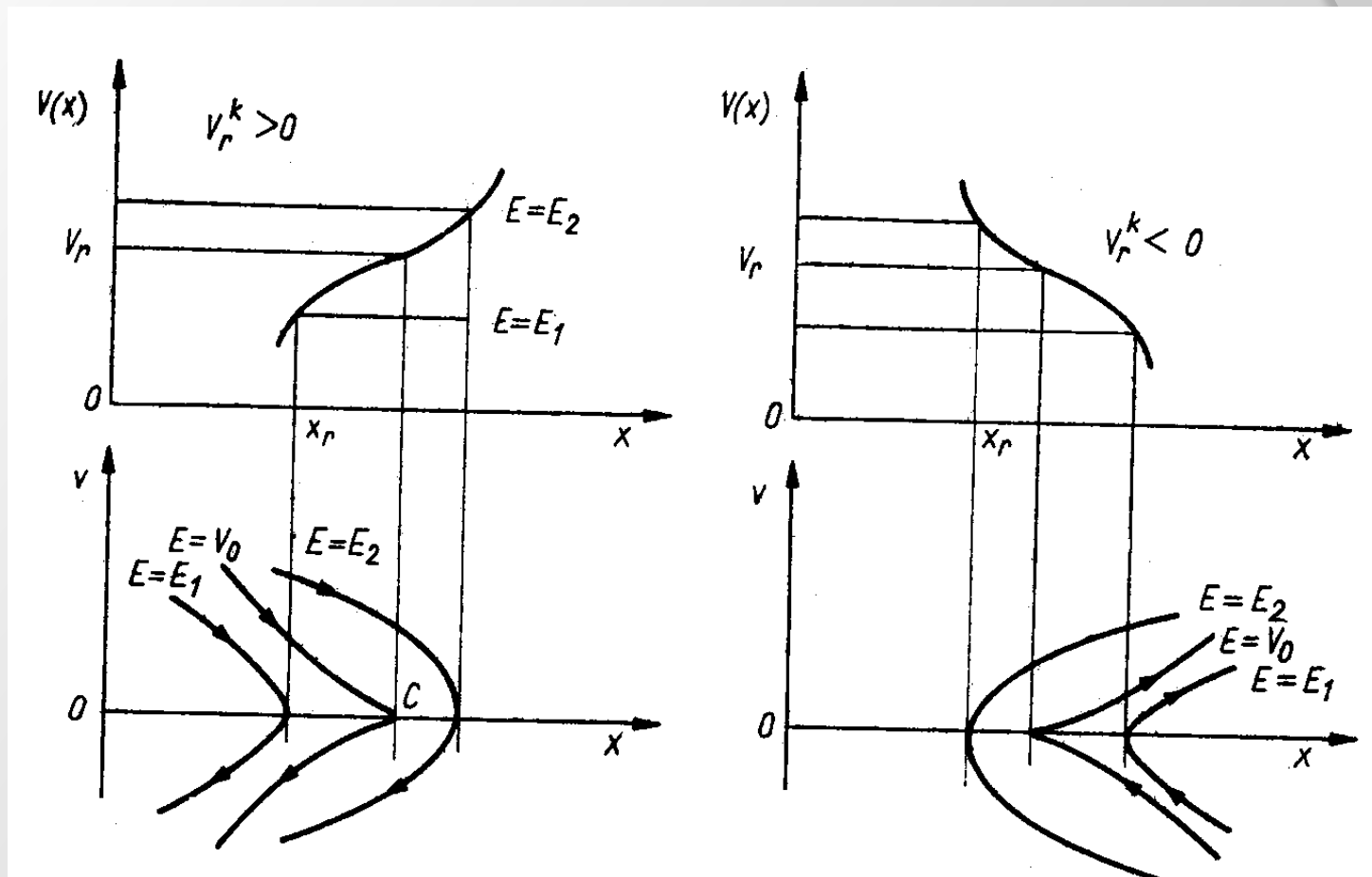
2) Jeśli rząd najniższej pochodnej energii potencjalnej różnej od zera w położeniu równowagi, jest nieparzysty (k -nieparzyste, np. $k=3$) to energia potencjalna ma w położeniu równowagi, punkt przegięcia. Położenie równowagi jest niestateczne. Tory fazowe dla takich przypadków pokazano na rys. 5 odpowiednio dla $V_r^k > 0$ i $V_r^k < 0$. Punkt C odpowiadający położeniu równowagi nazywa się w tym przypadku **ostrzem**.



rys. 3



rys. 4



rys.5

Wahadło matematyczne

Dowolne wychylenia kątowe φ wahadła są opisane równaniem:

$$\ddot{\varphi} + \alpha^2 \sin \varphi = 0; \quad \text{gdzie} \quad \alpha^2 = g/l$$

Dla dowolnych wychyleń φ linearyzacja ($\sin \varphi \neq \varphi$) nie jest możliwa.

Wprowadzając zmienne na płaszczyźnie fazowej $\varphi, \dot{\varphi} = \omega$ co można zapisać:

$$\dot{\omega} = -\alpha^2 \sin \varphi$$

Energia potencjalna jest $V(\varphi) = \alpha^2(1 - \cos \varphi)$.

Dla warunków początkowych dla $t=t_0=0; \varphi=\varphi_0; \dot{\varphi}=\omega_0$ energia kinetyczna wynosi:

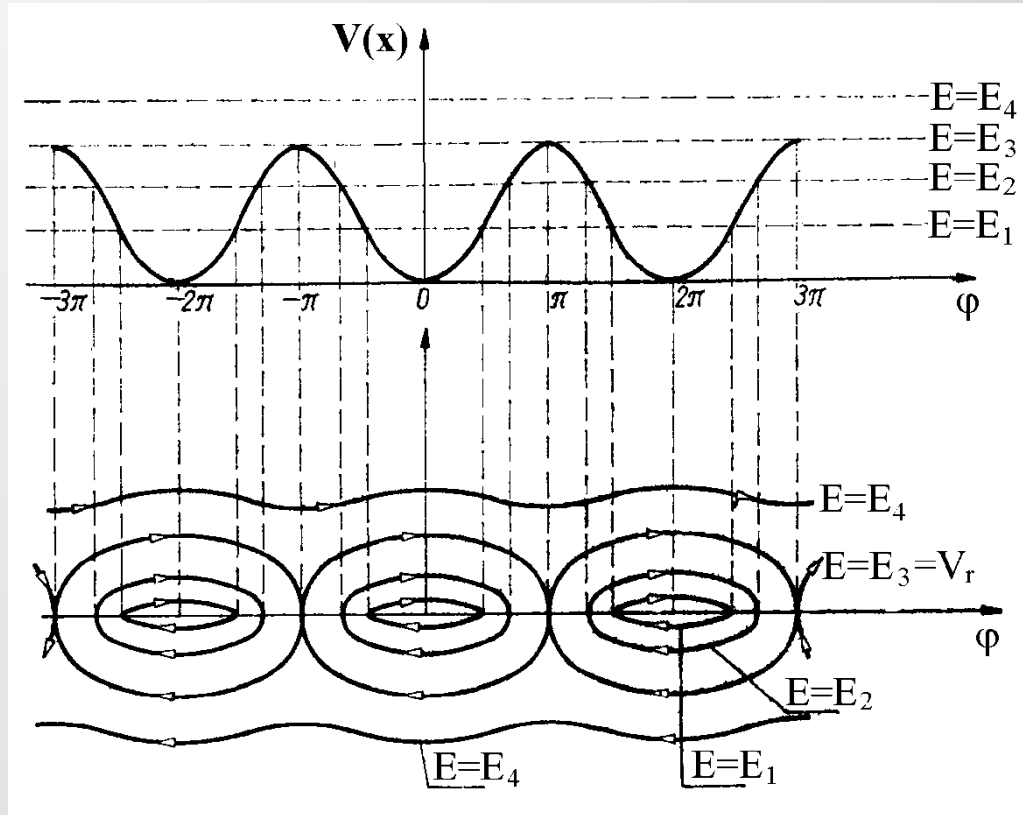
$$E = \frac{\omega_0^2}{2} + \alpha^2(1 - \cos \varphi_0)$$

Równanie toru fazowego jest więc równe:

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)} \quad (9)$$

Tory fazowe dla różnych wartości energii całkowitej (dla różnych warunków początkowych) podano na rys. 6.

Występują dwa rodzaje punktów osobliwych. Pierwsze odpowiadają położeniu dolnemu równowagi statecznej wahadła. Są to punkty środkowe dla $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. Drugie odpowiadają położeniu górnemu równowagi niestatecznej wahadła. Są to siodła dla $\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$.



rys.6

Jeśli całkowita energia początkowa nie przekracza maksymalnej wartości energii potencjalnej (odniesionej do jednostki momentu bezwładności wahadła): $E < V(\varphi)_{\max} = 2\alpha^2$ to wahadło wykonuje ruchy okresowe wokół dolnego położenia równowagi. W przeciwnym przypadku ($E > 2\alpha^2$), prędkość kątowa ω wahadła jest zawsze tego samego znaku i wahadło obraca się stale w jednym kierunku.

Przy warunkach początkowych $\varphi = \varphi_0 < \pi$; $\omega_0 = 0$ (czyli $E < 2\alpha^2$) ruch będzie okresowy. Jego okres można wyznaczyć całkując wzór (9) w granicach od φ_0 do $-\varphi_0$ (dla ujemnych prędkości ω).

Jest więc:

$$T = -2 \int_{\varphi_0}^{-\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\alpha^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}; \quad T = \frac{2}{\alpha} \int_0^{-\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

Całka eliptyczna pierwszego rodzaju występująca we wzorze (10) może być wyrażona szeregiem potęgowym. Wtedy

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]$$

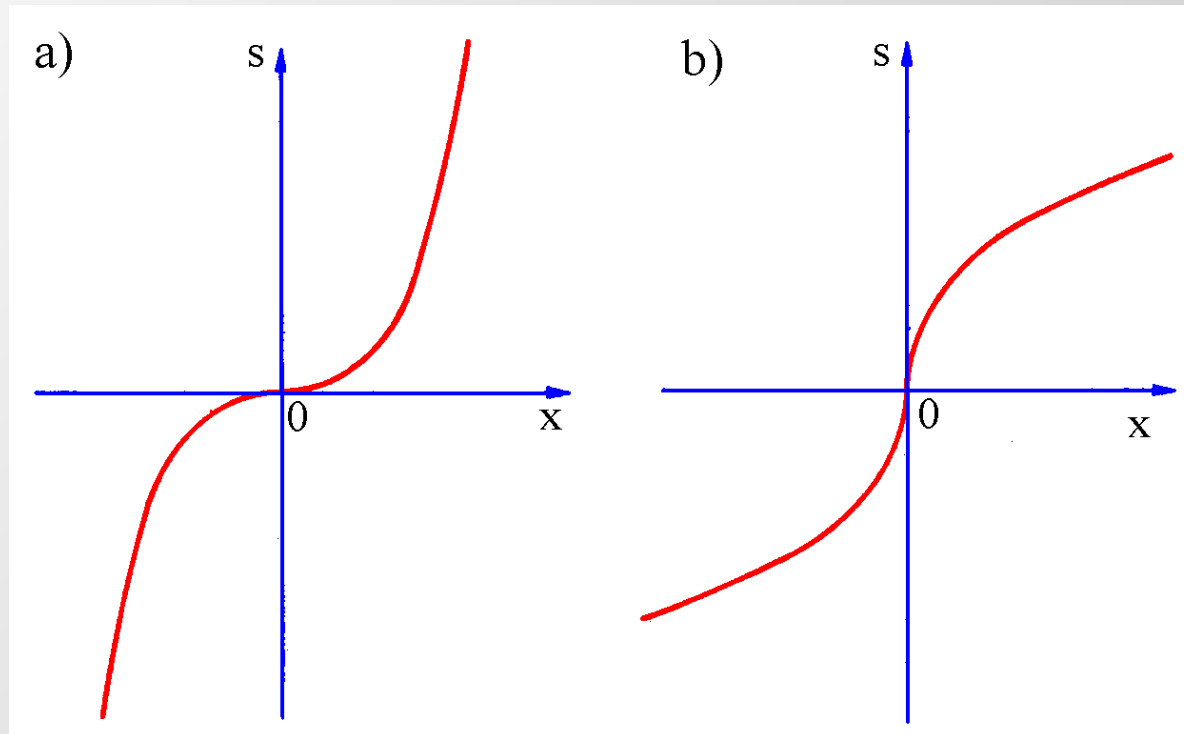
Okres zależy od amplitudy drgań, a więc od warunków początkowych (rośnie wraz z amplitudą). Linearyzacja oczywiście daje dla małych wychyleń $T = \frac{2\pi}{\alpha}$

Drgania układu zachowawczego wymuszone siłą harmoniczną

Niech na układ o jednym stopniu swobody z nieliniową sztywnością (dającą siłę pozycyjną $S = -f(x)$) działa siła wymuszająca $P \cos \omega t$. Równanie drgań takiego układu będzie więc:

$$m\ddot{x} + f(x) = P \cos \omega t \quad (10)$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją nieparzystą tj. $f(-x) = -f(x)$ (rys. 7).



rys. 7

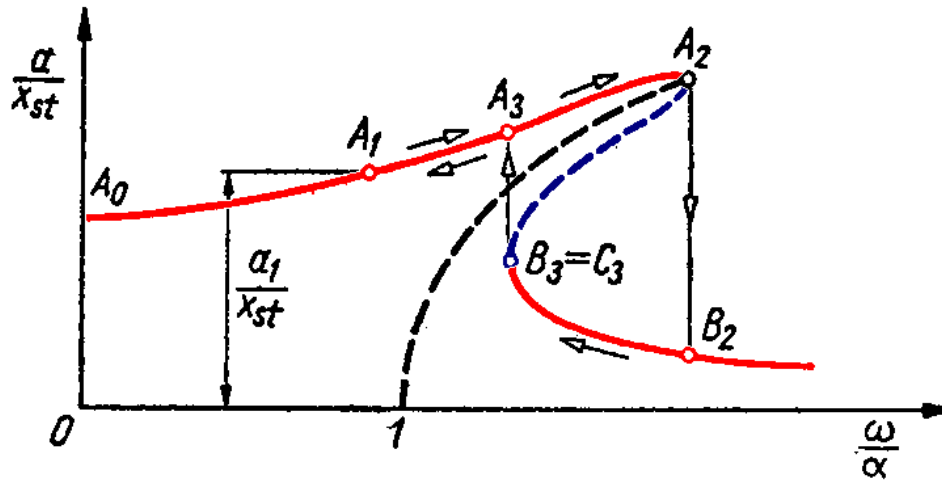
Charakterystyka statyczna tego układu przedstawiona jest na rys. 7a dla sztywności narastającej z przemieszczeniem x , a na rys. 7b dla sztywności malejącej z przemieszczeniem x .

Do rozwiązania zastosowana będzie metoda pierwszej harmonicznej. Poszukiwane jest więc rozwiązanie harmoniczne o częstości siły wymuszającej: $x = a \cos \omega t$.

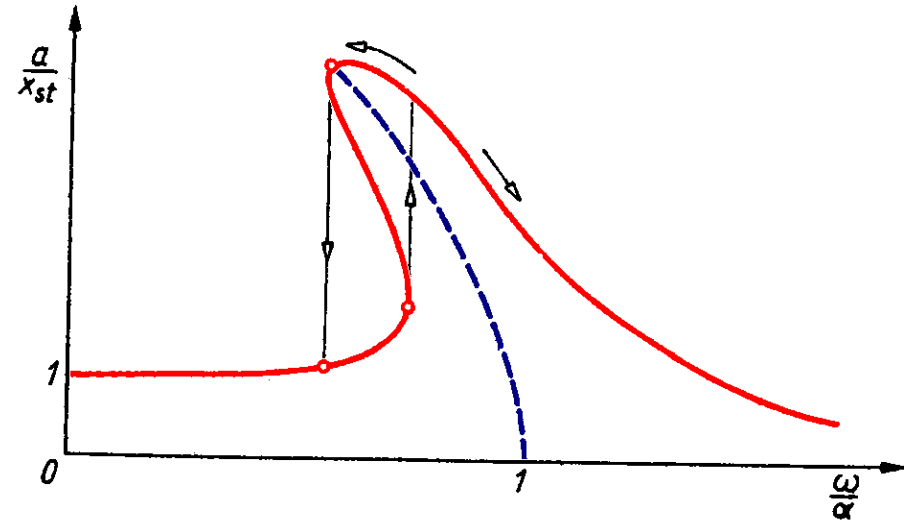
Równanie (10) będzie wtedy spełnione w każdej chwili, gdy $x=0$, wszystkie bowiem składniki (siły) są wtedy zerem, oraz może być spełnione w każdej chwili, gdy wychylenie osiąga wartość największą $x = a$. Równanie (10) daje wtedy:

$$f(a) = P + m\omega^2 a \quad (11)$$

Rozwiązanie tego równania dla różnych wartości amplitudy a można uzyskać najprościej kreśląc na wykresie charakterystyki proste przedstawiające prawą stronę równania (11). Współczynniki kierunkowe tych prostych zależą od częstości kołowej wymuszenia ω . Otrzymuje się więc wartości amplitud odpowiadające określonym częstościom wymuszenia. Pozwala to na zbudowanie wykresu rezonansowego (rys. 8) zależności a/x_{st} od ω/α .



Rys. 8



Rys. 9

Wykres rezonansowy (rys. 8) odpowiada sztywniejącej charakterystyce sprężystej z rys.7a. Charakterystyce miękniejącej z rys. 7b odpowiada wykres rezonansowy podany na rys.9.

Współczesne metody analizy i modelowania w dynamice konstrukcji. Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych.

Dynamika układów opisanych równaniami różniczkowymi drugiego rzędu może być sprowadzona do analizy układów opisanych równaniami pierwszego rzędu o postaci:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_N) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

przy warunkach początkowych

$$y_i(t_0) = y_{i0} \quad (2)$$

Numeryczne całkowanie równań (1) polega na zastąpieniu różniczek przez przyrosty Δy oraz Δt i jeśli są one odpowiednio dobrze dobrane (małe), to wówczas otrzymane równania algebraiczne dobrze aproksymują wyjściowe równania różniczkowe.

Metoda Rungego-Kutty

Schemat tej metody opisują równania:

$$y_{n+1} = y_n + k_2 + O(h^3) \quad (3)$$

gdzie

$$k_1 = hf(t_n, y_n), \quad k_2 = hf(t_n + 1/2h, y_n + 1/2k_1) \quad (4)$$

h jest krokiem (przyrostem) zmiennej niezależnej t , a metoda oparta na powyższym schemacie jest nazywana metodą **Rungego-Kutty drugiego rzędu**.

Obecnie klasyczną metodą stosowaną przy całkowaniu równań różniczkowych i bardziej dokładną jest metoda oparta na schemacie metody **Rungego-Kutty czwartego rzędu**:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
 k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
 k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_3) \\
 k_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

O ile metoda drugiego rzędu daje dokładność rzędu $O(h^3)$, to metoda czwartego rzędu poprawia dokładność do rzędu $O(h^5)$. Jednym z istotnych problemów tej metody jest określenie błędu obliczeń Δ i znalezienie związku $\Delta(h)$. Jeśli krok h_1 powoduje powstanie błędu Δ_1 , to inny krok h_0 powoduje powstanie innego błędu Δ_0 , który może być oszacowany za pomocą wzoru:

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0,2}
 \tag{6}$$

Powyższe równanie może być wykorzystywane na dwa sposoby. Jeśli $|\Delta_1| > |\Delta_0|$, to na podstawie wzoru (6) można dobrać inny krok h_1 , aby błąd nie był zbyt duży. Jeśli $|\Delta_1| < |\Delta_0|$, to na podstawie wzoru (6) można oszacować zwiększenie kroku obliczeń.

W praktyce używa się bardziej dokładnego równania:

$$h_0 = \begin{cases} S h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0,2}, & \Delta_0 \geq \Delta_1 \\ S h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0,25}, & \Delta_0 < \Delta_1 \end{cases} \quad (7)$$

przy czym S jest liczbą kilka procent mniejszą niż jedność.

Obecnie używa się zmodyfikowanej metody Rungego-Kutty z adaptacyjną kontrolą kroku całkowania.

Zmodyfikowana metoda punktu środkowego

Jeśli chcemy wyznaczyć zmienną niezależną $y(t)$ do punktu $t + H$, to dobieramy krok h określony wzorem:

$$h = \frac{H}{n} \quad (8)$$

Metoda wymaga $n + 1$ przekształceń prawej strony równań (1) wg wzorów:

$$z_0 \equiv y(t); \quad z_1 = z_0 + hf(t, z_0); \quad z_{m+1} = z_{m-1} + 2hf(t + mh, z_m), \quad m = 1, 2, \dots, n-1$$

$$y(t + H) \approx y_n \equiv \frac{1}{2} [z_n + z_{n-1} + hf(t + H, z_n)] \quad (9)$$

Współrzędna z jest średnią aproksymacją wartości funkcji, natomiast y_n jest końcową aproksymacją do wartości $y(t + H)$. Generalnie metoda ta "przegrywa" w zastosowaniach ze zmodyfikowaną metodą Rungego-Kutty z adaptacyjną kontrolą kroku całkowania.

Metoda Bulirscha-Stoera

Metoda ta pozwala osiągnąć najwyższą dokładność, jeśli rozwiązaniami analizowanych równań są funkcje gładkie.

Najpierw, jako jedną z trzech głównych idei tej metody, omówimy **ekstrapolację Richardsona**. Zakładamy istnienie analitycznej funkcji będącej rozwiązaniem. Jest ona testowana dla różnych kroków h , z których żaden nie daje żądanej dokładności. Jeśli wiemy wystarczająco dużo o formie poszukiwanej funkcji, to w rezultacie znajdujemy jej postać dla $h = 0$. Następnym krokiem jest ekstrapolacja funkcji wielomianami. Wreszcie trzecia idea polega na wyborze takich funkcji, które dają błędy rzędu h^2 . Wszystkie wymienione wyżej elementy są znane pod nazwą **metody Bulirscha-Stoera**.

Całkowanie układów zachowawczych

W tym przypadku nie ma potrzeby sprowadzania równań do rzędu pierwszego. Opisana metoda Bulirscha-Stoera umożliwia otrzymanie bardzo efektywnych wyników dla równań typu:

$$\dot{x} = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0; \quad \dot{z} = z_0 \quad (10)$$

J. Stoermer jako pierwszy zaproponował nadal popularną metodę, polegającą na następującej formule:

$$x_1 = x_0 + h \left[z_0 + \frac{1}{2} h f(t_0, x_0) \right]$$

$$x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = h^2 f(t_0 + hk, x_k), \quad k = 1, 2, \dots, m-1 \quad (11)$$

$$z_m = \frac{(x_m - x_{m-1})}{h} + \frac{1}{2} h f(t_0 + H, x_m)$$

gdzie $h = H/m$; $z_m = y'(t_0 + H)$ (12)

Sztywne układy równań

Jeśli w układach równań różniczkowych zmienna niezależna zmienia się wg różnych skal, wpływając na wartości zmiennej zależnej, to takie układy równań nazywamy **układami sztywnymi**. Rozpatrzmy następujący układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 998x + 1998y \\ \dot{y} &= -999x - 1999y \end{aligned} \quad (13)$$

z warunkami początkowymi

$$x(0) = 1, y(0) = 0 \quad (14)$$

Po wprowadzeniu transformacji

$$\begin{aligned}x &= 2u - v \\ y &= -u + v\end{aligned}\tag{15}$$

otrzymujemy rozwiązanie o postaci

$$\begin{aligned}x &= 2e^{-u} - e^{-1000u} \\ y &= -e^{-u} + e^{-1000u}\end{aligned}\tag{16}$$

Obecność członów e^{-1000u} wymaga kroku $h \ll 10^{-3}$, aby metoda była stabilna.

Obecnie istnieją trzy zasadnicze metody, prowadzące do rozwiązania sztywnych układów równań różniczkowych:

- a) zmodyfikowane metody Rungego-Kutty (np. metoda Rosenbrocka),
- b) zmodyfikowana metoda Bulirsch-Stoera,
- c) metoda predykcyjno-korekcyjna oparta na metodzie Geara.

Metoda Rosenbrocka

Metoda ta polega na poszukiwaniu rozwiązania o postaci:

$$y(t_0 + h) = y_0 + \sum_{i=1}^s c_i k_i\tag{17}$$

gdzie poprawki k_i mogą być znalezione przez rozwiązanie s liniowych równań o postaci:

$$(I - \gamma hf')k_i = hf \left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j \right) + hf' \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} k_j \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (18)$$

Współczynniki γ , c_i , α_{ij} i γ_{ij} są pewnymi stałymi niezależnymi od rodzaju problemu. Jeśli $\gamma = \gamma_{ij} = 0$, to metoda redukuje się do metody Rungego-Kutty. Równania (18) pozwalają na rekurencyjne wyznaczenie poprawek k_1, k_2, \dots

Kluczowym algorytmem, potrzebnym przy całkowaniu sztywnego układu równań, jest metoda oparta na automatycznym doborze kroku całkowania. Na podstawie równania (19) szacuje się dwie wartości y , jedną rzeczywistą i drugą szacunkową y^* , z różnymi współczynnikami c_i^* , $i = 1, 2, \dots, s^*$, gdzie $s^* < s$, ale dla takich samych wartości poprawek k_i . Różnica $y - y^*$ umożliwia oszacowanie błędu, który dalej jest używany do kontroli kroku. W celu redukcji mnożenia, występującego po prawej stronie równania (18), wprowadzamy wielkość:

$$g_i = \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_{ik} k_k \gamma_{ki} \quad (19)$$

Równania przyjmują postać:

$$\left(\frac{1}{\gamma h} - f'\right)g_1 = f(y_0)$$

$$\left(\frac{1}{\gamma h} - f'\right)g_2 = f(y_0 + a_{21}g_1) + \frac{c_{21}g_1}{h}$$

$$\left(\frac{1}{\gamma h} - f'\right)g_3 = f(y_0 + a_{31}g_1 + a_{32}g_2) + \frac{c_{31}g_1 + c_{32}g_2}{h}$$

$$\left(\frac{1}{\gamma h} - f'\right)g_4 = f(y_0 + a_{41}g_1 + a_{42}g_2 + a_{43}g_3) + \frac{c_{41}g_1 + c_{42}g_2 + c_{43}g_3}{h}$$

(20)

Metody numeryczne stosowane przy systematycznej analizie drgań

Jeśli chcemy określić rozwiązania równań (21), to musimy znać warunki początkowe $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$, tzw. **wektor stanu**. Po numerycznym scałkowaniu równań ruchu w czasie równym przybliżonemu (lub dokładnemu) okresowi T_0 znajdujemy inny wektor stanu $\mathbf{q}(T_0)$, który zależy od punktu startu, czyli wektora \mathbf{q}_0 . Zamiast obserwować cały przebieg od chwili t_0 do chwili T_0 , wystarczy ograniczyć się do analizy tylko dwóch punktów (wektorów stanu) odpowiadających tym odciętom.

Przedstawiono to schematycznie na rys. 1 dla $n = 1$.

W przypadku rozwiązania okresowego o okresie T_0 oba wektory musiałyby spełniać warunek

$$\mathbf{q}(T_0, \mathbf{q}_0) - \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (23)$$

Powyższe równanie służy do numerycznego określenia wektora \mathbf{q}_0 za pomocą **metody Newtona**. Daje ona rozwinięcie w szereg Taylora wokół k -tego przybliżenia rozwiązania $\mathbf{q}_0^{(k)}$ z ograniczeniem się w rozwinięciu tylko do członów liniowych. Po przyrównaniu tego rozwinięcia do zera otrzymujemy równanie liniowe do wyznaczenia poprawki $\Delta \mathbf{q}_0^{(k)}$. Jakobian metody Newtona jest określony wzorem

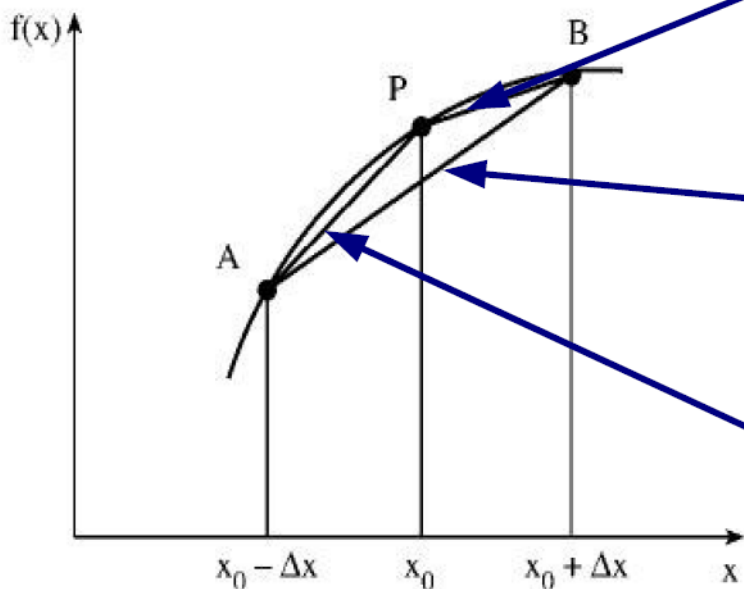
$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{q}(T_0, \mathbf{q}_0)}{\partial \mathbf{q}_0} - \mathbf{I} = \mathbf{N} - \mathbf{I} \quad (24)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową. Po zakończeniu iteracji Newtona bierzemy otrzymaną w ostatnim kroku metody macierz \mathbf{N} , której wartości własne są multiplikatorami charakterystycznymi. Określają one stateczność i bifurkacje analizowanej orbity. Opisana metoda nosi nazwę **metody strzelania**.

Drugim konkurencyjnym sposobem jest metoda oparta na **algorytmie Galerkina**.

Metoda różnic skończonych (metoda różnicowa)

Zamiana równania różniczkowego na różnicowe. Aproksymacja pochodnych ilorazem różnicowym (lub wyrażeniami wyższego rzędu):



Górny iloraz różnicowy: (progresywny)

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Centralny iloraz różnicowy:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2 \Delta x}$$

Dolny iloraz różnicowy: (wsteczny)

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

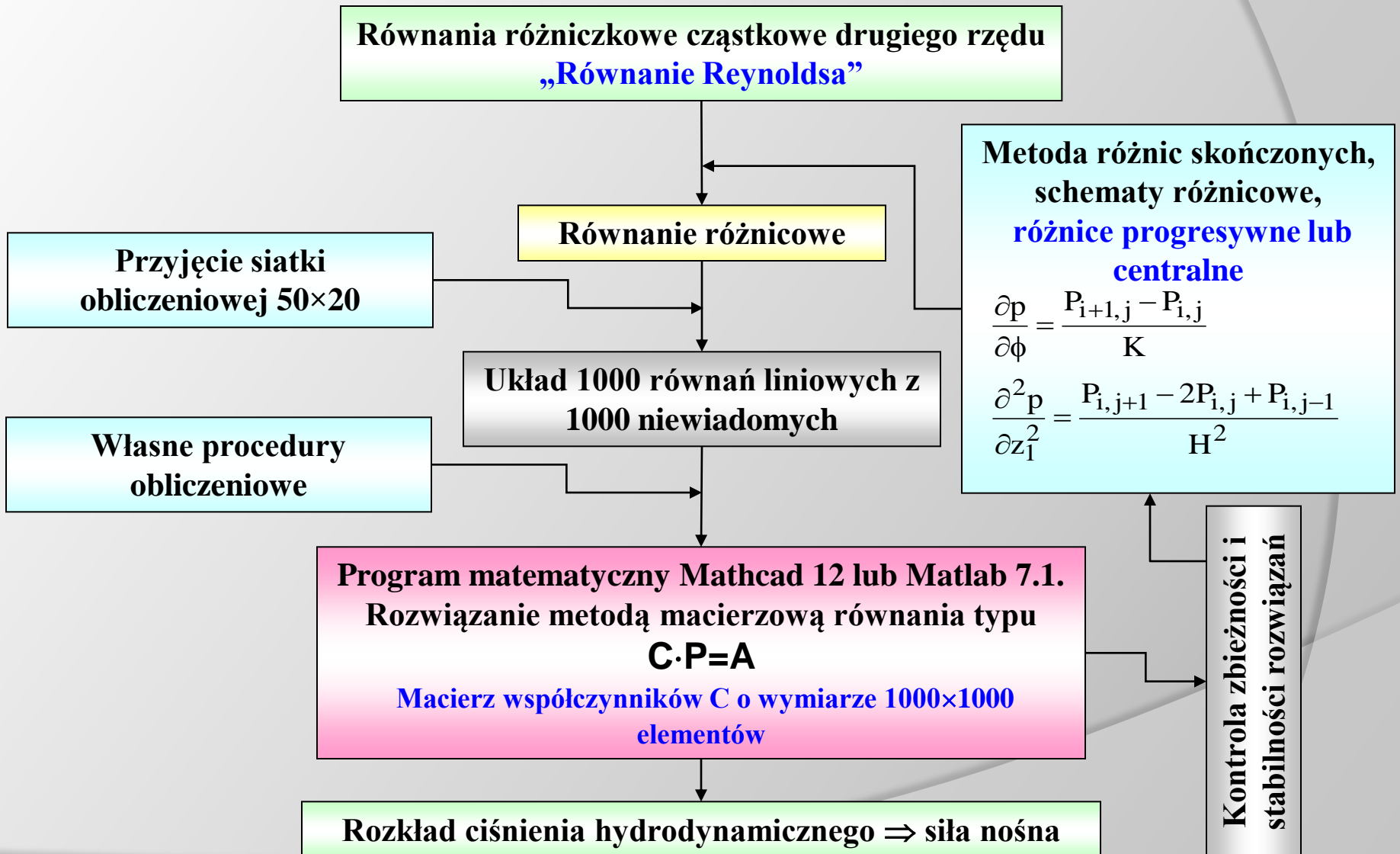
Z 3-krotnego zastosowania wzoru na centralny iloraz różnicowy dostajemy:

$$f'(x_0 + \Delta x/2) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad f'(x_0 - \Delta x/2) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + \Delta x/2) - f'(x_0 - \Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

DRGANIA METODY NUMERYCZNE - s.255



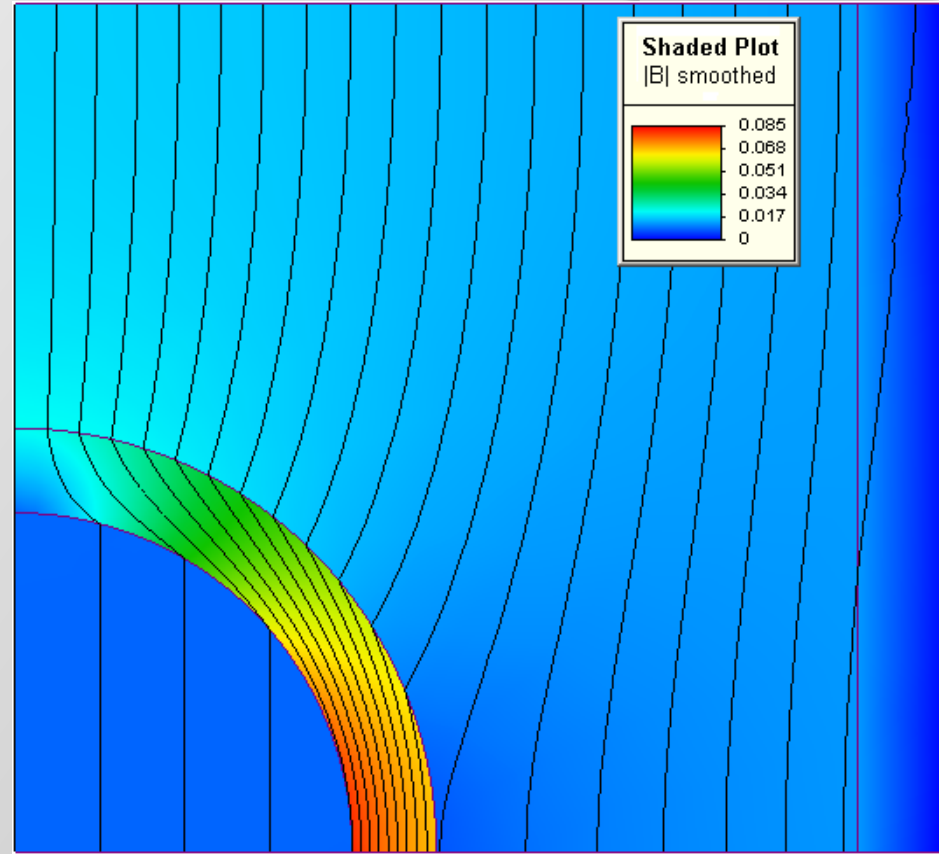
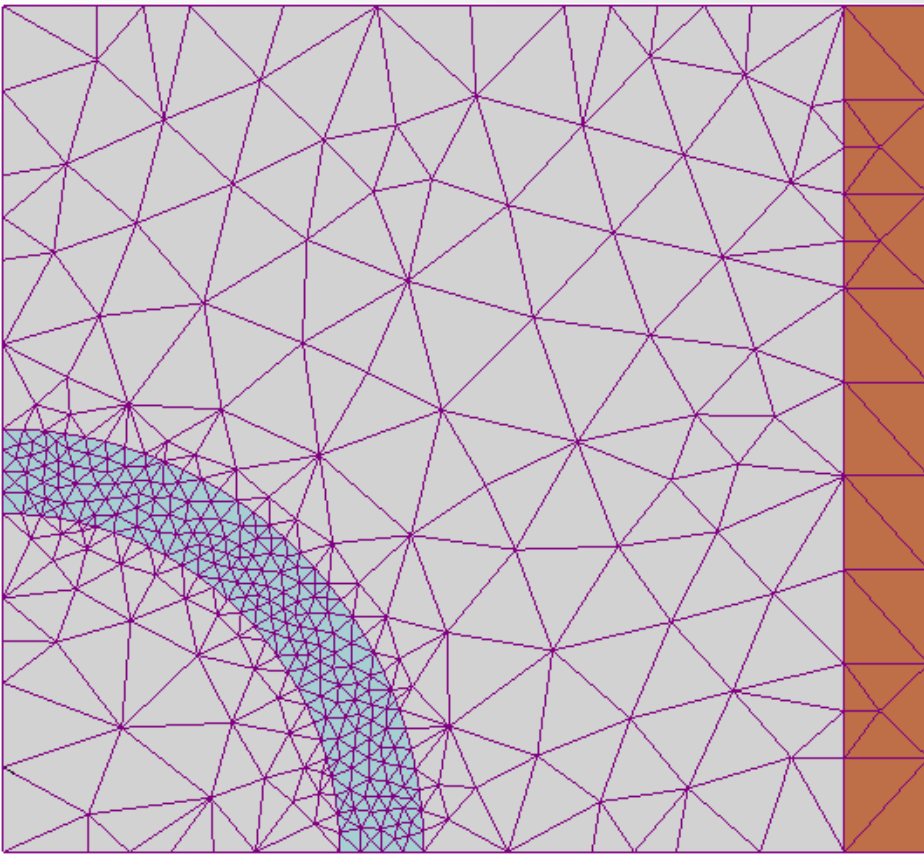
Metoda Elementów Skończonych (MES, ang. FEM, *finite-element method*) – zaawansowana matematycznie metoda obliczeń fizycznych opierająca się na podziale obszaru (tzw. dyskretyzacja, ang. *mesh*), najczęściej powierzchni lub przestrzeni, na skończone elementy uśredniające stan fizyczny ciała i przeprowadzaniu faktycznych obliczeń tylko dla węzłów tego podziału. Poza węzłami wyznaczana właściwość jest przybliżana na podstawie wartości w najbliższych węzłach.

Metodą pokrewną jest **metoda elementów brzegowych**.

Jeśli obliczany model posiada symetrię kształtu i wymuszenia, wówczas można obliczyć tylko część obiektu celem szybszego uzyskania wyników, tak jak to przedstawiono na rysunku.

Obliczenia MES mogą być przeprowadzane w przestrzeni dwuwymiarowej (2D), gdzie dyskretyzacja sprowadza się najczęściej do podziału obszaru na trójkąty. Rozwiązanie takie pozwala na obliczenie wartości pojawiających się w przekroju danego układu. Związane są z tym jednak pewne ograniczenia wynikające ze specyfiki rozwiązywanego problemu.

Z uwagi na postęp techniki komputerowej w ostatnich latach większość pakietów symulacyjnych wyposażona jest w możliwość rozwiązywania zagadnień w przestrzeni trójwymiarowej (3D). Dyskretyzacja zazwyczaj polega na podziale obszaru na czworościany. Modelowanie takie pozbawione jest fundamentalnych ograniczeń technologii 2D, ale jest znacznie bardziej wymagające pod względem pamięci i mocy obliczeniowej komputera



Podstawową zaletą MES jest możliwość uzyskania wyników dla skomplikowanych kształtów, dla których niemożliwe jest przeprowadzenie obliczeń analitycznych. Oznacza to, że dane zagadnienie może być symulowane w pamięci komputera, bez konieczności budowania prototypu, co znacznie ułatwia proces projektowania.

Podział obszaru na coraz mniejsze elementy skutkuje zazwyczaj dokładniejszymi wynikami obliczeń, ale jest to okupione zwiększonym zapotrzebowaniem na moc obliczeniową komputera. Dodatkowo należy liczyć się z nakładającymi się błędami obliczeń wynikającymi z wielokrotnych przybliżeń (zaokrągleń) przetwarzanych wartości. Jeśli obszar składa się z kilkuset tysięcy elementów, które mają nieliniowe własności wówczas obliczenia muszą być odpowiednio modyfikowane w kolejnych iteracjach tak, aby końcowe rozwiązanie było poprawne.

Symulacje MES nie mogą być przeprowadzane w czasie rzeczywistym, ponieważ dla bardzo skomplikowanych układów rozwiązanie danego problemu może być bardzo długotrwałe (w zależności od stopnia skomplikowania i mocy obliczeniowej komputera czas ten może wynosić do kilku sekund do kilku dni, a nawet i dłużej). Dodatkowo, wartości obliczone metodą MES obarczone mogą być błędami, których wartość zależy od założeń przyjętych podczas formułowania problemu do rozwiązania, jak również i dokładności dostępnych danych materiałowych. Dlatego też, jeśli to tylko możliwe należy dane obliczone zweryfikować z danymi zmierzonymi na rzeczywistym urządzeniu lub układzie

Metoda elementów brzegowych

W przeciwieństwie do MES w MEB dyskretyzacji podlega jedynie brzeg ciała co pozwala na zmniejszenie liczby elementów. Z tego powodu istotny jest kierunek linii określającej brzeg. W przypadku modelu płaskiego brzeg powinien być opisany linia w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara. W przypadku modelu przestrzennego normalna do powierzchni musi być skierowana na zewnątrz materiału.

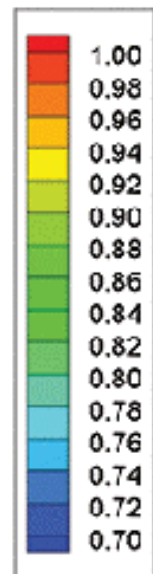
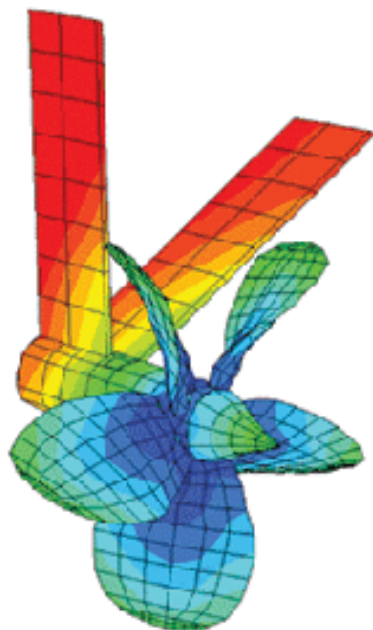
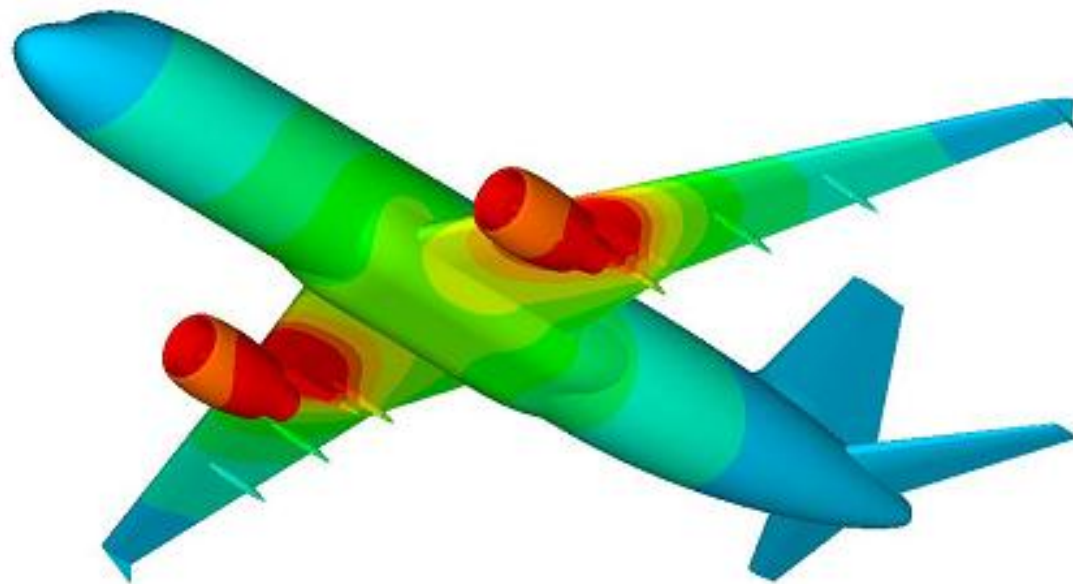
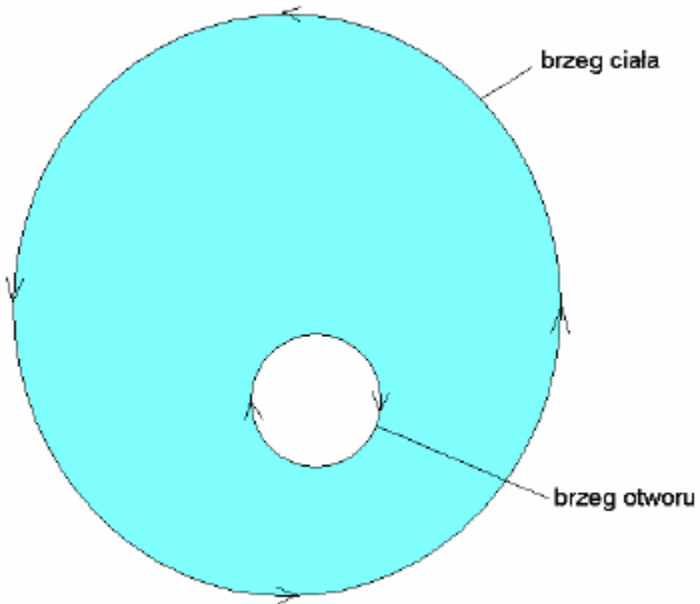
Metoda elementów brzegowych rozwija się w ostatnich latach bardzo dynamicznie. Wielką jej zaletą jest względna prostota formułowania i rozwiązywania skomplikowanych zagadnień teorii potencjału, teorii sprężystości oraz analizy i optymalizacji konstrukcji inżynierskich. W zadaniach przestrzennych, dyskretyzacji ulega zwykle powierzchnia ciała, a w zadaniach płaskich jego brzeg, co zmniejsza o rząd wymiar problemu.

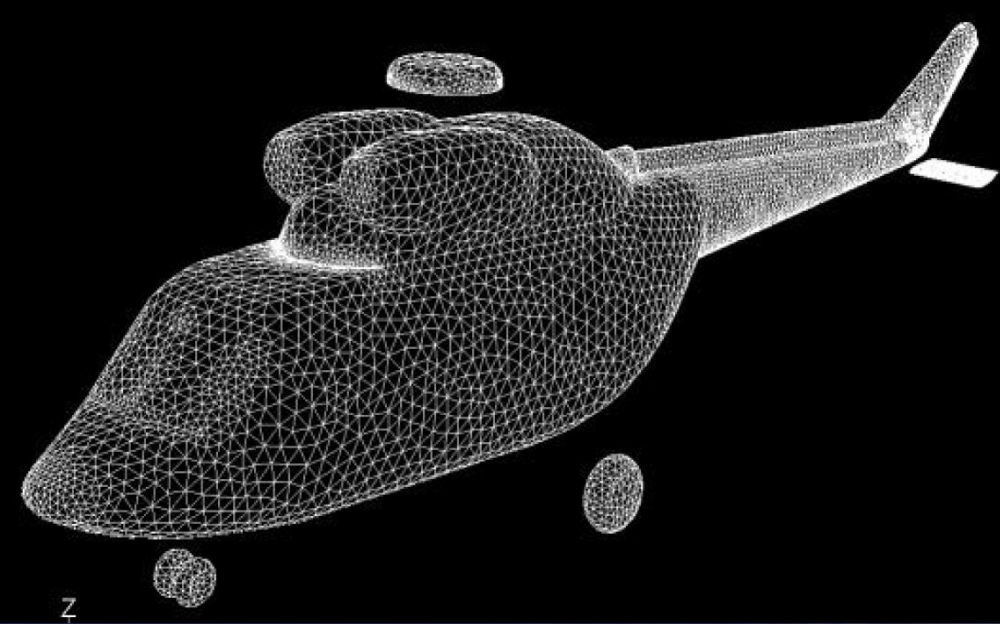
Do wyprowadzenia równań całkowych opisujących zadanie, niezbędna jest znajomość rozwiązania podstawowego (fundamentalnego). Jest ono bardzo ważnym pojęciem stosowanym w MEB, któremu można nadać sens fizyczny.

Metoda elementów brzegowych nie wymaga znacznego stopnia dyskretyzacji i daje możliwość obliczania odpowiednich całek brzegowych w sposób analityczny. Jej podstawy wiążą się z klasyczną teorią potencjału.

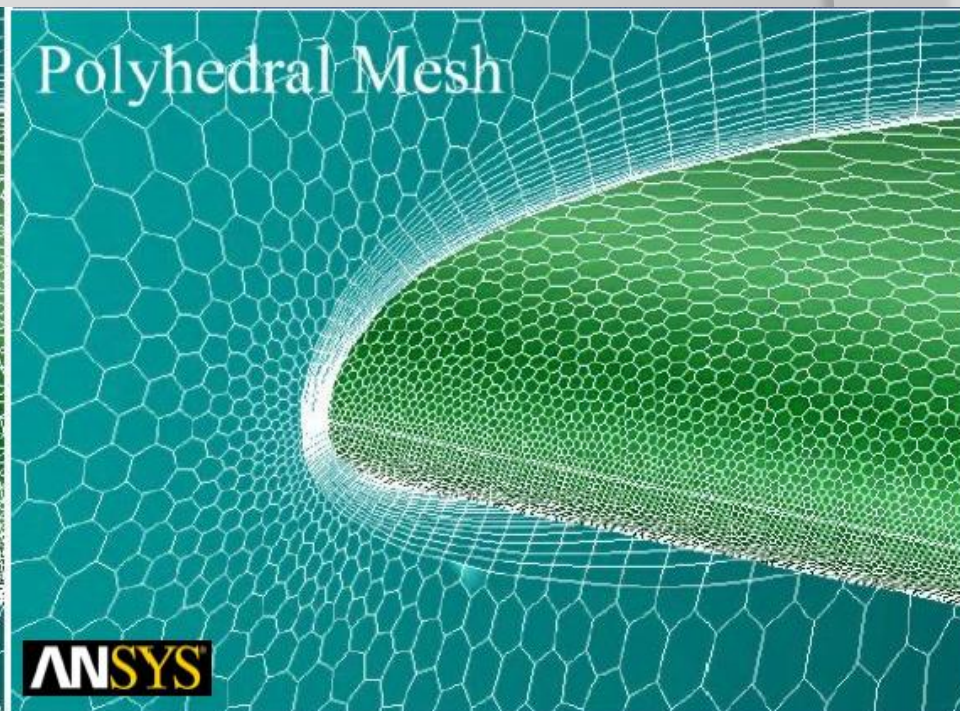
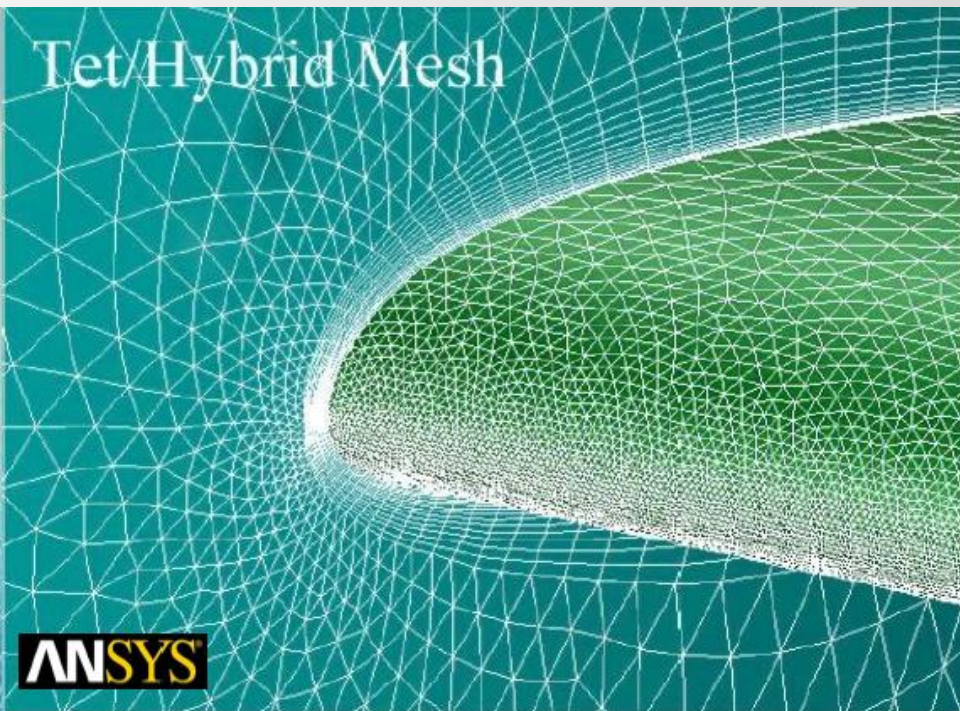
Mała popularność tej metody wynikała początkowo z braku odpowiednich narzędzi obliczeniowych służących do rozwiązywania dużych układów równań algebraicznych, które buduje się przez skończenie wymiarową aproksymację zadań opisanych wyżej wymienionymi równaniami.

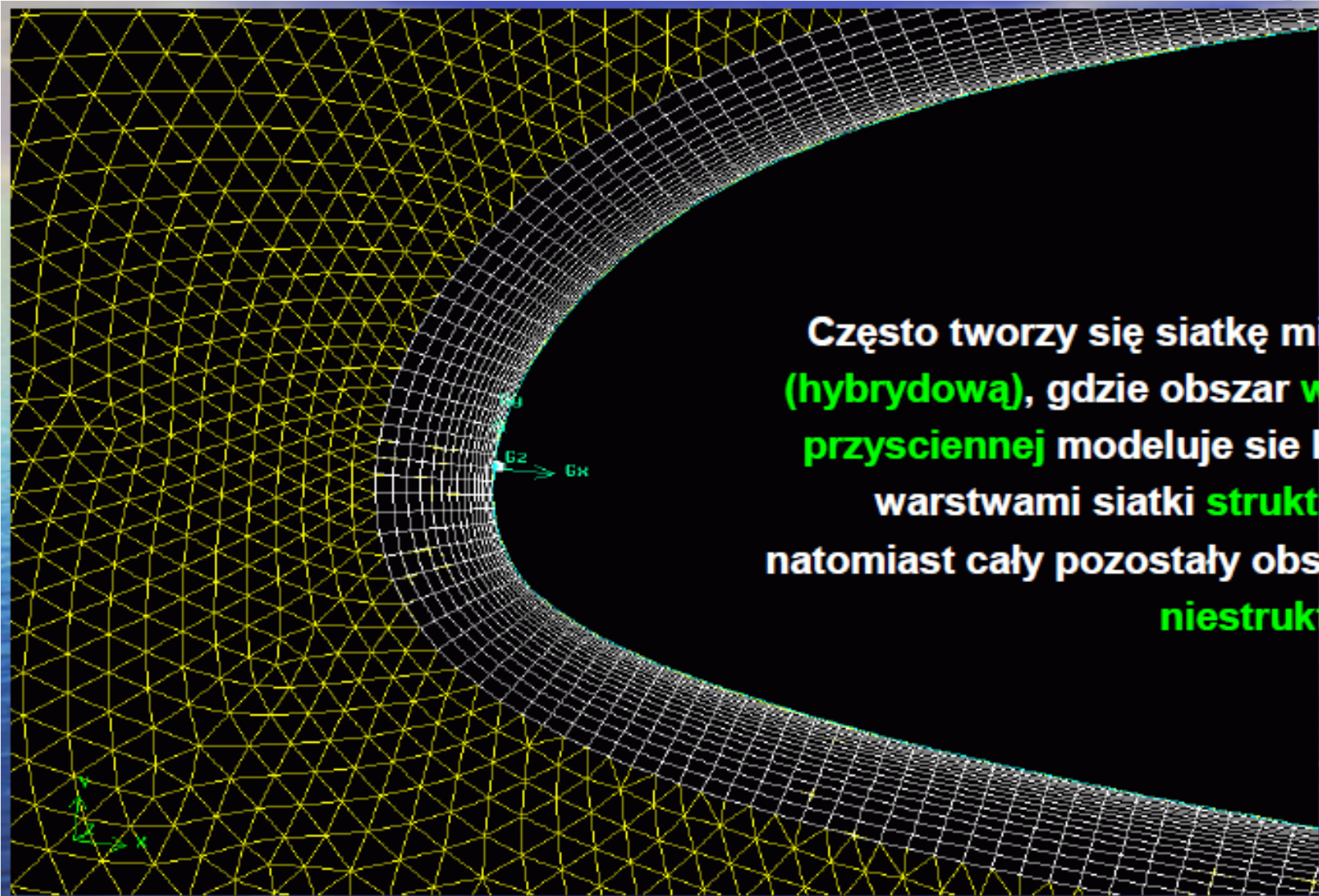
Powszechne zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej w drugiej połowie XX wieku sprawiło, że metody numeryczne, a w tym MEB zaczęła się intensywnie rozwijać. Nazwę metody wprowadzili do literatury naukowej Banerjee i Butterfield oraz Brebbia i Dominguez w 1977 roku.





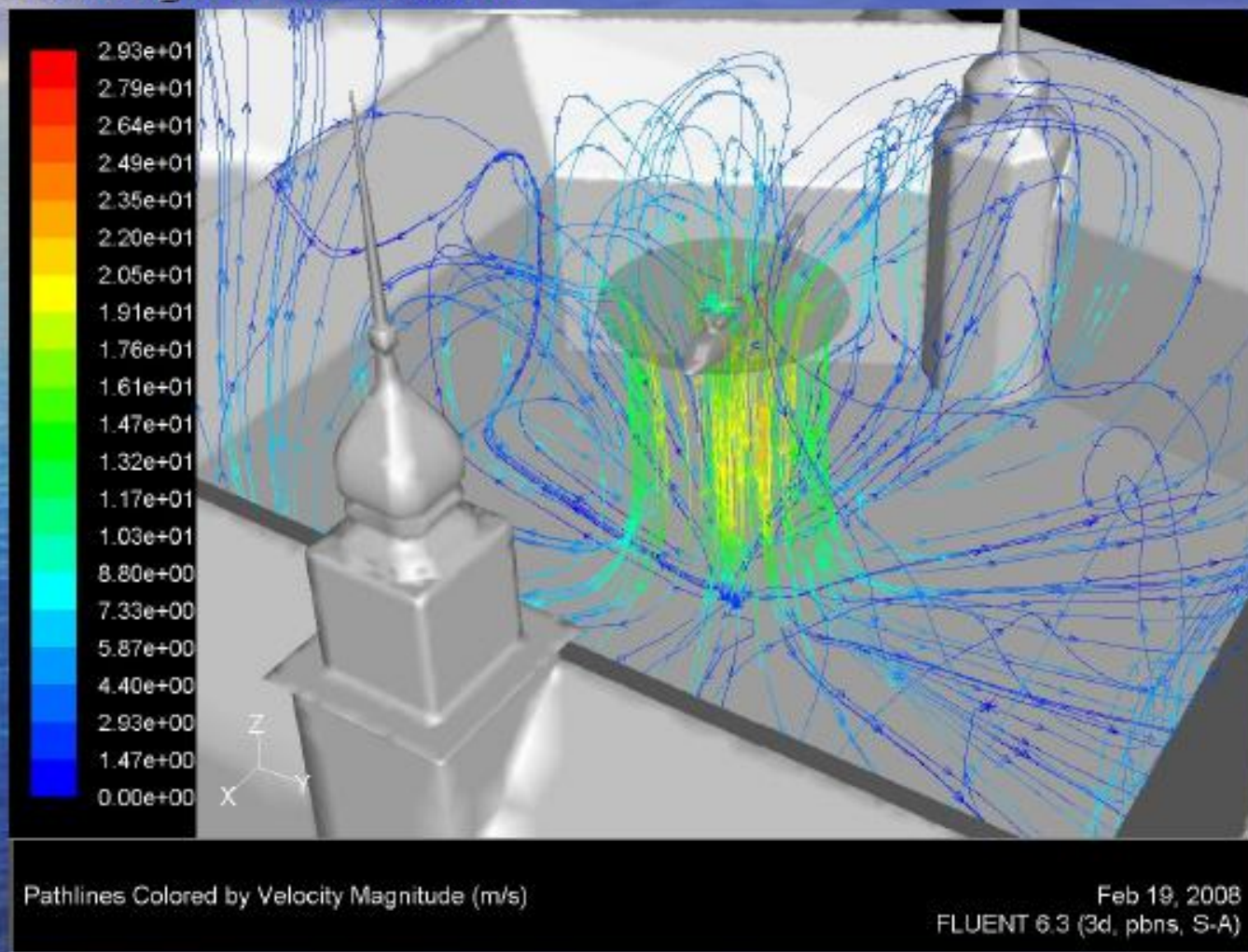
Siatki mogą tworzyć objętości 4, 5, i 6-ścienne, możliwe jest także obliczanie elementów z większą ilością ścian (polyhedral).



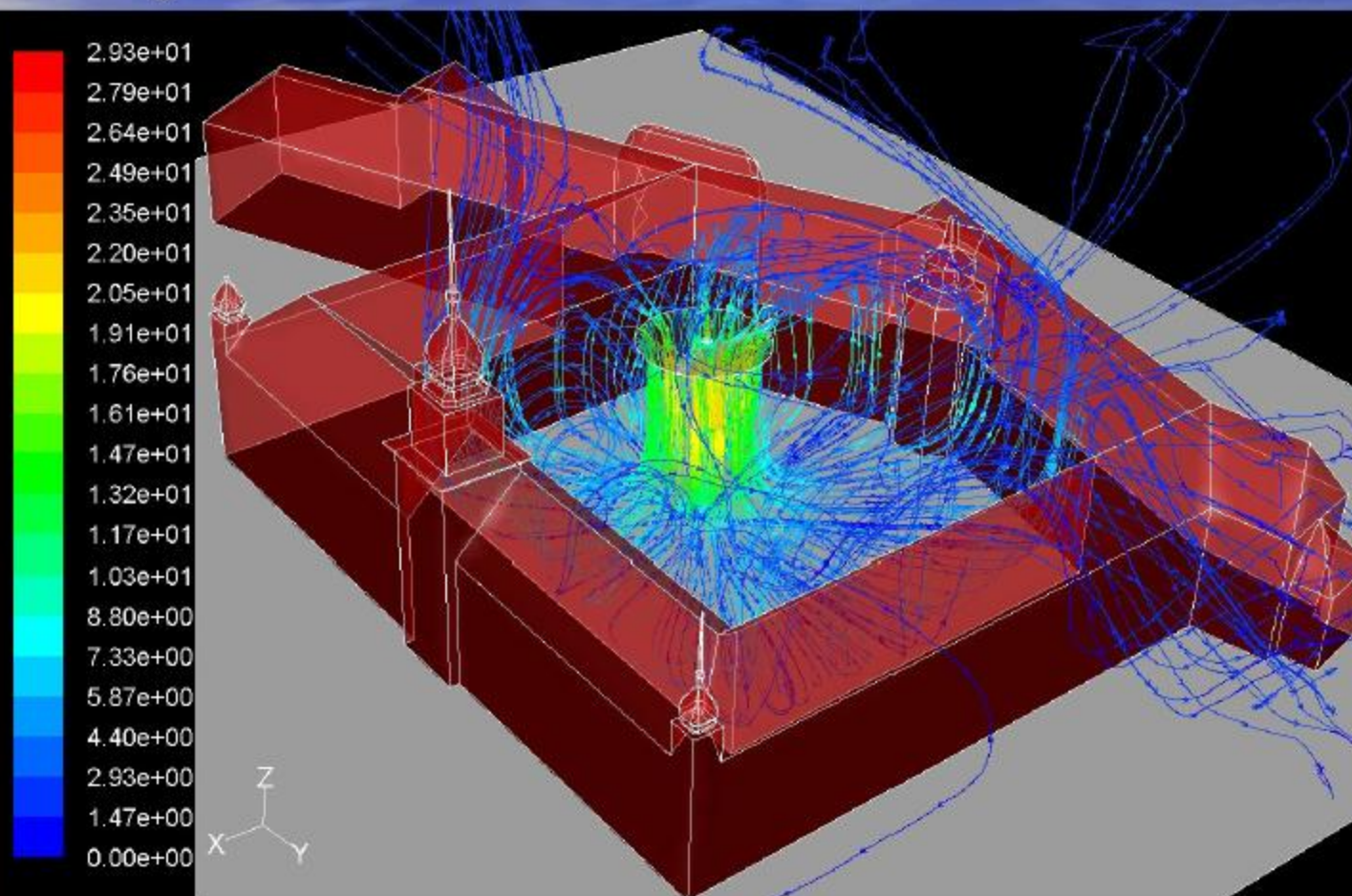


Często tworzy się siatkę mieszaną (hybrydową), gdzie obszar warstwy przystiennej modeluje się kilkoma warstwami siatki strukturalnej, natomiast cały pozostały obszar jest niestrukturalny

Symulacja zawisu śmigłowca WSK PZL W-3 „Sokół” nad dziedzińcem Zamku Królewskiego w Warszawie.



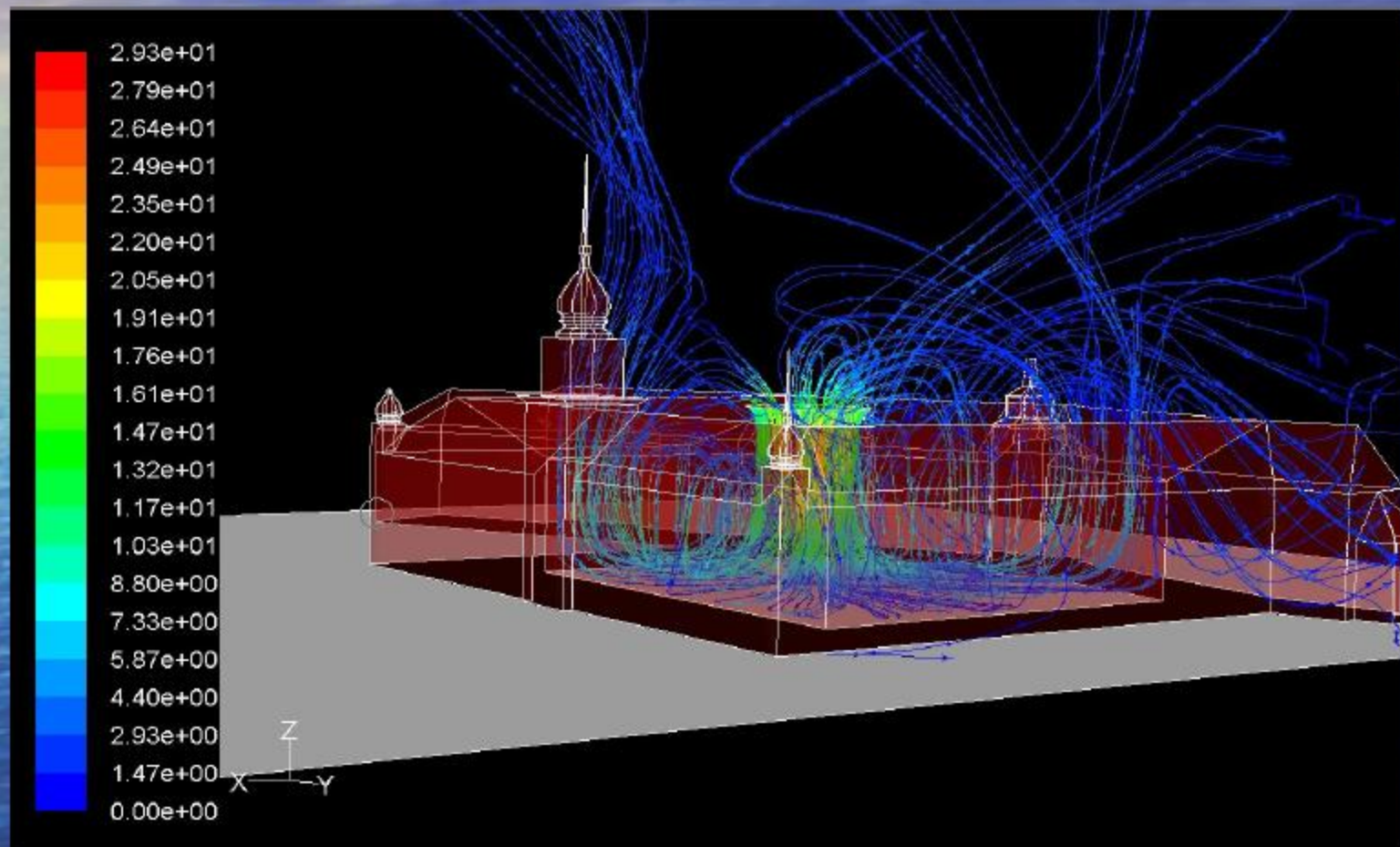
Symulacja zawisu śmigłowca WSK PZL W-3 „Sokół” nad dziedzińcem Zamku Królewskiego w Warszawie.



Pathlines Colored by Velocity Magnitude (m/s)

Feb 19, 2008
FLUENT 6.3 (3d, pbns, S-A)

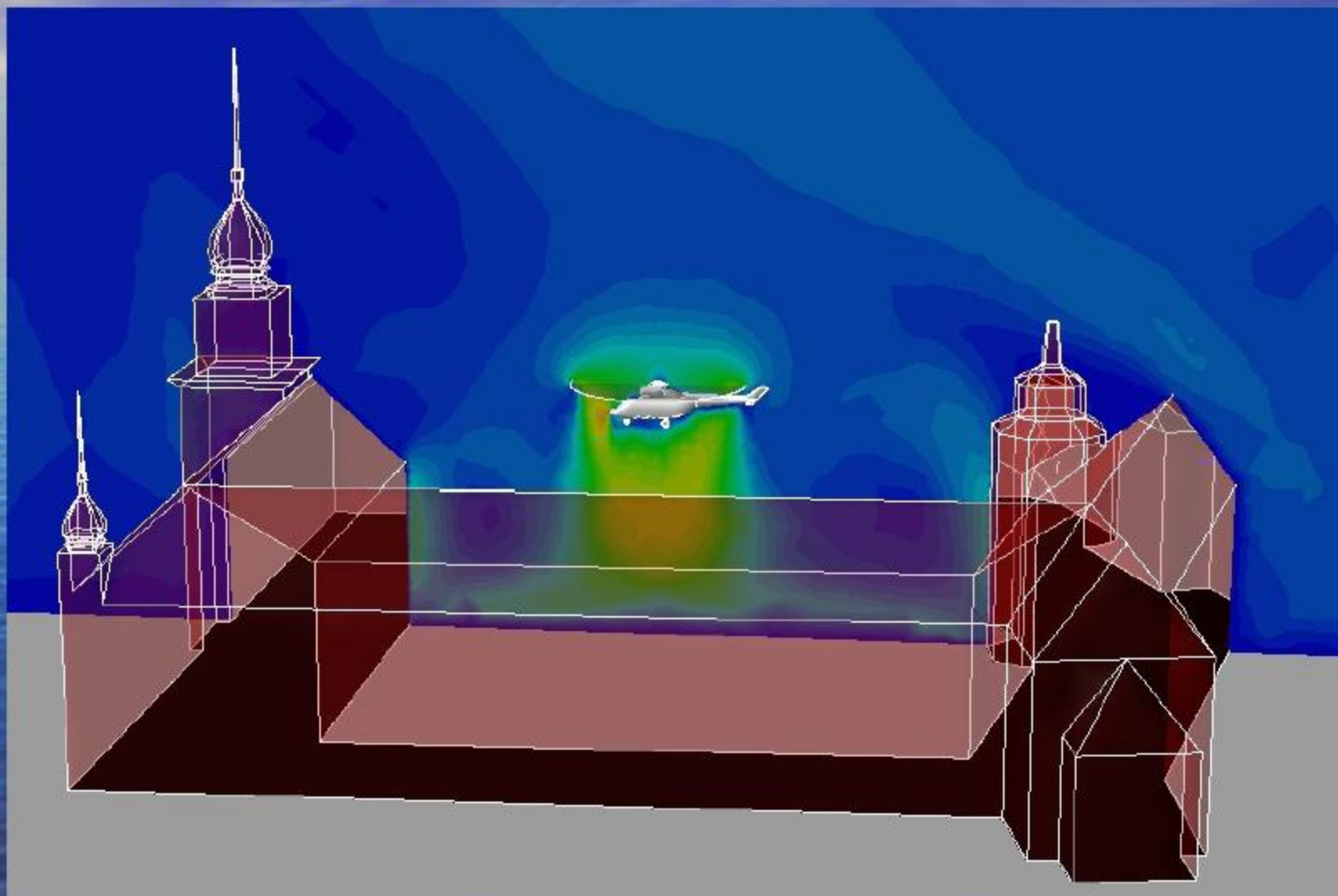
Symulacja zawisu śmigłowca WSK PZL W-3 „Sokół” nad dziedzińcem Zamku Królewskiego w Warszawie.



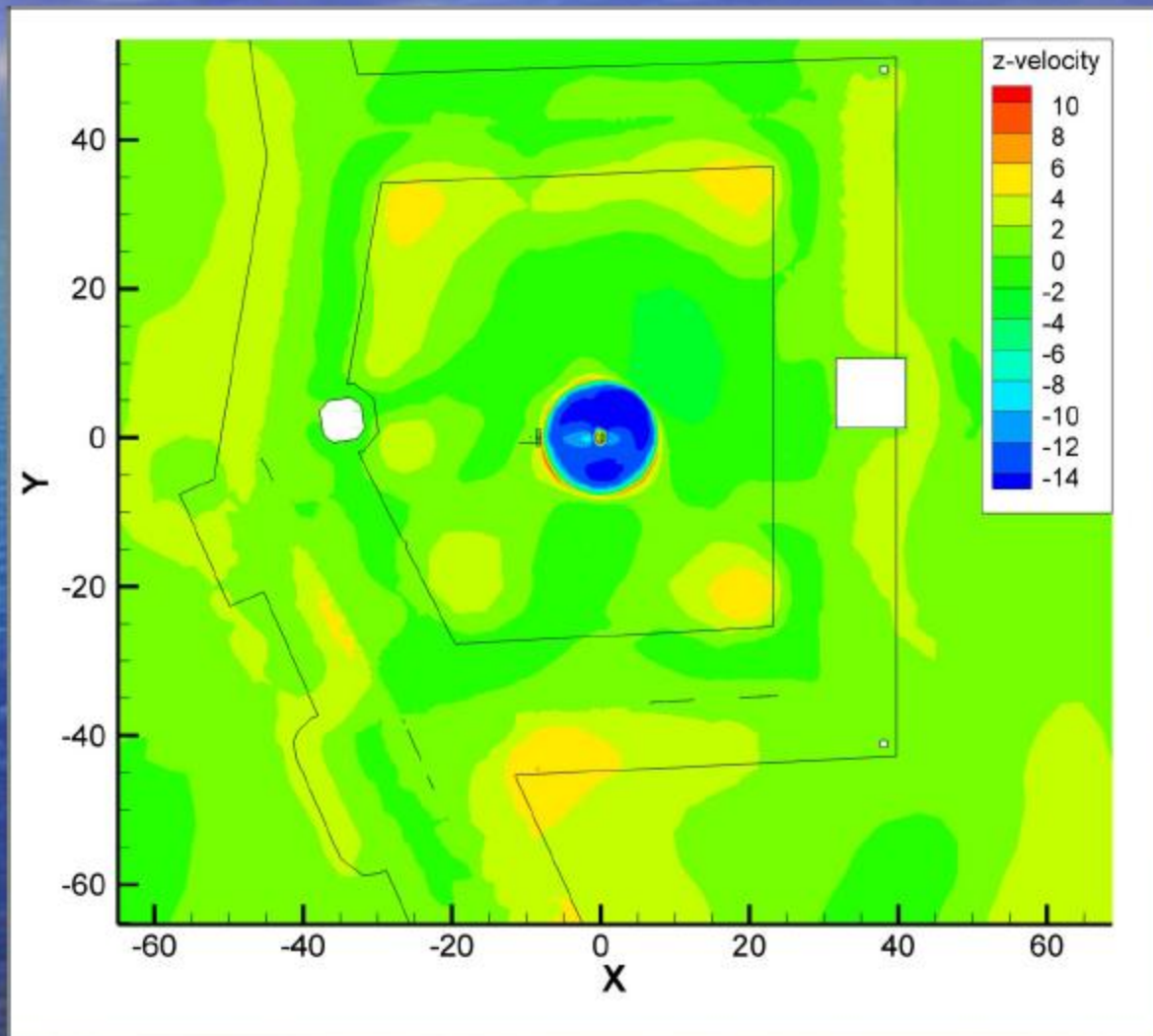
Pathlines Colored by Velocity Magnitude (m/s)

Feb 19, 2008
FLUENT 6.3 (3d, pbns, S-A)

Symulacja zawisu śmigłowca WSK PZL W-3 „Sokół” nad dziedzińcem Zamku Królewskiego w Warszawie.



Symulacja zawisu śmigłowca WSK PZL W-3 „Sokół” nad dziedzińcem Zamku Królewskiego w Warszawie.



Dziękuję za uwagę!

