MECHANIKA STOSOWANA

DYNAMIKA

LECH MURAWSKI
WYDZIAŁ MECHANICZNY
KPT
lemur@wm.am.gdynia.pl
pok. A213

Prawa Newtona

I prawo: Jeżeli na ciało nie działa żadna siła to pozostaje ono w stanie spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym, prostoliniowym.
prawo bezwładności - fundamentalna własność materii

II prawo: Jeżeli na ciało działa niezrównoważona siła to powoduje ona jego przyśpieszenie, które jest odwrotnie proporcjonalne do masy tego ciała i jest skierowane zgodnie z kierunkiem działania siły.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

przyśpieszenie – zmiana prędkości w czasie
masa – miara bezwładności ciała
pierwsze prawo wynika z drugiego prawa Newtona
wszystkie wielkości mogą być zależne od czasu $\Rightarrow$ *równanie różniczkowe*
podstawowe równanie dynamiki!

III prawo: Każda siła działająca na ciało wywołuje przeciwdziałanie równe co do wartości, ale skierowane w przeciwnym kierunku.
zasada akcji i reakcji

Prawo powszechnego oddziaływania grawitacyjnego

Każde dwa ciała materialne o masach m_1 i m_2 działają na siebie z siłą proporcjonalną do iloczynu tych mas, a odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości pomiędzy tymi ciałami.

$$F_g = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$k = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[{}^{N \cdot m^2}/_{kg^2} \right]$$

Prawo powszechnej grawitacji
przykład 1

$$F_g = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Wyznaczenie wielkości przyciągania grawitacyjnego dwojga dotykających się ludzi

$m_{1,2} = 80$ kg ; r = 0.3 m

$$F_g = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{80 \cdot 80}{0.3^2}$$

$$\left[N \cdot m^2 / _{kg^2} \cdot \frac{kg \cdot kg}{m^2} \right] = [N]$$

$$F_g = 0.0000047\ N$$

$$m = 0.48\ mg$$

Prawo powszechnej grawitacji przykład 2

$$F_g = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Lotniskowiec John F. Kennedy mija się w odległości 5m z krążownikiem Piotr Wielki

<u>Lotniskowiec:</u> *wyporność całkowita = 80940ton, L=324m, S=39.6m , zanurzenie=11.3m*
<u>Krążownik:</u> *wyporność całkowita = 24300ton, L=252m, S=28.5m , zanurzenie=9.1m*

$$F_g = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{80940000 \cdot 24300000}{40^2}$$

$$F_g = 82\ N$$

$$m = 8.5\ kg < zgrzewki\ wody$$

Równania ruchu punktu materialnego

$$F_x = m \cdot a_x$$
$$F_y = m \cdot a_y$$
$$F_z = m \cdot a_z$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$
$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$
$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

$\Rightarrow$

$$F_x = m \cdot \ddot{x}$$
$$F_y = m \cdot \ddot{y}$$
$$F_z = m \cdot \ddot{z}$$

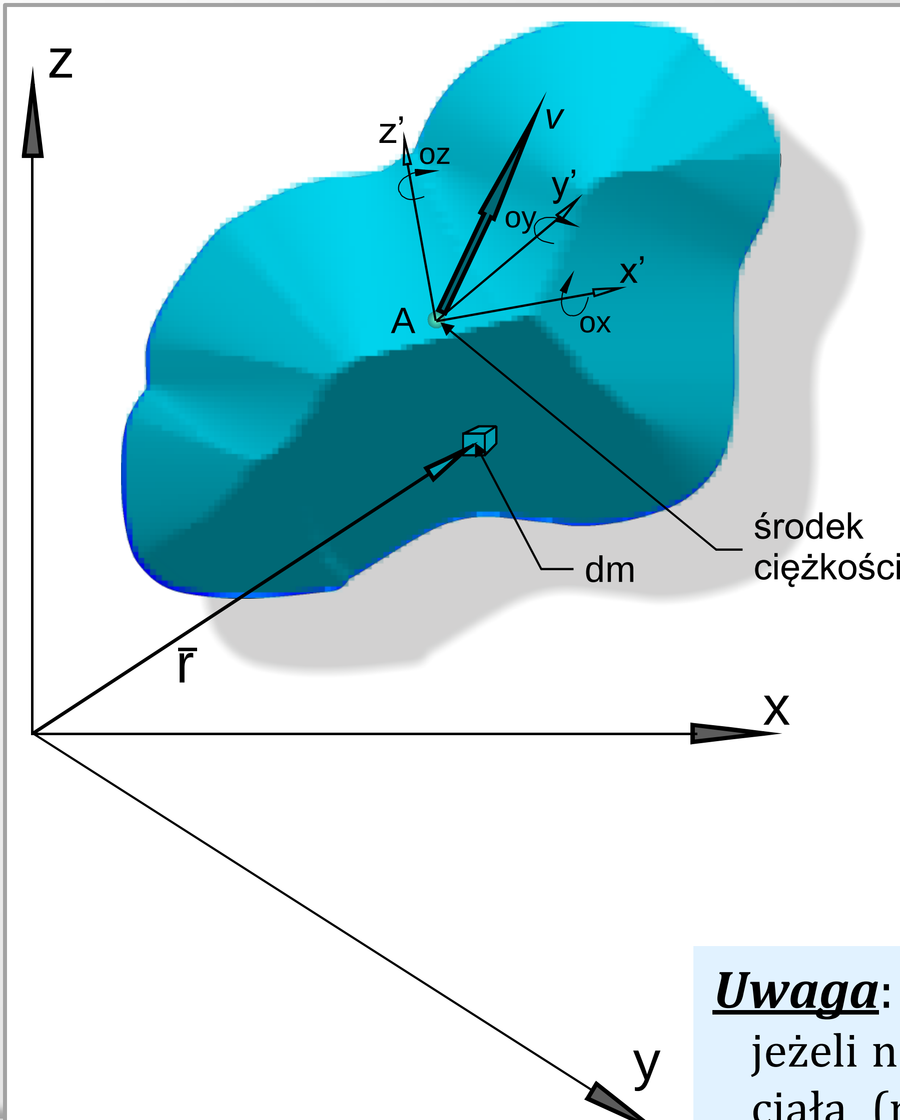
$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = m \cdot \ddot{x}$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = m \cdot \ddot{y}$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = m \cdot \ddot{z}$$

Powyższe równania to równania różniczkowe ruchu punktu materialnego
w prostokątnym układzie współrzędnych
Równania różniczkowe mogą być trudne w rozwiązaniu $\Rightarrow$ Zasada d’Alemberta

MASOWE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI

Mechanika bryły sztywnej – wstęp



Podstawowe modele ciał w mechanice:

- Ciało (bryła) idealnie sztywne (nieodkształcalne)
- Układ punktów materialnych
- Punkt materialny

Bryła sztywna jest modelem ciała, w którym odległości pomiędzy poszczególnymi punktami są niezmienne – ciało jest nieodkształcalne.

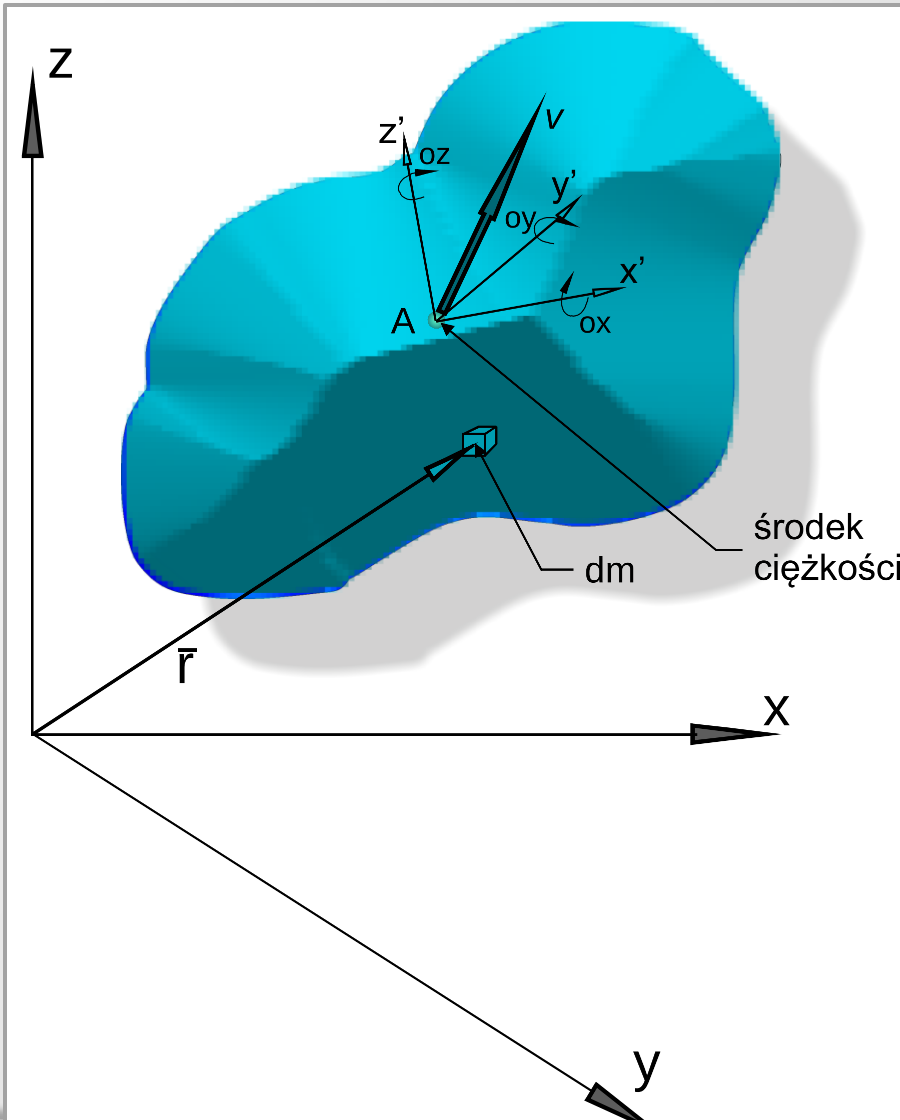
II prawo Newtona: $$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

W ruchu obrotowym:

$$\vec{M} = I \cdot \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \quad gdzie: \vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

Uwaga: Ciało modelujemy przy pomocy bryły sztywnej jeżeli nie do pominięcia są efekty związane z obrotami ciała (natomiast nieistotne są jego odkształcenia → wytrzymałość materiałów)

Masowe momenty bezwładności



Masowym momentem bezwładności nazywamy iloczyn masy ciała przez kwadrat odległości od punktu, prostej lub płaszczyzny.

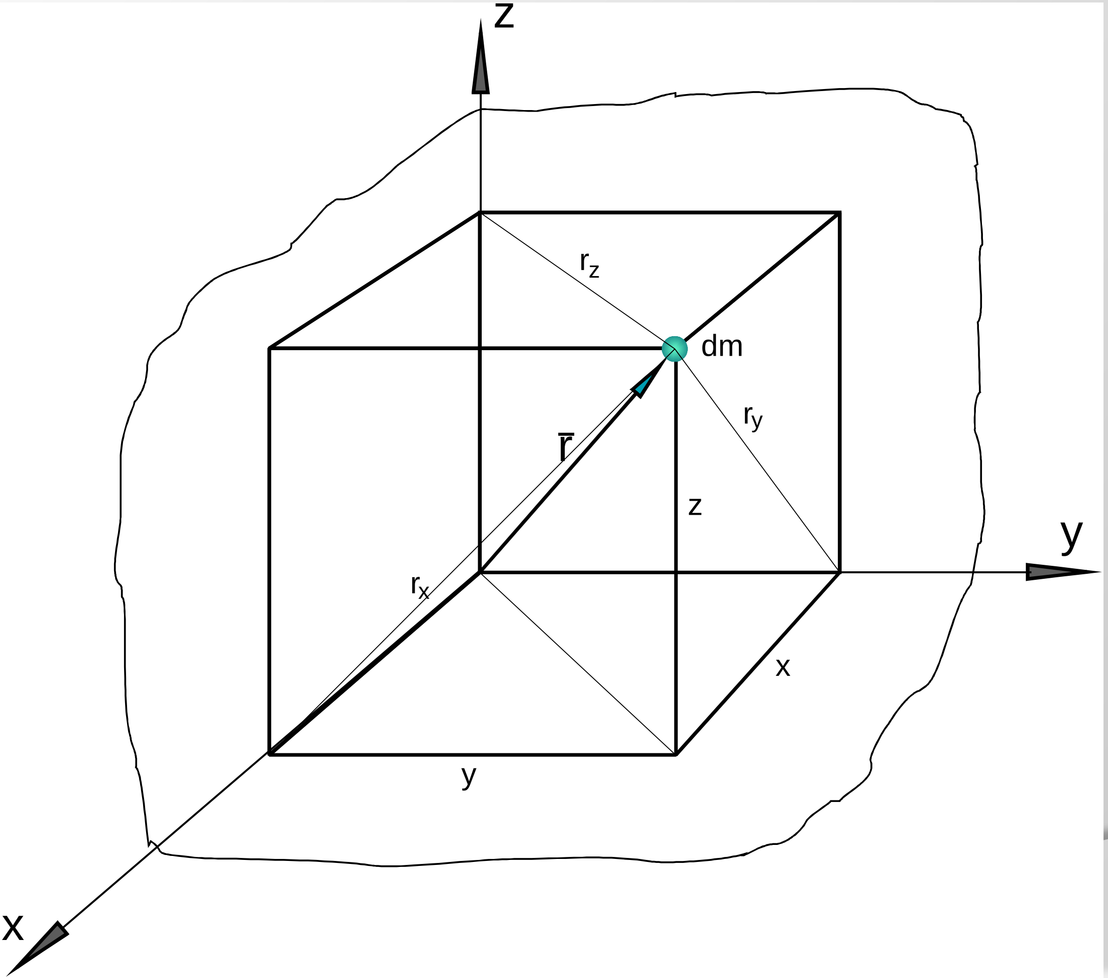
$$I = m \cdot r^2$$

<u>Przykład:</u> masowy moment bezwładności względem początku układu współrzędnych

$$I = \lim_{dm \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} dm_i \cdot r_i^2 = \int_m r^2 \, dm$$

Rodzaje momentów bezwładności

I_0 - biegunowy moment bezwładności (względem punktu);
I_x, I_y, I_z - moment bezwładności względem osi;
I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} - moment bezwładności względem płaszczyzny.



$$I = \int_m r^2\, dm$$

$$I_0 = \int_m \{x^2 + y^2 + z^2\}\, dm$$

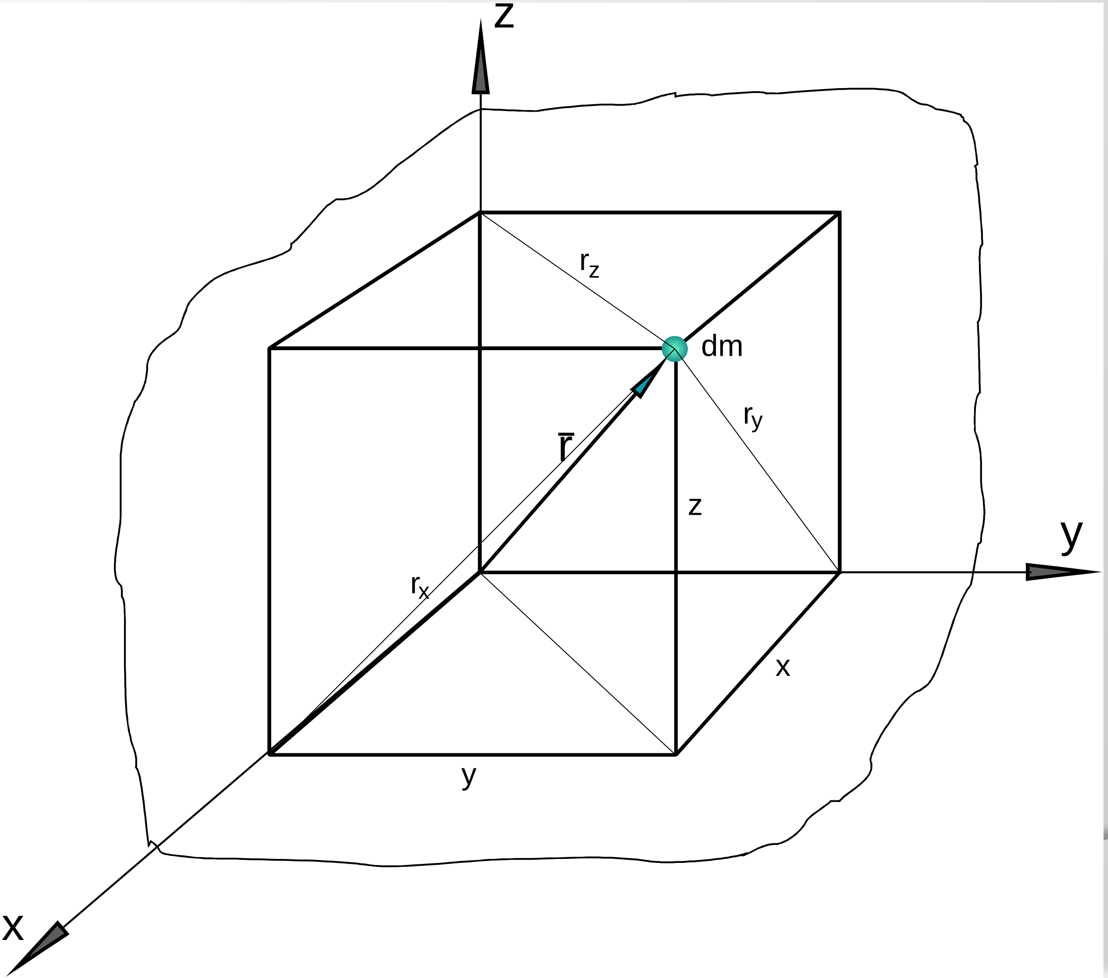
$$I_x = \int_m \{y^2 + z^2\}\, dm$$

$$I_y = \int_m \{x^2 + z^2\}\, dm$$

$$I_z = \int_m \{x^2 + y^2\}\, dm$$

Rodzaje momentów bezwładności

I_0 - biegunowy moment bezwładności (względem punktu);
I_x, I_y, I_z - moment bezwładności względem osi;
I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} - moment bezwładności względem płaszczyzny.



$$I = \int_m r^2\, dm$$

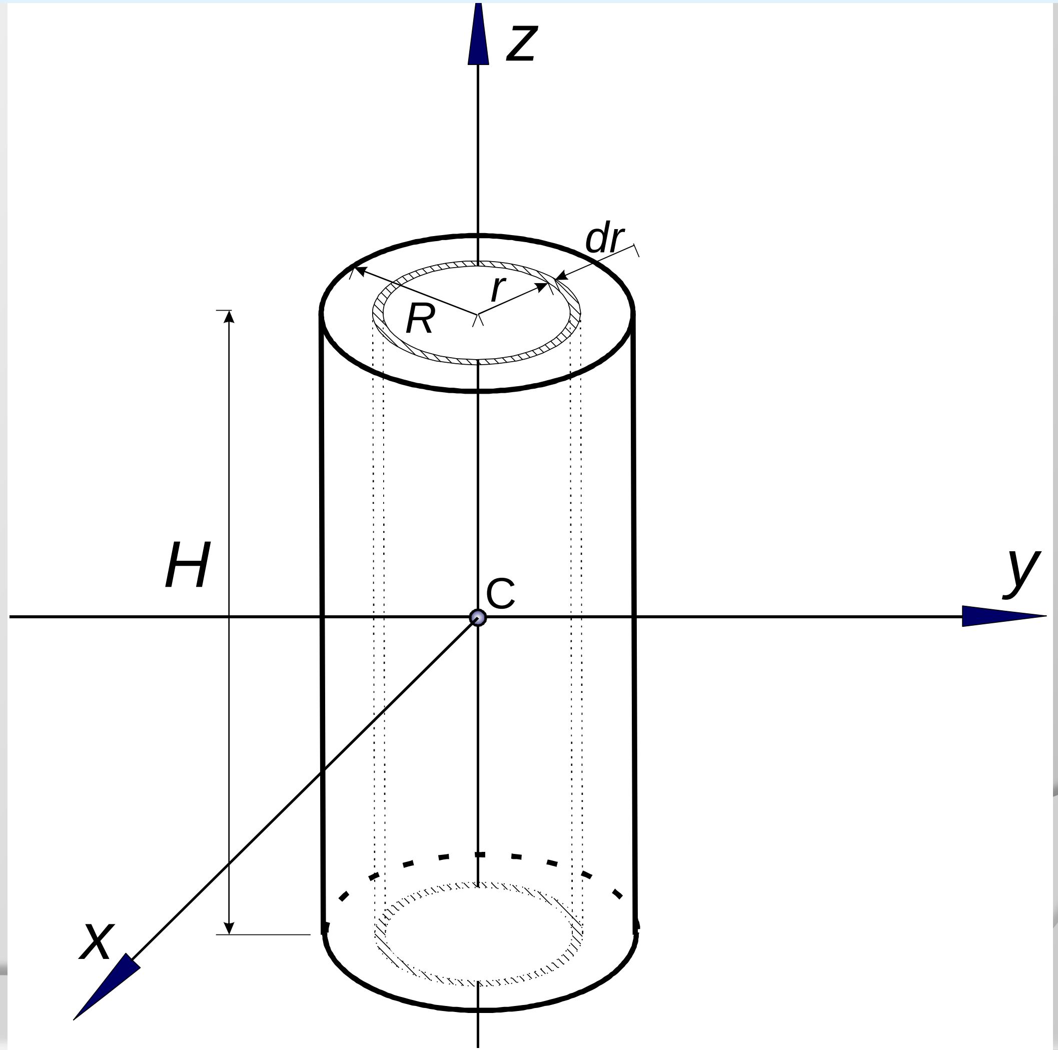
$$I_{xy} = \int_m z^2\, dm$$

$$I_{yz} = \int_m x^2\, dm$$

$$I_{zx} = \int_m y^2\, dm$$

Przykład: moment bezwładności walca

<u>Zadanie:</u> Obliczyć moment bezwładności walca o promieniu ***R*** i wysokości ***H*** oraz masie ***m*** względem osi obrotu ***Oz*** i przechodzącej przez środek ciężkości walca.



Przykład: moment bezwładności walca

$$I_z = \int_m r^2\, dm$$

$$dm = \rho \cdot H \cdot 2\pi r\, dr$$

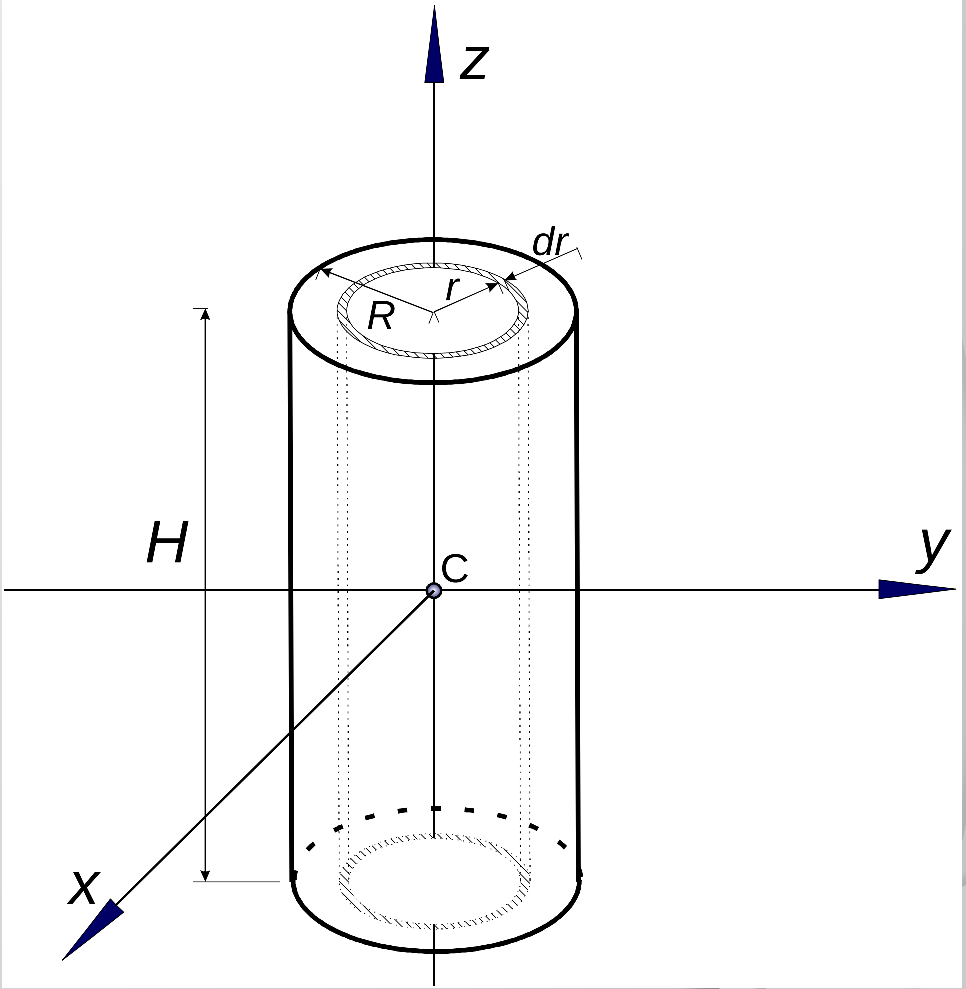
$$I_z = \int_0^R 2\pi\rho H \cdot r^3 dr$$

$$I_z = 2\pi\rho H \cdot \int_0^R r^3 dr$$

$$I_z = 2\pi\rho H \cdot \left|\frac{r^4}{4}\right|_0^R$$

$$I_z = \frac{\pi\rho H R^4}{2}$$

$$m_w = \pi R^2 \cdot H \cdot \rho$$



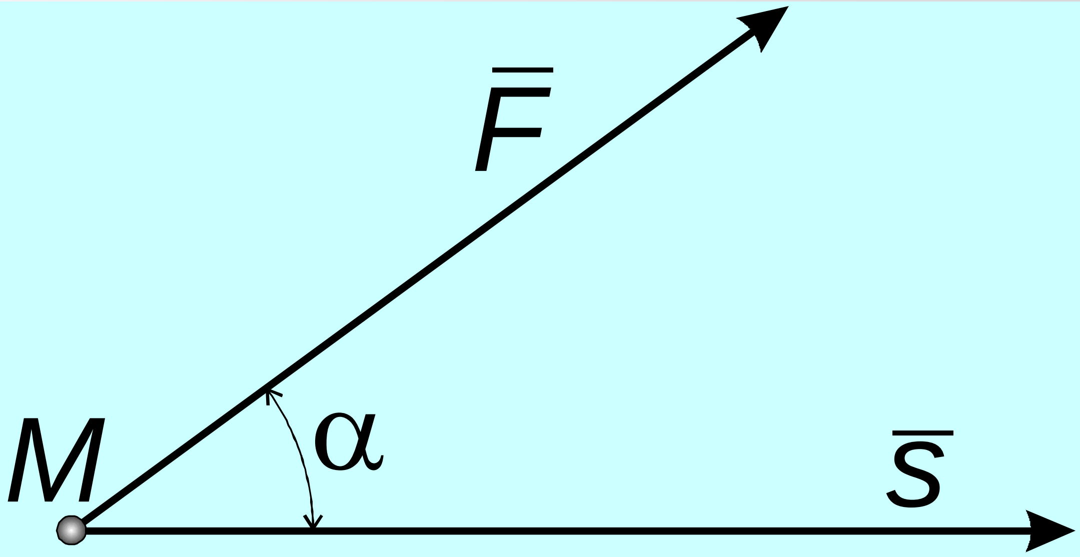
$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$

PRACA I MOC, ENERGIA I SPRAWNOŚĆ

Praca siły
na prostoliniowym przemieszczeniu

Praca jest to iloczyn skalarny wektora siły i wektora przemieszczenia

w przypadku stałej siły oraz prostoliniowego przemieszczenia:



$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$L = F \cdot s \cdot cos\alpha$$

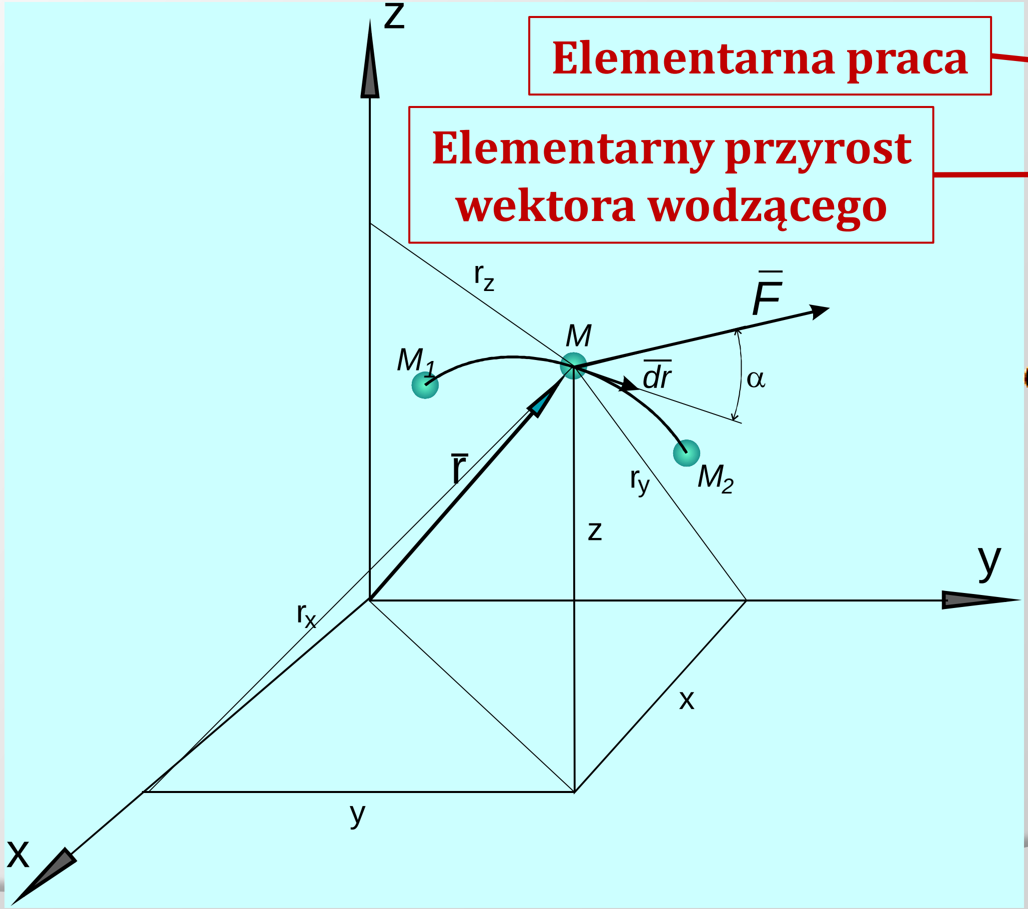
Jednostką Pracy jest dżul [J]:

$$1[J] = 1[N \cdot m] = 1\left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right]$$

Praca siły na krzywoliniowym przemieszczeniu

Praca jest to iloczyn <u>skalarny</u> wektora siły i wektora przemieszczenia $L = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Praca w przypadku krzywoliniowego przemieszczenia:



$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$d\bar{r} = dx \cdot \bar{\imath} + dy \cdot \bar{\jmath} + dz \cdot \bar{k}$$

$$\bar{F} = F_x \cdot \bar{\imath} + F_y \cdot \bar{\jmath} + F_z \cdot \bar{k}$$

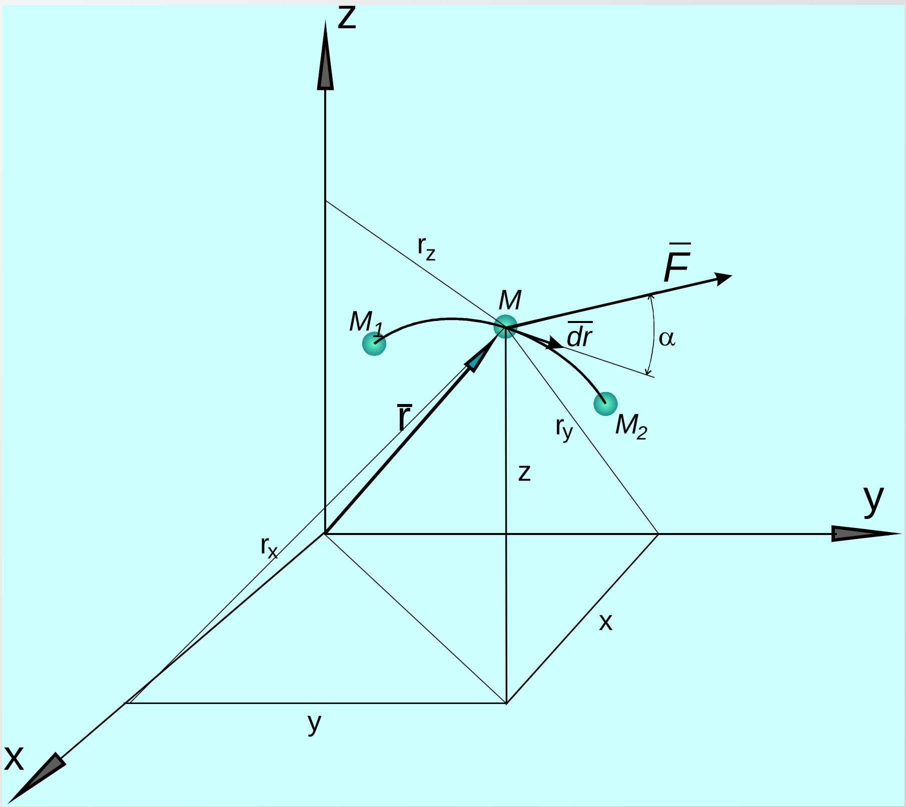
$$dL = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

$$L = \int_{M_1}^{M_2} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

$$L = \int_{M_1}^{M_2} \{F_x dx + F_y dy + F_z dz\}$$

Praca siły
na krzywoliniowym przemieszczeniu

Siła ***F*** może zależeć od czasu, położenia w przestrzeni punktu ***M*** oraz od prędkości tego punktu



$$L = \int_{M_1}^{M_2} \{F_x dx + F_y dy + F_z dz\}$$

Jeżeli dane są
równania ruchu punktu ***M*** tzn.:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)$$

$$dx = \dot{x}dt;\ dy = \dot{y}dt;\ dz = \dot{z}dt$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \{F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}\}dt$$

Praca siły ciężkości

Zadanie: wyznaczyć pracę siły ciężkości ***F=mg*** działającej na punkt materialny ***M*** przy przejściu z położenia $\{x_1, y_1, z_1\}$ do położenia końcowego $\{x_2, y_2, z_2\}$ ***(praca w polu sił potencjalnych)***

$$L = \int_{M_1}^{M_2} \{F_x dx + F_y dy + F_z dz\}$$

$$F_x = 0;\ F_y = 0;\ F_z = -mg$$

$$L = \int_{M_1}^{M_2} F_z dz$$

$$L = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mg[z_2 - z_1]$$

= Energia potencjalna

$$L = \pm mgh$$

Moc siły

Moc siły jest to pochodna pracy tej siły względem czasu.

$$\boxed{N = \frac{dL}{dt}}$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad N = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\boxed{N = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

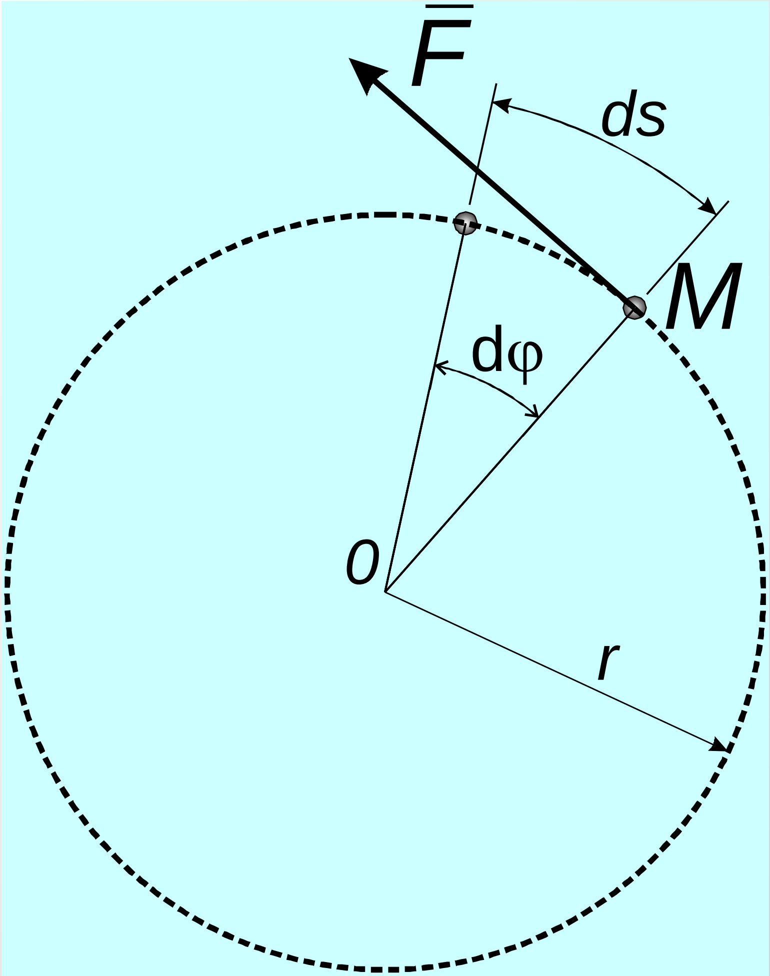
$$\bar{F} = F_x \cdot \bar{\imath} + F_y \cdot \bar{\jmath} + F_z \cdot \bar{k}$$

$$\bar{v} = v_x \cdot \bar{\imath} + v_y \cdot \bar{\jmath} + v_z \cdot \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_z \cdot \dot{z}}$$

$$\bar{v} = \dot{x} \cdot \bar{\imath} + \dot{y} \cdot \bar{\jmath} + \dot{z} \cdot \bar{k}$$

Jednostką Mocy jest wat [W]: $1[W] = 1\left[\frac{J}{s}\right] = 1\left[\frac{N \cdot m}{s}\right]$

Praca i moc momentu skręcającego



$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dL = F \cdot ds = F \cdot r \cdot d\varphi$$

$$dL = M \cdot d\varphi$$

$$L = M \cdot \varphi$$

$$N = \frac{dL}{dt}$$

$$N = M \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$N = M \cdot \omega$$

Uwaga na jednostki SI!

$$\omega \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Jednostki mocy

Jednostką Mocy jest wat [W]:

$$1[W] = 1\left[\frac{J}{s}\right] = 1\left[\frac{N \cdot m}{s}\right]$$

W praktyce używany jest kilowat [kW]:

1 [kW] = 1000 [W]

$$N = M \cdot \omega$$

$$\omega\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}; \quad n\left[{}^{obr}/_{min}\right]$$

$$M\,[Nm] = 9549\,\frac{N\,[kW]}{n\left[{}^{obr}/_{min}\right]}$$

Można spotkać jednostkę mocy = 1 [KM]:

1 [KM] = 0.7355 [kW]

Po angielsju: 1 [KM] = 1 [HP]
[BHP] – brake horse power (moc uzyskana na hamowni)

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna ciała materialnego jest to wielkość skalarna równa połowie iloczynu masy ciała i kwadratu prędkości jego środka ciężkości.

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2}$$

Energia kinetyczna ciała materialnego w ruchu obrotowym jest to wielkość skalarna równa połowie iloczynu masowego momentu bezwładności ciała i kwadratu jego prędkości kątowej.

$$E_k = {}^1\!/_2\, I\omega^2$$

Energia kinetyczna ciała materialnego w ruchu płaskim *(twierdzenie Koeniga)* jest równa sumie energii ruchu postępowego i energii ruchu obrotowego wokół środka masy.

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + {}^1\!/_2\, I\omega^2$$

Energia kinetyczna -> Praca, Moc

$$L_{1,2} = E_2 - E_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Zasada energii i pracy: przyrost energii kinetycznej równa się pracy wszystkich sił na drodze, na której ten przyrost nastąpił.

$$N = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = dE_k$$

$$\Downarrow$$

$$N = \frac{dE_k}{dt} = \dot{E}_k$$

Postać różniczkowa zasady energii: Moc równa się pochodnej energii kinetycznej względem czasu.

Zasada zachowania energii

Zasada pracy i energii kinetycznej:

$$L_{1,2} = E_k^2 - E_k^1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Zasada pracy i energii potencjalnej:

$$L_{1,2} = E_p^2 - E_p^1 = mgz_1 - mgz_2$$

$$\Downarrow$$

$$E_p + E_k = const.$$

Twierdzenie o zachowaniu energii mechanicznej: w układzie izolowanym energia mechaniczna (suma energii kinetycznej i potencjalnej) ciała materialnego jest wielkością stałą.

PĘD, POPĘD
KRĘT, POKRĘT

Pęd punktu materialnego

Pędem punktu materialnego nazywamy iloczyn masy punktu przez jego prędkość

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{F}_i = m \cdot \bar{a} = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{F}_i = \frac{d}{dt}\{\bar{Q}\}$$

Pochodna pędu jest równa sumie sił działających na dany punkt materialny

Impuls siły – popęd

$$\sum_{i=0}^{n} \overline{F_i} = \frac{d}{dt}\{\bar{Q}\} \quad \Rightarrow \quad \overline{F_w} = \frac{d}{dt}\{\bar{Q}\}$$

$$d\bar{Q} = \overline{F_w}dt$$

Elementarny impuls siły

$$\int_{Q_1}^{Q_2} d\bar{Q} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F_w}dt$$

$$\overline{Q_2} - \overline{Q_1} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F_w}dt$$

Popęd

Popęd dla bardzo krótkich chwil czasu nazywamy impulsem siły

Zasada pędu i popędu

$$\overline{Q_2} - \overline{Q_1} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F_w} dt$$

jeżeli: $\overline{F_w} = const \Rightarrow \overline{Q_2} - \overline{Q_1} = \overline{F_w} \cdot \{t_2 - t_1\}$

$$m \cdot \overline{v_2} - m \cdot \overline{v_1} = \overline{F_w} \cdot \{t_2 - t_1\}$$

Zasada pędu i popędu (twierdzenie o przyroście pędu) pozwala na powiązanie (wyznaczenie) początkowych i końcowych parametrów ruchu przy stałej sile oddziaływania; nie określimy jednak przy jej pomocy równań ruchu.

Zasada zachowania pędu

$$\overline{Q_2} - \overline{Q_1} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F_w} dt$$

jeżeli: $\overline{F_w}(t) = 0$ $\Rightarrow$ $\overline{Q_2} - \overline{Q_1} = 0$

$$\overline{Q_1} = \overline{Q_2} = const$$

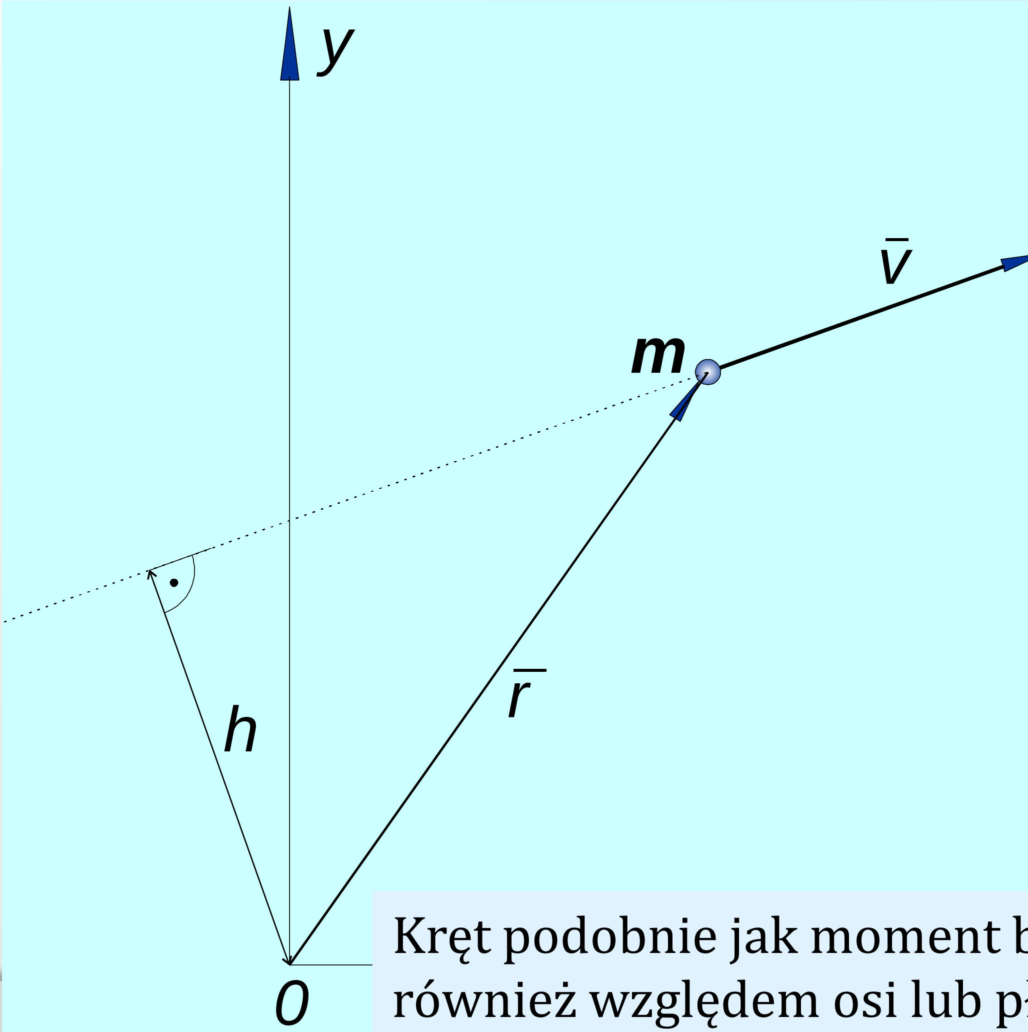
$$m \cdot \bar{v} = const$$

$$m \cdot v_x = const \quad m \cdot v_y = const \quad m \cdot v_z = const$$

Zasada zachowania pędu jest słuszna również dla układu punktów materialnych lub dla ciała sztywnego.

Kręt punktu materialnego

Krętem punktu materialnego względem punktu 0 nazywamy iloczyn wektorowy pędu tego punktu oraz wektora wodzącego tego punktu.



$$\overrightarrow{K_0} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

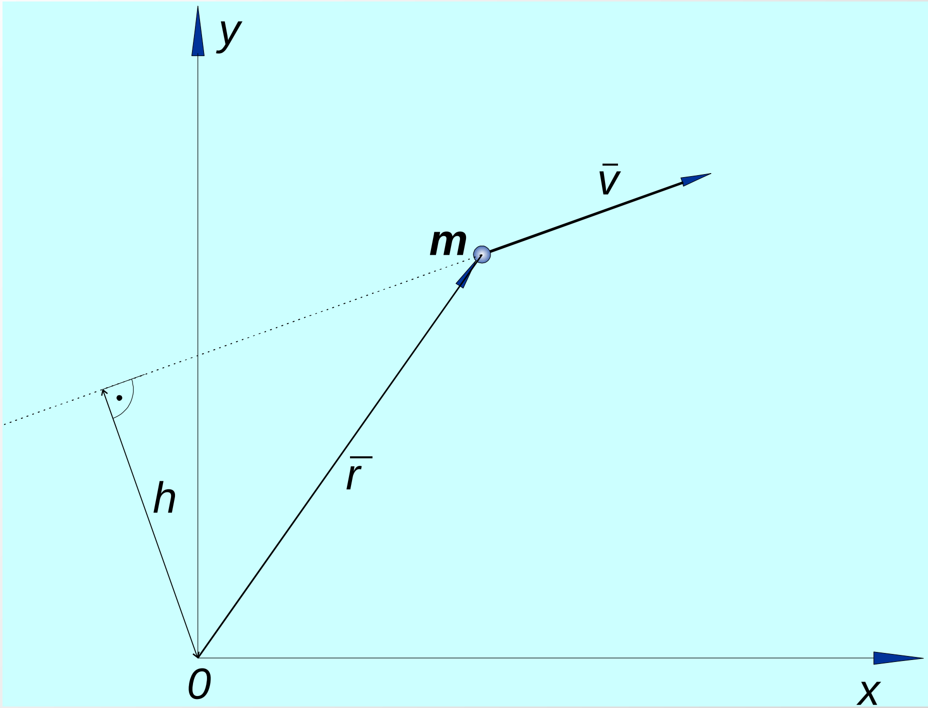
$$\overrightarrow{K_0} = \vec{r} \times \vec{Q}$$

Moduł wektora krętu:

$$K_0 = mv \cdot h$$

Kręt podobnie jak moment bezwładności może być wyznaczany również względem osi lub płaszczyzny.

II zasada dynamiki w ruchu obrotowym



$$\bar{F} = m \cdot \bar{a} = m \cdot \ddot{\bar{r}}$$

$$\overline{M_0} = \bar{F} \times \bar{r}$$

$$\bar{F} \times \bar{r} = m \cdot \ddot{\bar{r}} \times \bar{r}$$

$$\overline{M_0} = \frac{d}{dt}\{m \cdot \dot{\bar{r}}\} \times \bar{r}$$

$$m \cdot \dot{\bar{r}} = \bar{Q}$$

$$\overline{M_0} = \frac{d}{dt}\{\bar{K}\}$$

Postać różniczkowa zasady krętu: moment sił zewnętrznych działających na ciało materialne jest równy pochodnej krętu względem czasu.

Postać całkowa zasady krętu

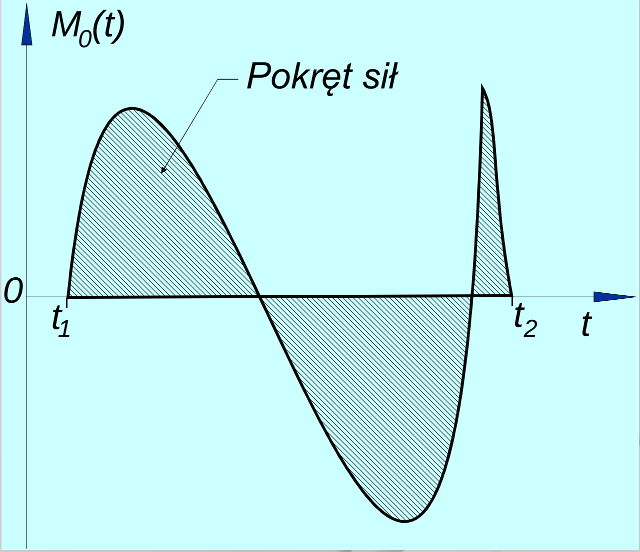
$$\overline{M_0} = \frac{d}{dt}\{\overline{K}\}$$

$$\overline{M_0}dt = d\overline{K}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{M_0}dt = \int_{K_1}^{K_2} d\overline{K}$$

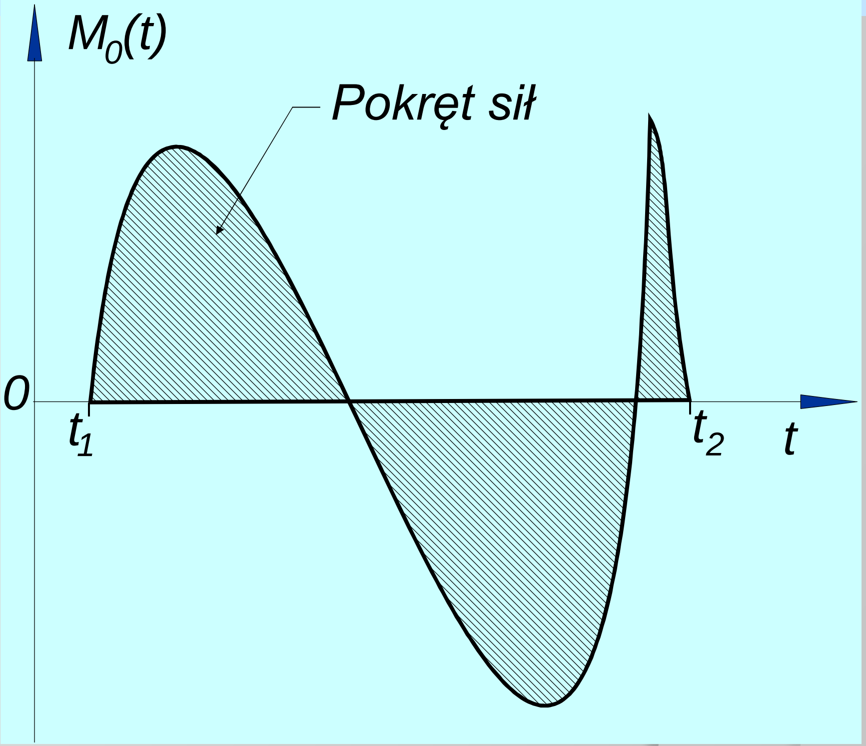
Pokręt siły działającej w czasie Δt

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{M_0}dt = \overline{K_2} - \overline{K_1}$$



Przyrost krętu punktu materialnego względem punktu ***0*** jest równy pokrętowi sił działających na ten punkt względem punktu ***0***.

Zasada zachowania krętu



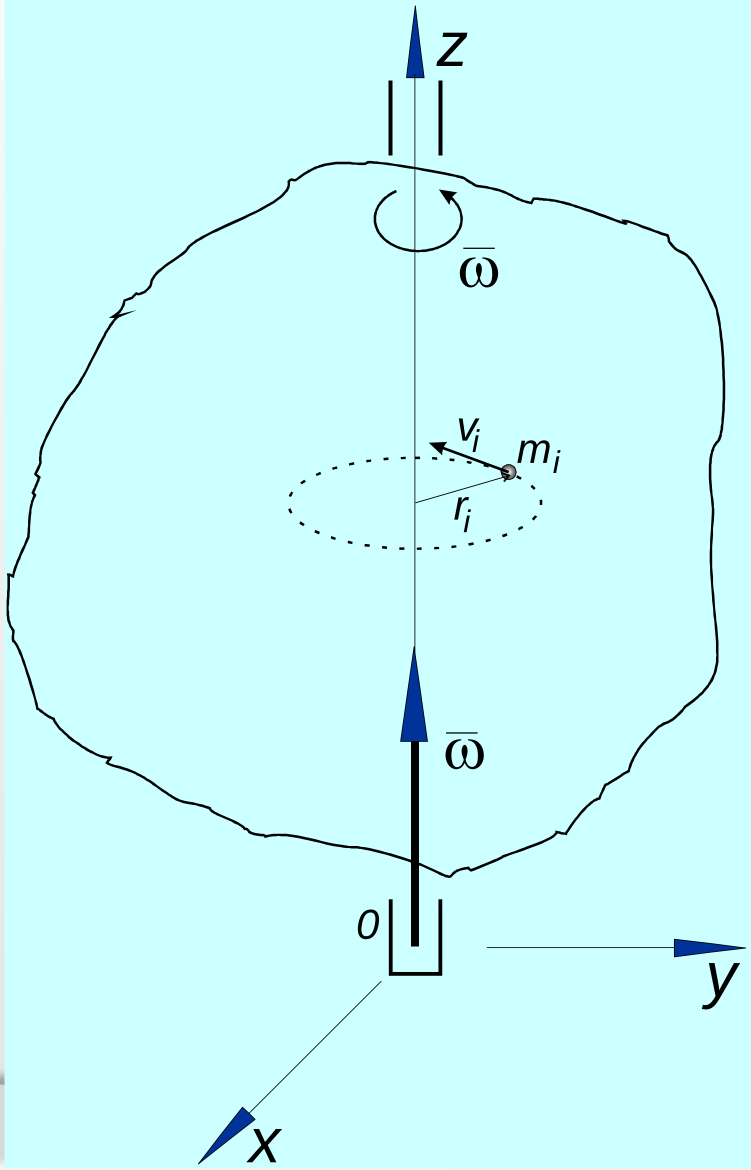
$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{M_0} dt = \overline{K_2} - \overline{K_1}$$

jeżeli: $\int_{t_1}^{t_2} \overline{M_0} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{K_1} = \overline{K_2} = \overline{K} = const.$

$$\vec{r} \times m \cdot \vec{v} = const.$$

Jeżeli pokręt sił zewnętrznych działających na punkt materialny jest równy zeru, to kręt tego punktu nie ulega zmianie.

Kręt bryły sztywnej w ruchu obrotowym wokół stałej osi



$$v_i = \omega \cdot r_i$$

pęd: $$Q_i = m_i \cdot v_i$$

kręt: $$K_{iz} = m_i v_i \cdot r_i$$

$$K_{iz} = m_i \omega r_i^2$$

$$K_z = \sum_{i=1}^{n} K_{iz} = \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$\boxed{K_z = \overline{K} = I_z \cdot \overline{\omega}}$$

Kręt bryły sztywnej względem stałej osi obrotu jest równy iloczynowi momentu bezwładności względem tej osi obrotu i prędkości kątowej ciała.

Dynamiczne równanie ruchu obrotowego

$$\overline{M_0} = \frac{d}{dt}\{\bar{K}\}$$

$$\bar{K} = I \cdot \bar{\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{M_0} = \frac{d}{dt}\{I \cdot \bar{\omega}\}$$

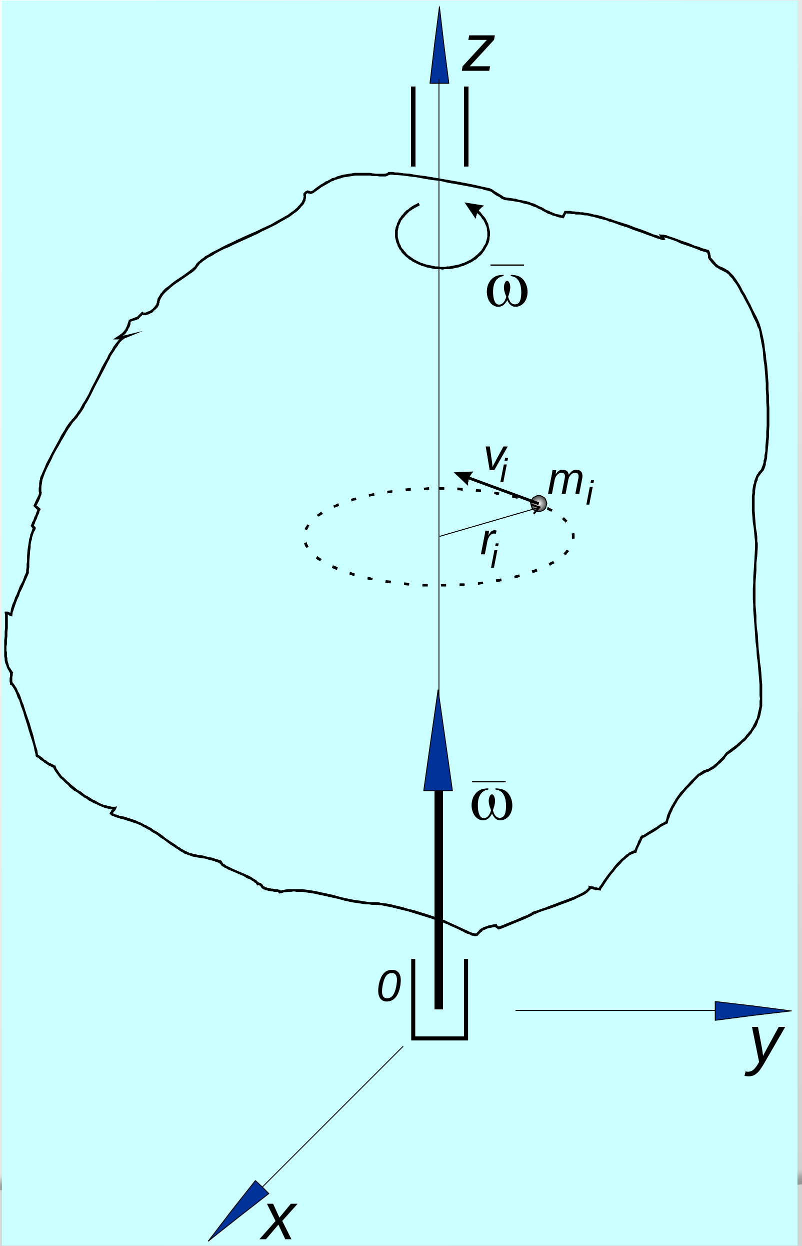
$$\overline{M_0} = I \cdot \bar{\varepsilon}$$

Moment sił zewnętrznych działający na bryłę w ruchu obrotowym, wokół stałej osi, równa się iloczynowi momentu bezwładności względem tej osi przez przyśpieszenie kątowe.

a w ruchu postępowym: $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$

WYWAŻENIE WIRNIKÓW

Równania dynamiczne ruchu obrotowego



$$K_z = \overline{K} = I_z \cdot \overline{\omega}$$

kręt: $K_{iz} = m_i v_i \cdot r_i$

$$K_{iz} = m_i \omega r_i^2$$

postać różniczkowa zasady krętu:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i,0}} = \frac{d}{dt}\{\overline{K}\}$$

dynamiczne równania ruchu obrotowego:

$$\overline{M_0} = \frac{d}{dt}\{I \cdot \overline{\omega}\}$$

$$\overline{M_0} = I \cdot \bar{\varepsilon}$$

Reakcje łożysk obracającej się bryły

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i,0}} = \frac{d}{dt}\{\bar{K}\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{F}_i = \frac{d}{dt}\{\bar{Q}\}$$

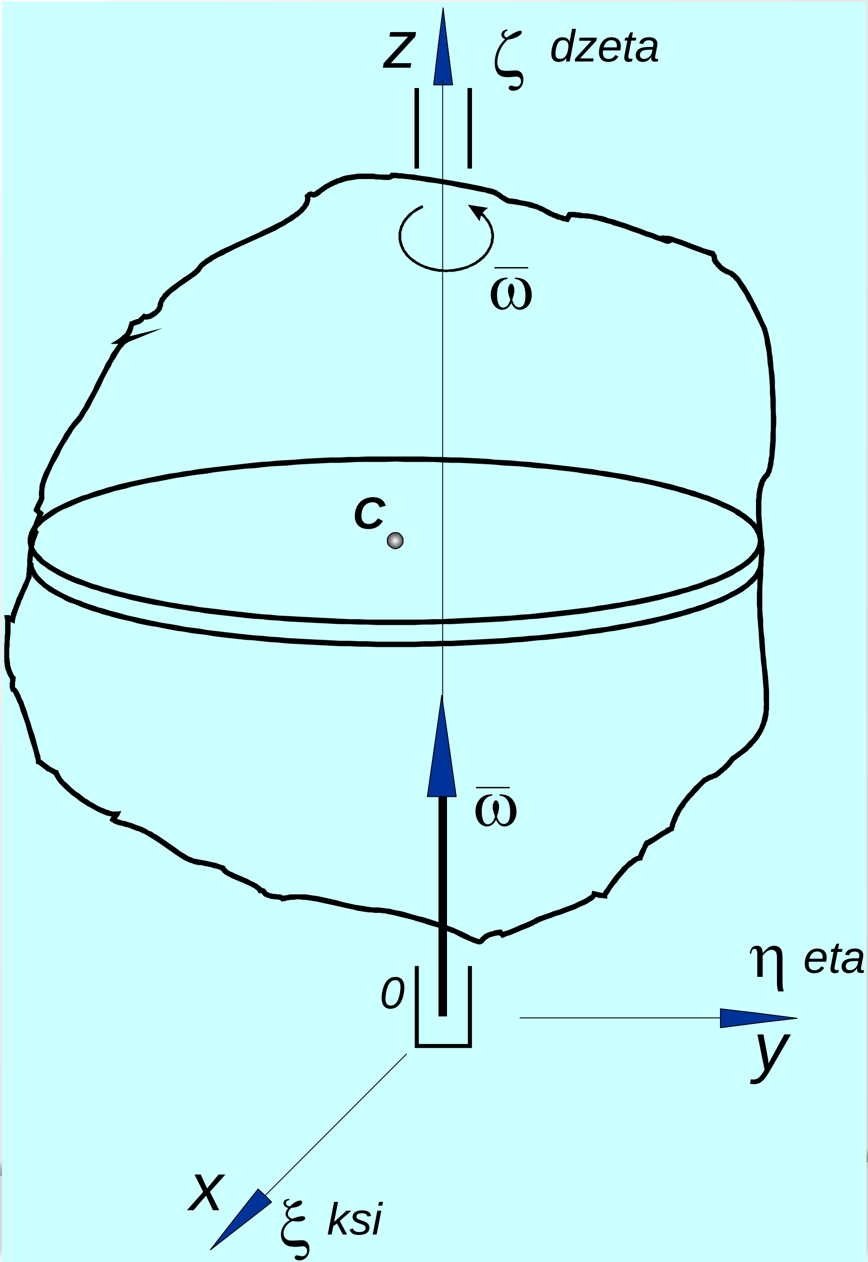
$$\overline{M_0} = \frac{d}{dt}\{I \cdot \bar{\omega}\}$$

$$\overline{F_w} = \frac{d}{dt}\{m \cdot \vec{v}\}$$

Rozpatrujemy ruch bryły względem stałej osi (ułożyskowanej) ze stałą prędkością kątową ω

- **Reakcje statyczne:** reakcje niezależne od prędkości kątowej bryły (mogą być zależne od czasu) spowodowane działaniem czynnych sił zewnętrznych np. ciężar ciała, napęd obrotowy bryły (przekładnia, pas napędowy)
- **Reakcje dynamiczne:** reakcje zależne od prędkości kątowej bryły związane z niewyrównoważeniami bryły a nie spowodowane działaniem czynnych sił zewnętrznych.

Reakcje od niewyrównoważenia statycznego

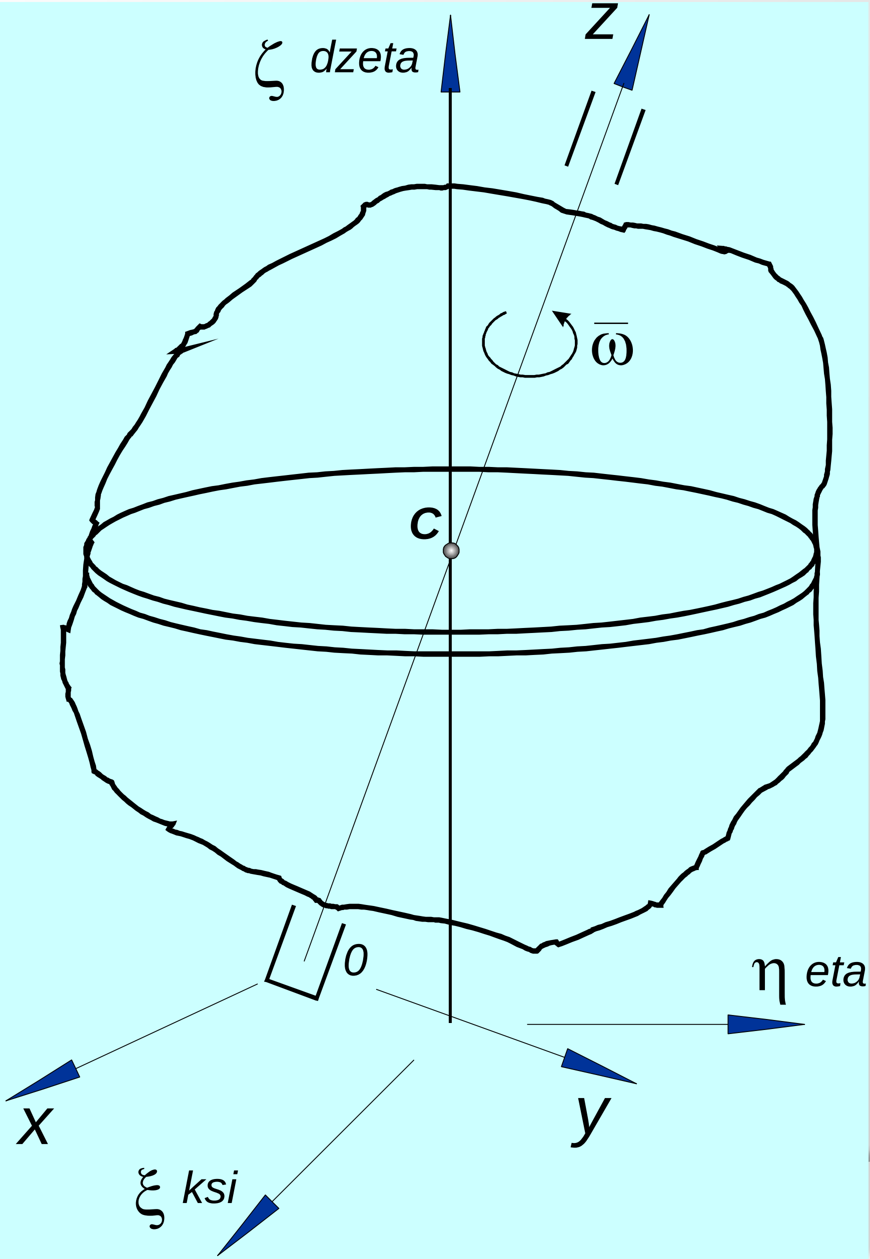


$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i,0}} = \frac{d}{dt}\{\bar{K}\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{F_i} = \frac{d}{dt}\{\bar{Q}\}$$

Reakcje niewyrównoważenia statycznego występują gdy środek masy ciała nie leży na osi obrotu ale oś obrotu jest jedną z osi głównych ciała; wektor pędu jest stały ale obraca się razem z bryłą a wektor krętu jest stały i leży na osi obrotu.

Reakcje od niewyrównoważenia dynamicznego

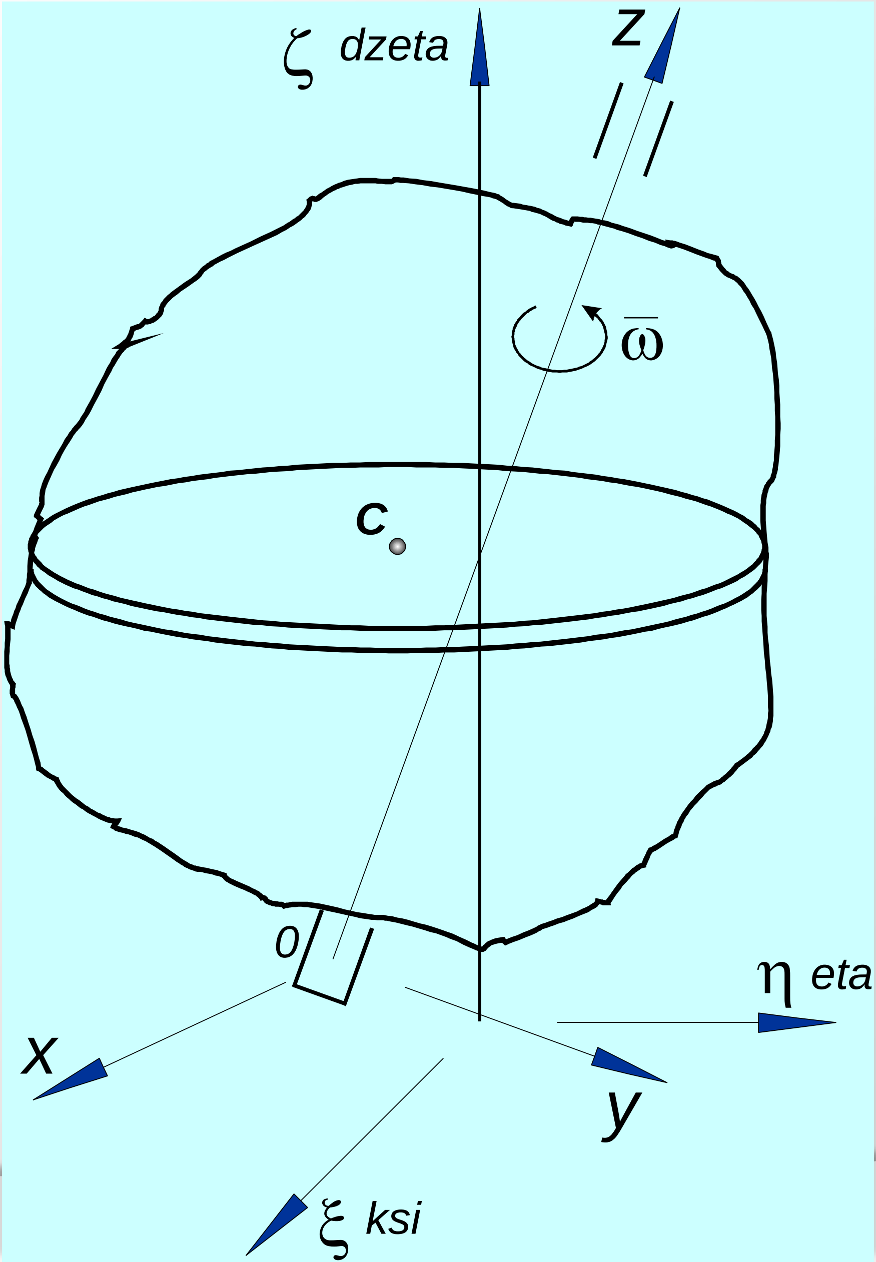


$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i,0}} = \frac{d}{dt}\{\bar{K}\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{F}_i = \frac{d}{dt}\{\bar{Q}\}$$

Reakcje niewyrównoważenia dynamicznego występują gdy środek masy ciała leży na osi obrotu ale oś obrotu nie pokrywa się z żadną osi głównych ciała; wektor pędu jest równy zeru a wektor krętu porusza się po pobocznicy stożka.

Reakcje od niewyrównoważenia statyczno - dynamicznego

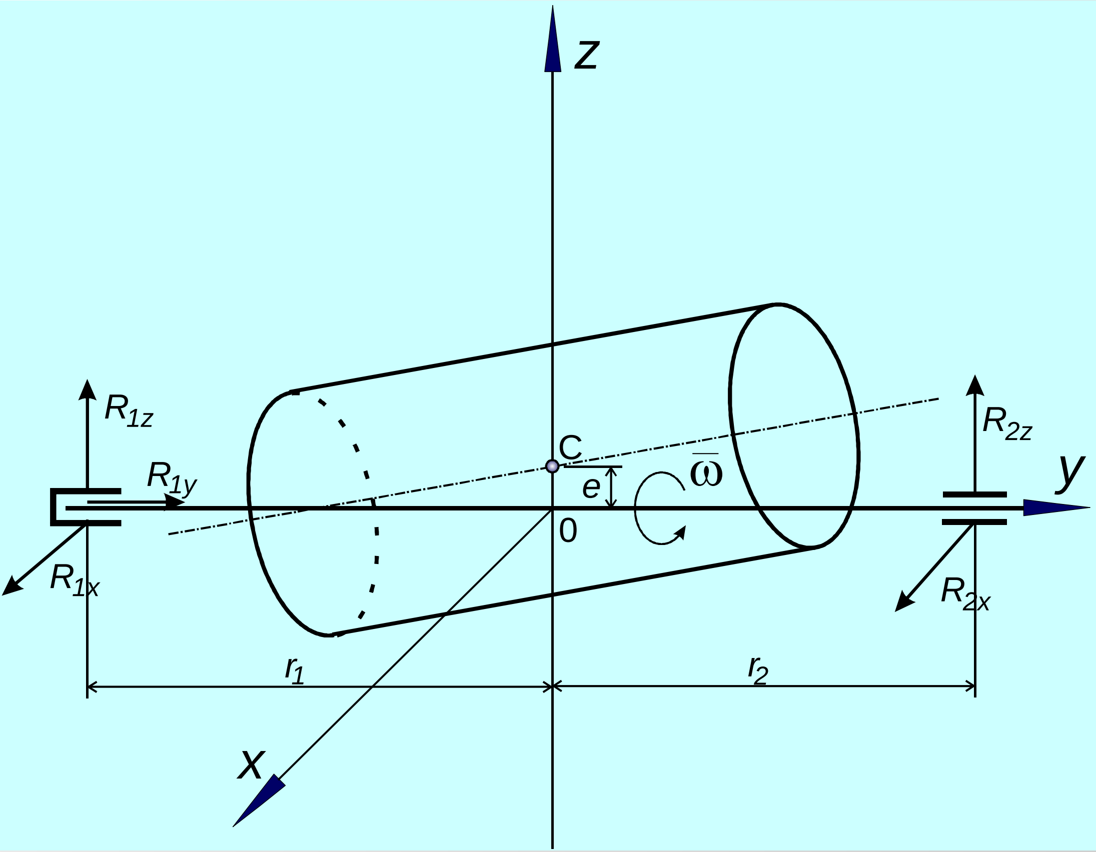


$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{i,0}} = \frac{d}{dt}\{\bar{K}\}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \bar{F_i} = \frac{d}{dt}\{\bar{Q}\}$$

Reakcje niewyrównoważenia statyczno - dynamicznego występują gdy środek masy ciała nie leży na osi obrotu oraz oś obrotu nie pokrywa się z żadną osi głównych ciała; wektor pędu jest stały ale obraca się razem z bryłą a wektor krętu porusza się po pobocznicy stożka.

Wyznaczanie reakcji
1. -> postać różniczkowa zasady pędu



$$\sum_{i=0}^{n} \bar{F}_i = \frac{d}{dt}\{\bar{Q}\}$$

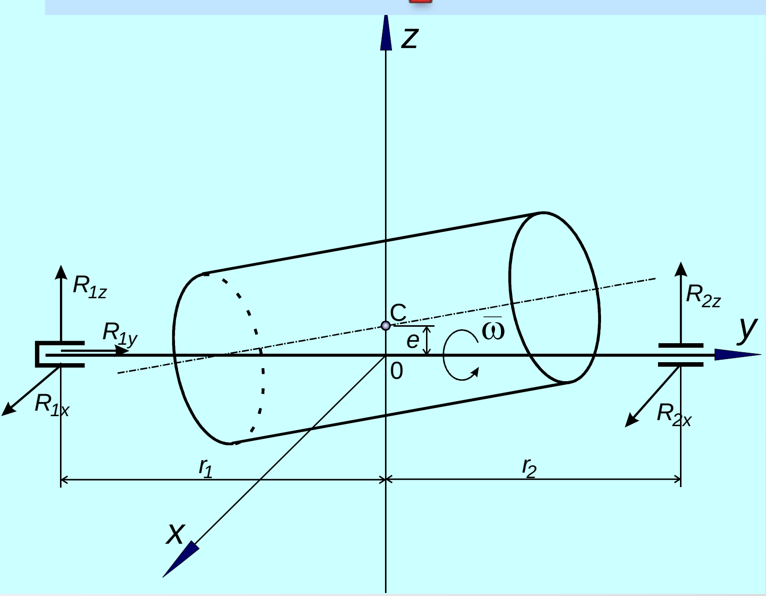
$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{d(m\bar{v}_c)}{dt} = \frac{d(m\bar{\omega} \cdot \bar{r}_c)}{dt}$$

$$\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c = \bar{\omega} \cdot e$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = m\omega^2 e$$

$$m\omega^2 e = R_1 + R_2$$

Wyznaczanie reakcji
2. -> postać różniczkowa zasady krętu



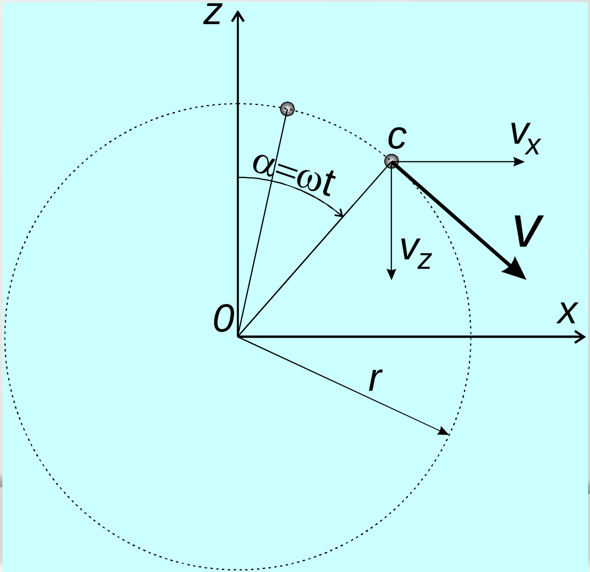
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M_{\iota,0}} = \frac{d}{dt}\{\overline{K}\} \Rightarrow \frac{dK_{x,z}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_{i_{x,z}}$$

ponieważ: $v_y = 0 \rightarrow K_y = 0$

$$\frac{dK_x}{dt} = \frac{d(mv_x z)}{dt} = \frac{d(m\omega z \cdot z)}{dt}$$

ponieważ: $v_x = \omega \cdot z$

$$z = r \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos(\omega t)$$

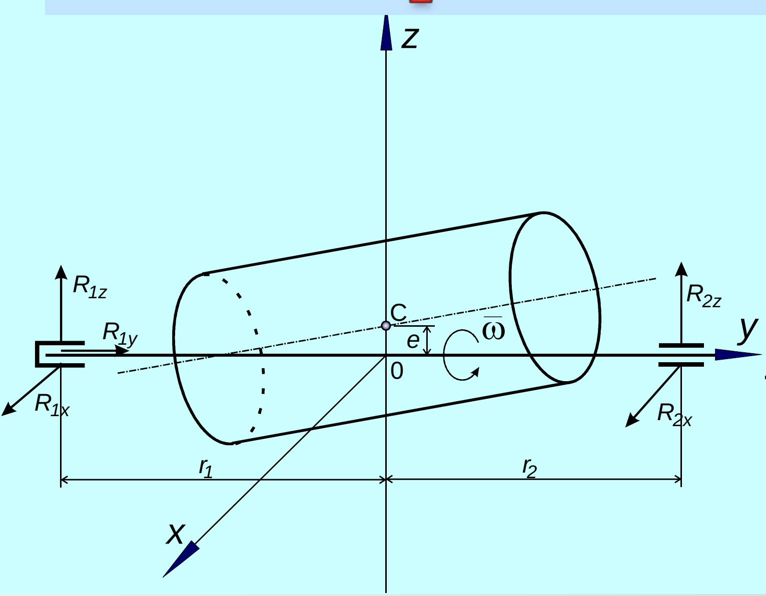


$$\frac{dz^2}{dt} = \frac{d}{dt}[r^2 cos^2(\omega t)] = -r^2\omega \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\frac{dK_x}{dt} = -m\omega^2 r^2 \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\frac{dK_x}{dt} = -I_0\omega^2 \cdot \sin(2\omega t)$$

Wyznaczanie reakcji
2. -> postać różniczkowa zasady krętu



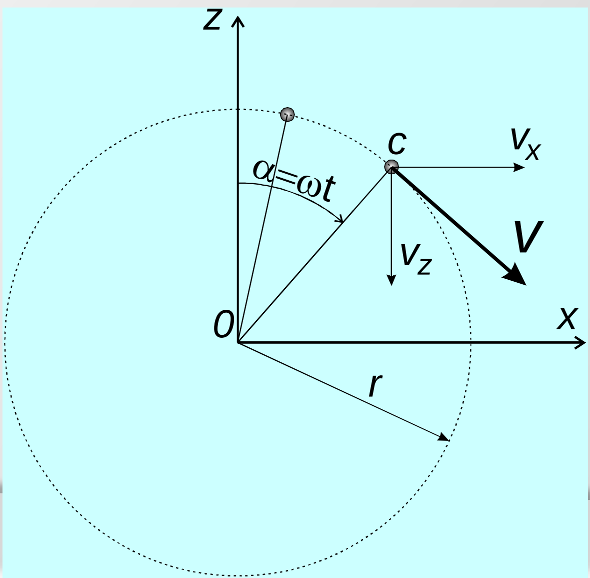
$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d(mv_z x)}{dt} = \frac{d(m\omega x \cdot x)}{dt}$$

$$x = r \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin(\omega t)$$

$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{d}{dt}[r^2 sin^2(\omega t)] = r^2\omega \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = m\omega^2 r^2 \cdot \sin(2\omega t)$$

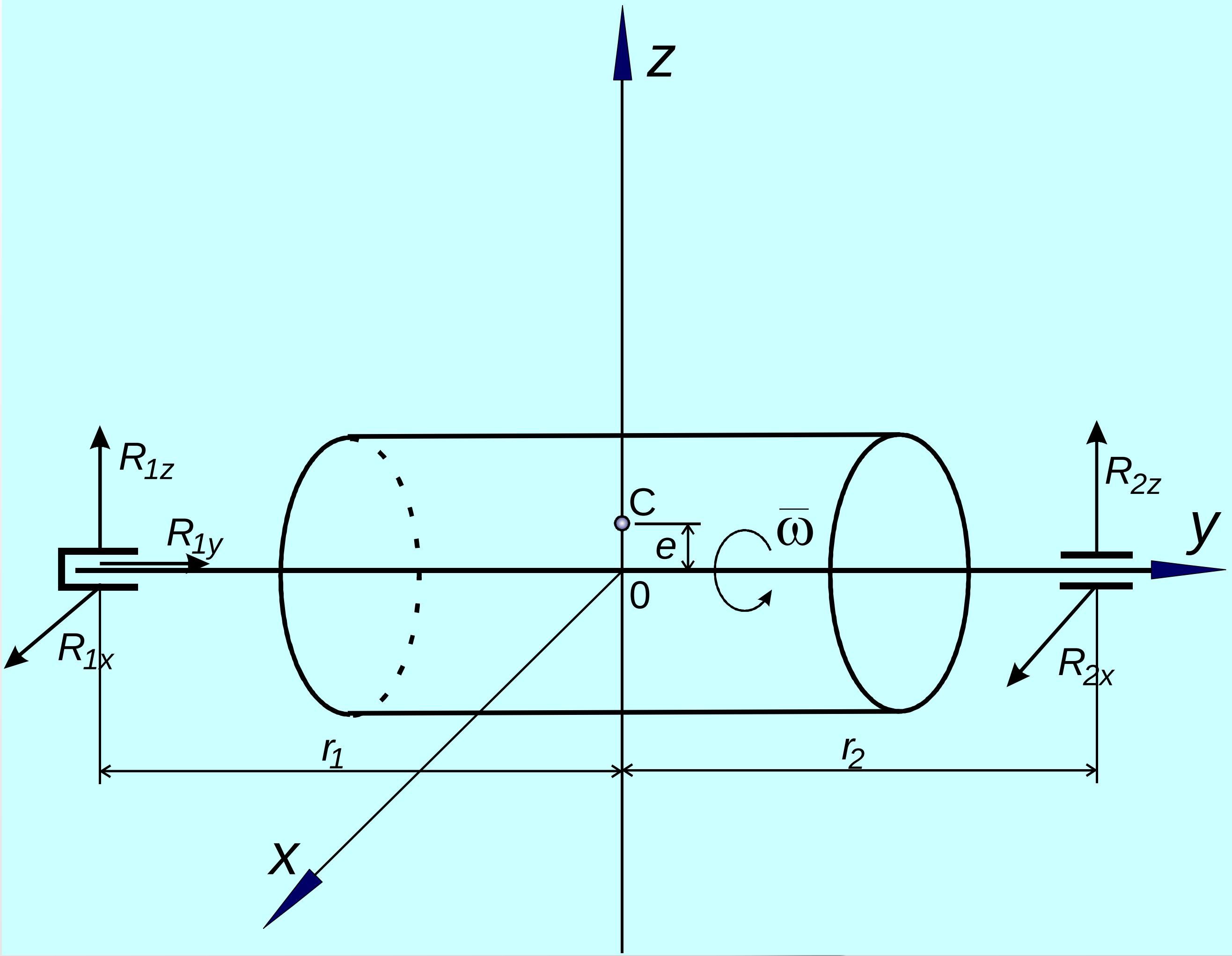
$$\frac{dK_z}{dt} = I_0\omega^2 \cdot \sin(2\omega t)$$



$$-I_0\omega^2 \cdot \sin(2\omega t) = R_{1z} \cdot r_1 - R_{2z} \cdot r_2$$

$$I_0\omega^2 \cdot \sin(2\omega t) = R_{1x} \cdot r_1 - R_{2x} \cdot r_2$$

Wyznaczanie reakcji
niewyrównoważenie statyczne



z zasady pędu:

$$m\omega^2 e = R_1 + R_2$$

z zasady krętu:

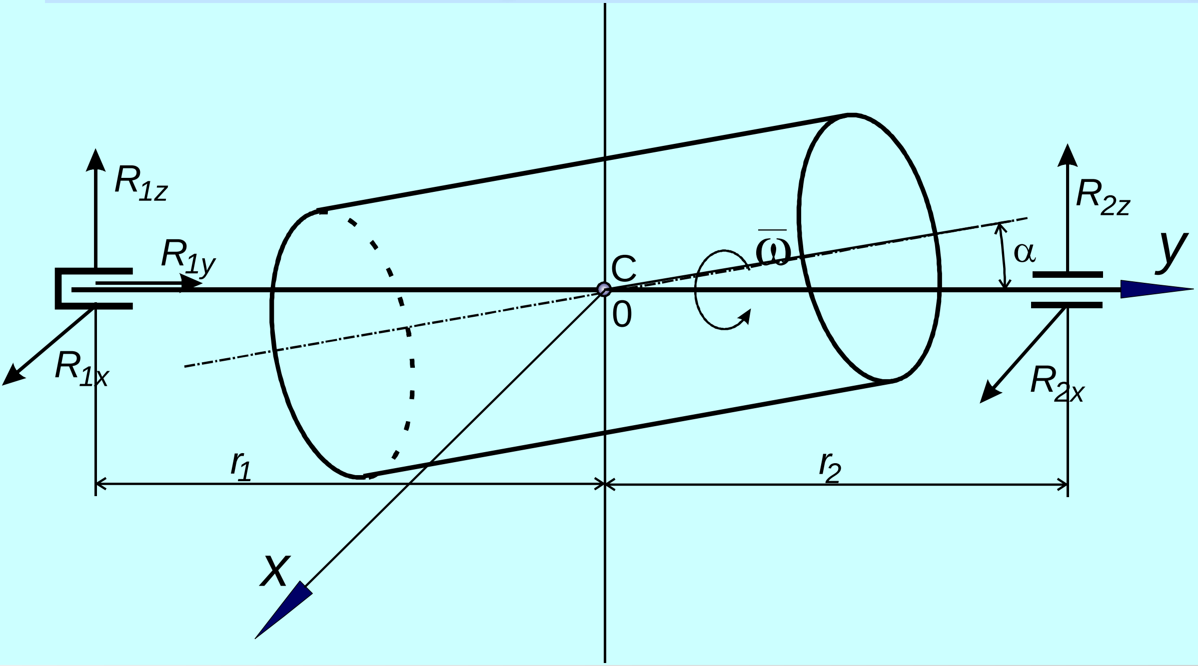
$$R_1 \cdot r_1 + R_2 \cdot r_2 = 0$$

bo kręt jest stały

$$R_1 = me\omega^2 \frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

$$R_2 = me\omega^2 \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

Wyznaczanie reakcji niewyrównoważenie dynamiczne



z zasady pędu:

$$\boxed{R_1 + R_2 = 0}$$

bo pęd jest zerowy

z zasady krętu:

$$-I_0\omega^2 \cdot \sin(2\alpha) = R_{1x} \cdot r_1 + R_{1x} \cdot r_2$$

$$I_0\omega^2 \cdot \sin(2\alpha) = R_{1z} \cdot r_1 + R_{1z} \cdot r_2$$

$$R_1 = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1z}^2}$$

$$R_1 = -R_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{I_0\omega^2 \cdot \sin(2\alpha)}{r_1 + r_2}$$

Dziękuję za uwagę!