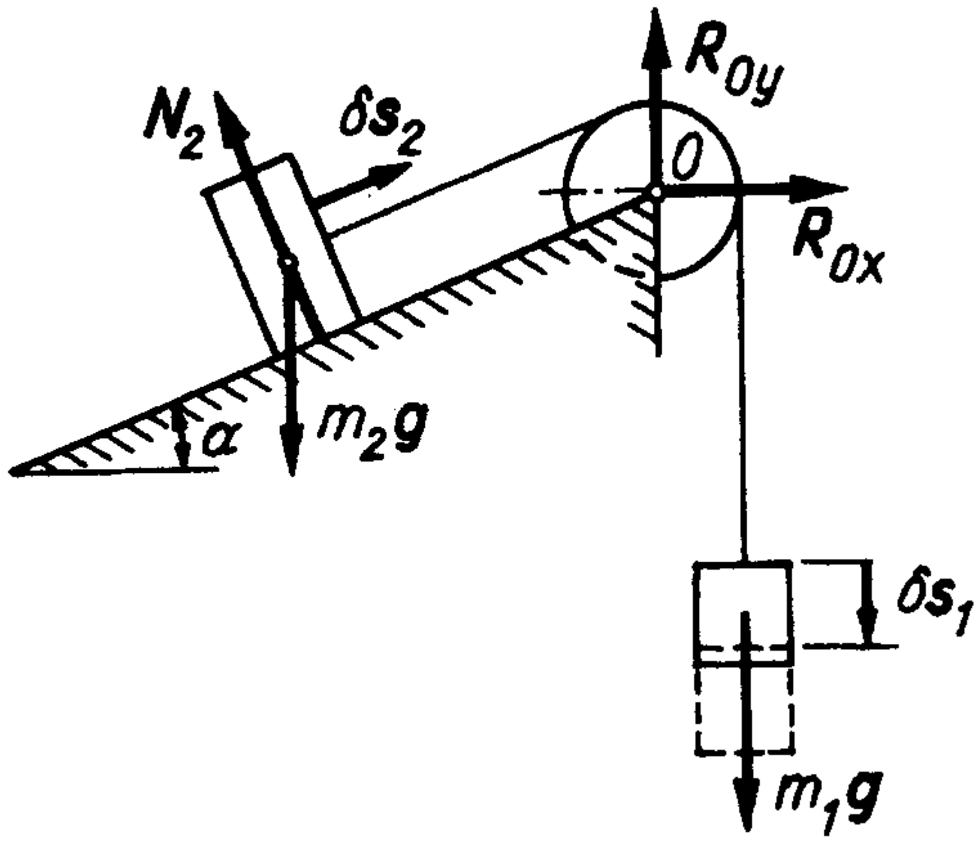
Przykład 5.

Na gładkiej równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem α, leży ciało materialne o masie m_2. Do ciała jest przymocowana nierozciągliwa nić, przerzucona przez krążek O, na drugim końcu której zawieszono ciało o masie m_1. Pomijając tarcie i masę nici ustalić warunek, który muszą spełniać masy ciał, aby zachodziła równowaga.



Rozwiązanie

Udziela się przemieszczenia przygotowanego, skierowanego pionowo w dół dla ciała o masie m_1. W wyniku tego ciało o masie m_2 przesuwa się w górę o δs_2. Na podstawie równania o sumie prac przygotowanych znajdujemy:

$$m_1 \cdot g \cdot \delta s_1 - m_2 \cdot g \cdot \delta s_2 \cdot \sin\alpha = 0$$

Biorąc pod uwagę to, że $\delta s_2 = \delta s_1$, równanie powyższe przyjmuje postać:

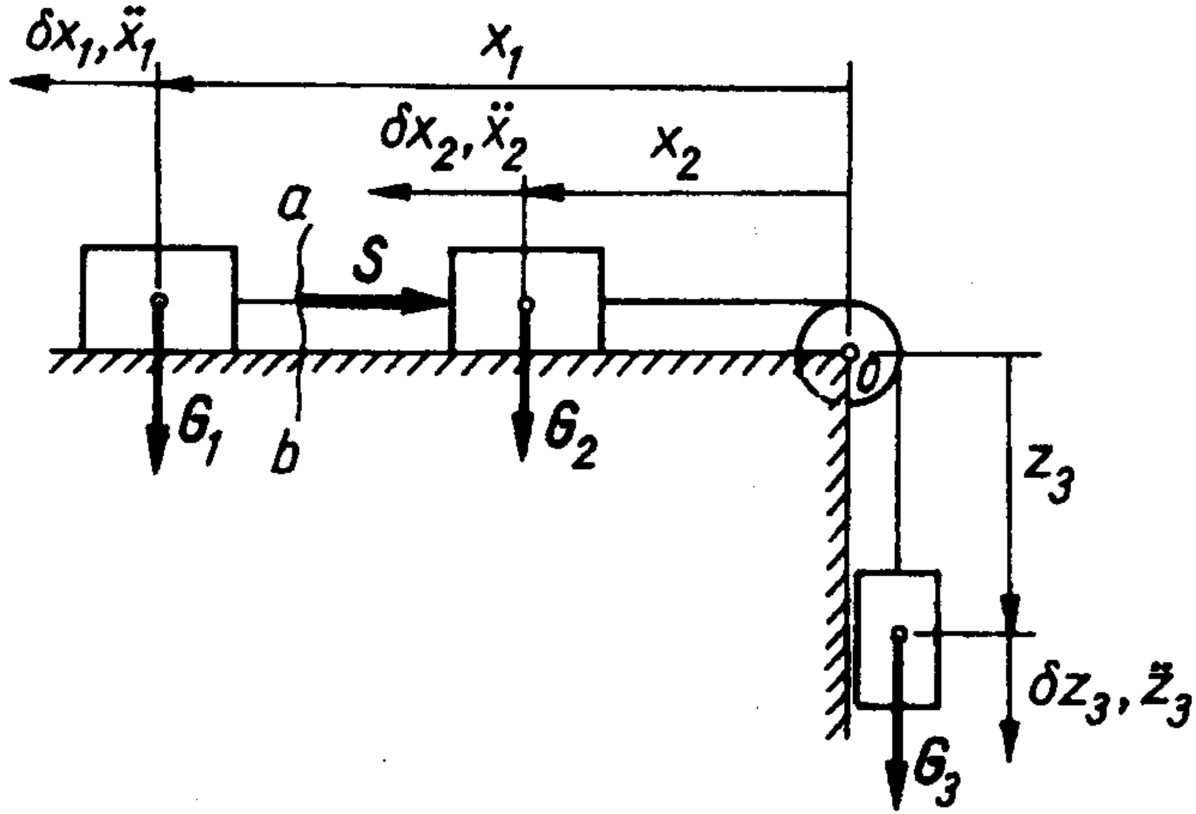
$$\left(m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \cdot \sin\alpha\right)\delta s_1 = 0$$

Ponieważ $\delta s_1 \neq 0$ z założenia, wiec:

$$\left(m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \cdot \sin\alpha\right) = 0; \qquad m_1 = m_2 \sin\alpha$$

Przykład 6.

Trzy ciała, każde o ciężarze G, połączone są nieważką nierozciągliwą linką przerzuconą przez nieruchomy krążek A. Dwa ciała leżą na płaskiej płaszczyźnie poziomej, a trzecie wisi swobodnie. Obliczyć przyspieszenie ciał i siłę w przekroju *ab* linki.



Rozwiązanie

Ogólne równanie dynamiki ma postać:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(F_{ix}-m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i+\left(F_{iy}-m_i\ddot{y}_i\right)\delta y_i+\left(F_{iz}-m_i\ddot{z}_i\right)\delta z_i\right]=0$$

Dla przyspieszeń i przemieszczeń przygotowanych zawsze przyjmuje się zwrot zgodny z dodatnim zwrotem odpowiedniej osi. Położenie ciał określono za pomocą trzech współrzędnych, odmierzanych od nieruchomego punktu O. W tym przypadku równanie zapisuje się w postaci:

$$-\frac{G_1}{g}\cdot\ddot{x}_1\cdot\delta x_1-\frac{G_2}{g}\cdot\ddot{x}_2\cdot\delta x_2+\left(G_3-\frac{G_3}{g}\cdot\ddot{z}_3\right)\delta z_3=0$$

Związki między przyspieszeniami i przemieszczeniami przygotowanymi wynikają z następujących równań więzów:

$$x_1-x_2=\text{const},\qquad \ddot{x}_1=\ddot{x}_2,\qquad \delta x_1=\delta x_2$$

$$x_2+z_3=\text{const},\qquad \ddot{x}_2=-\ddot{z}_3,\qquad \delta x_2=-\delta z_3$$

Podstawiając związki między przemieszczeniami i przyspieszeniami do równania drugiego i przyjmując, że $G_1 = G_2 = G_3 = G$ otrzymuje się:

$$-\frac{G}{g}\cdot\ddot{z}_3\cdot\delta z_3-\frac{G}{g}\cdot\ddot{z}_3\cdot\delta z_3+\left(G-\frac{G}{g}\cdot\ddot{z}_3\right)\delta z_3=0$$

$$\left(G-3G\frac{\ddot{z}_3}{g}\right)\delta z_3=0$$

a stąd

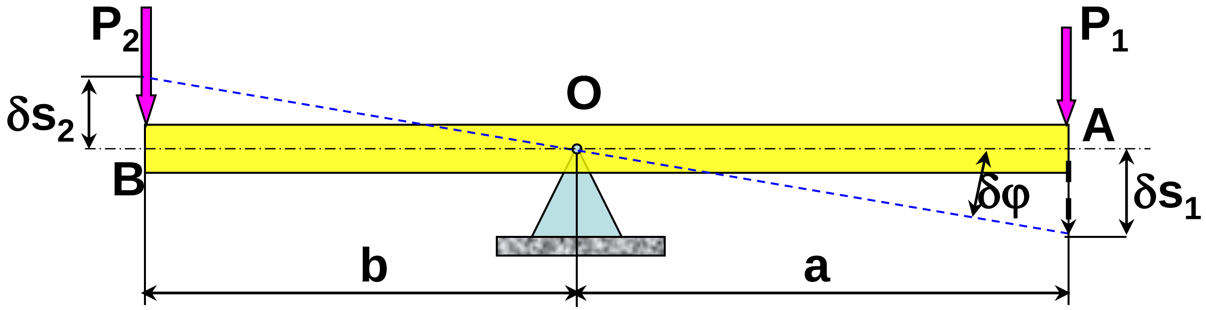
$$\left(G-3G\frac{\ddot{z}_3}{g}\right)=0;\qquad \ddot{z}_3=\frac{1}{3}g$$

Aby wyznaczyć siłę S w lince łączącej ciała G_1 i G_2 myślowo przecina się linkę przekrojem *ab* i uwzględniając fakt, że przyspieszenie $\ddot{x}_1$ = – 1/3 g, ogólne równanie dynamiki dla ciała G_1 ma postać:

$$\left(-S-\frac{G}{g}\ddot{x}_1\right)\delta x_1=0;\qquad S=\frac{1}{3}G$$

Przykład 7.

Na rysunku przedstawiona jest lekka dźwignia dwuramienna *AB,* która może obracać się bez tarcia wokół punktu *O* i do której końców przyłożono siły P_1 i P_2 prostopadle do ramion dźwigni. Jaki warunek muszą spełniać te siły aby zachodziła równowaga.



Rozwiązanie

W celu ustalenia warunku udzielimy dźwigni przemieszczenia przygotowanego, którym w danym przypadku jest elementarny obrót wokół punktu *O* o kąt $\delta\varphi$. Ponieważ mamy do czynienia z więzami bez tarcia, przeto należy przyrównać tu do zera tylko sumę prac przygotowanych sił czynnych, tj. sił P_1 i P_2. Używając oznaczeń jak na rysunku, mamy:

$$\boxed{P_1 \cdot \delta s_1 - P_2 \cdot \delta s_2 = 0}$$

Przesunięcia przygotowane δs_1 i δs_2 punktów przyłożenia sił P_1 i P_2 wyrazić możemy w zależności od kąta obrotu $\delta\varphi$

$$\delta s_1 = a \cdot \delta\varphi; \qquad \delta s_2 = b \cdot \delta\varphi;$$

Po podstawieniu do równania pierwszego otrzymujemy

$$\left(P_1 \cdot a - P_2 \cdot b\right)\delta\varphi = 0$$

Powyższe równanie musi być spełnione przy dowolnym przemieszczeniu przygotowanym, czyli dla dowolnego $\delta\varphi \neq 0$. Jest to możliwe tylko wówczas, gdy

$$P_1 \cdot a - P_2 \cdot b = 0$$

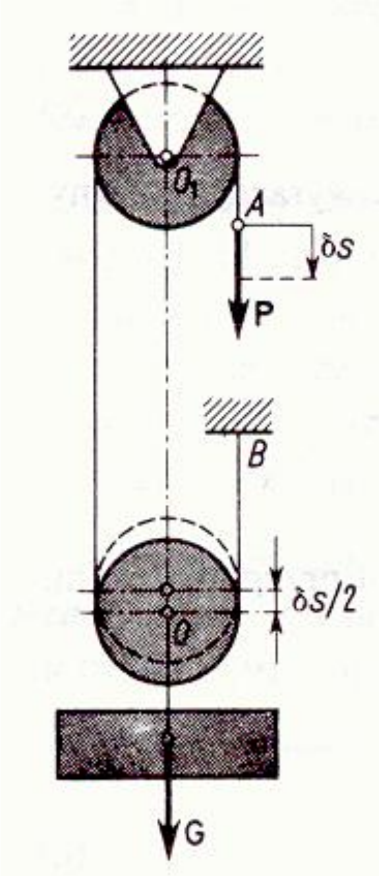
czyli gdy

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{b}{a}$$

Tak więc wartości sił przyłożonych do końców dźwigni muszą być odwrotnie proporcjonalne do długości ramion dźwigni. Do tego samego wyniku dochodzimy również stosując znaną ze statyki metodę, a mianowicie układając równanie momentów względem punktu *O*.

Przykład 8.

Na rysunku przedstawiono układ dwóch krążków, z których jeden jest ruchomy, a drugi stały. Krążki opasane są liną *AB,* której koniec *B* jest unieruchomiony. Na krążku ruchomym zawieszono ciało o ciężarze *G,* a do końca *A* liny przyłożono pionową siłę P, która utrzymuje cały układ w równowadze.
Masę liny i masę krążka ruchomego oraz tarcie na osi obrotu krążka stałego pomijamy. Jaką wartość musi przyjąć siła P aby zaistniał stan równowagi?



Rozwiązanie

Jak wynika z rysunku, w przypadku gdy udzielimy końcowi *A* liny skierowanego pionowo w dół przesunięcia przygotowanego o wartości δs, środek *O* krążka ruchomego przesuwa się pionowo w górę ½δs. Równanie wynikające z zasady prac przygotowanych ma tu więc następującą postać:

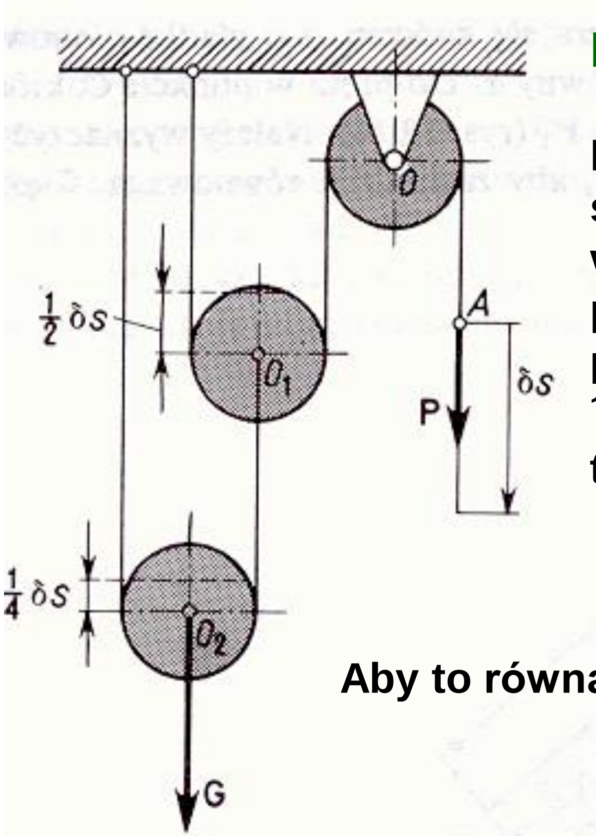
$$P \cdot \delta s - G \cdot \frac{1}{2}\delta s = \left(P - \frac{1}{2}G\right)\delta s = 0$$

czyli

$$P = \frac{1}{2}G$$

Przykład 9.

Na rysunku przedstawiono schemat wielokrążka służącego do podnoszenia ciężarów. Wyznaczyć zależność, którą muszą spełniać wartości sił P i G w przypadku równowagi. Ciężary krążków i liny pominąć.



Rozwiązanie

Końcowi *A* liny, do którego przyłożona jest siła P, udzielamy skierowanego pionowo w dół przesunięcia przygotowanego o wartości δs. Środek O_1 pierwszego krążka ruchomego przesunie się wówczas o ½δs do góry, co spowoduje z kolei przesunięcie się do góry środka drugiego krążka ruchomego o ¼δs. Równanie wynikające z zasady prac przygotowanych ma tu więc następującą postać:

$$P \cdot \delta s - G \cdot \frac{1}{4}\delta s = \left(P - \frac{1}{4}G\right)\delta s = 0$$

Aby to równanie było spełnione dla dowolnego δs różnego od zera, musi być

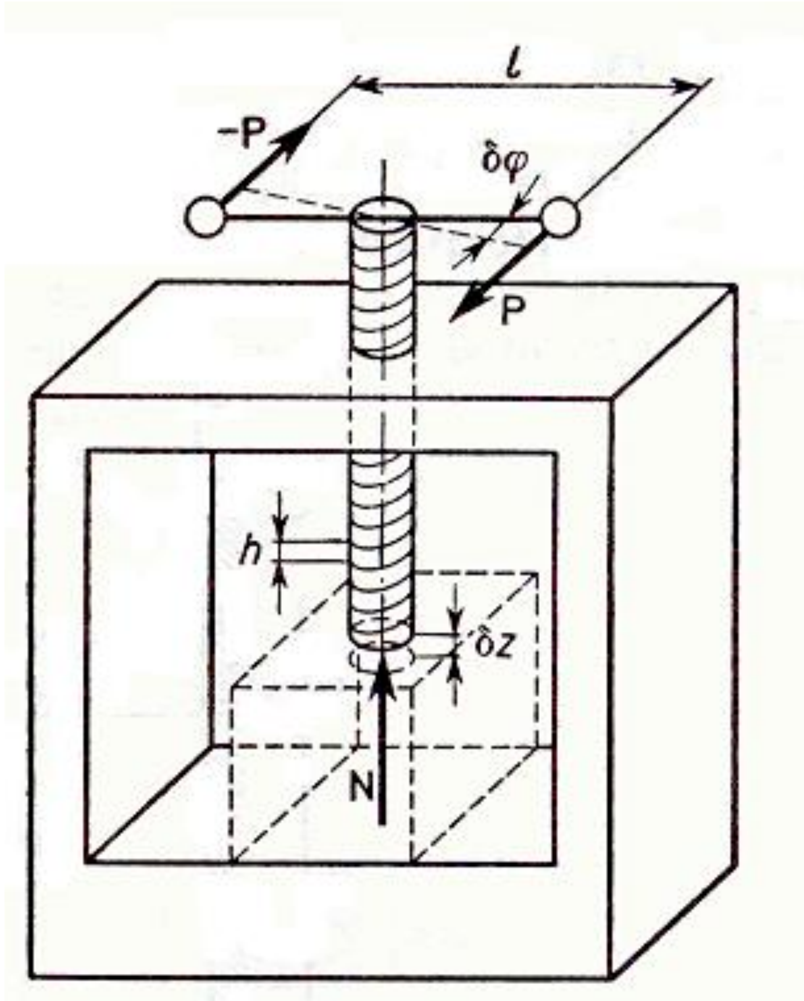
$$P = \frac{1}{4}G = \frac{G}{2^2}$$

W skład rozważanego wielokrążka wchodziły dwa krążki ruchome. Otrzymany wynik można łatwo uogólnić na przypadek układu, w którym jest *n* takich krążków. Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymujemy :

$$P = \frac{G}{2^n}$$

Przykład 10.

Na rysunku przedstawiono schemat prasy śrubowej. Należy wyznaczyć siłę, którą wywiera prasa na ściskane ciało, w przypadku gdy do ramienia prasy przyłożone są w sposób podany na rysunku dwie siły P i - P tworzące parę. Długość ramienia prasy równa jest *l*, a skok śruby wynosi *h.* Tarcie na gwincie śruby pominąć.



Rozwiązanie

Aby wyznaczyć wartość siły, którą ściskane jest prasowane ciało, usuwamy myślowo to ciało spod śruby, przykładając jednocześnie odpowiednią siłę reakcji N, równą co do wartości i przeciwną co do kierunku sile, z którą śruba działa na wspomniane ciało. Z uwagi na to, że pomijamy tarcie, mamy tu do czynienia z układem o więzach idealnych i wobec tego należy przyrównać do zera sumę prac przygotowanych sił P, -P i N.

Nadając pomyślany elementarny obrót ramieniu prasy o kąt $\delta\varphi$, powodujemy jednoczesne osiowe przesunięcie śruby oznaczone na rysunku przez δz. Biorąc pod uwagę, że moment pary sił P i -P ma wartości równe Pl, znajdujemy, że praca przygotowana tej pary wynosi Pl $\delta\varphi$. Praca sił N jest ujemna i równa się –Nδz. Równanie wynikające z zasady prac przygotowanych ma tu postać:

$$\boxed{Pl \cdot \delta\varphi - N \cdot \delta z = 0}$$

Łatwo wyznaczyć zależność między $\delta\varphi$ i δz. Przy pełnym obrocie ramienia prasy, czyli przy obrocie o kat równy 2π śruba doznaje przesunięcia w kierunku osiowym równego skokowi gwintu h. Możemy ułożyć następującą proporcję:

$$\boxed{\frac{\delta z}{\delta\varphi} = \frac{h}{2\pi} \quad \text{stąt} \quad \delta z = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi}$$

Po podstawieniu do równania pierwszego otrzymujemy:

$$\left(Pl - N\frac{h}{2\pi}\right)\cdot \delta\varphi = 0$$

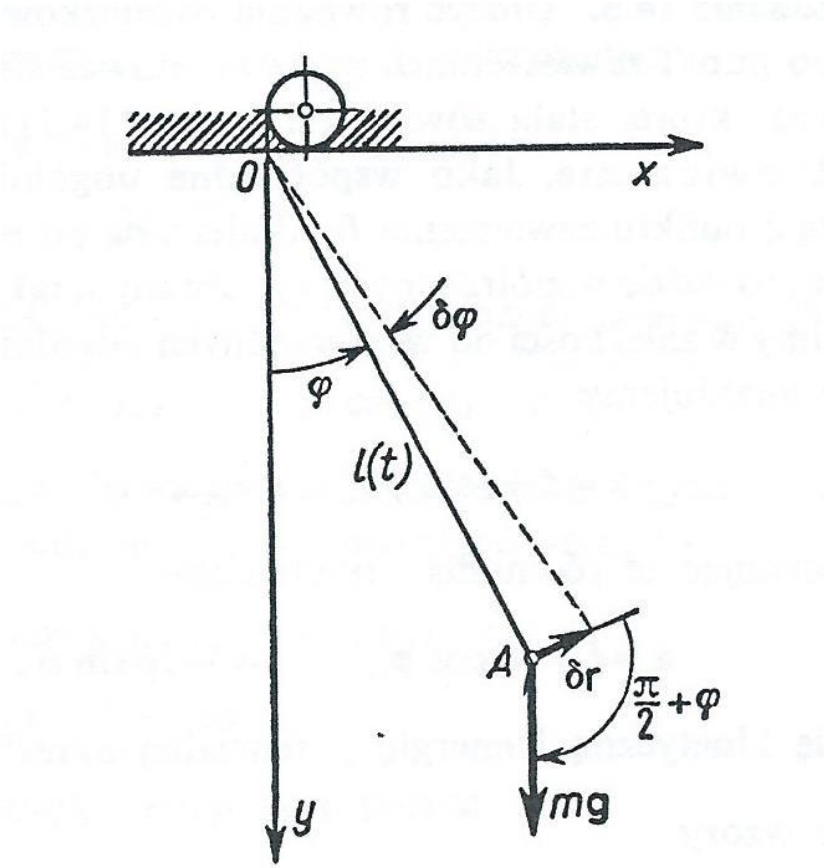
Aby powyższe równanie było spełnione przy dowolnym $\delta\varphi \neq 0$, musi być:

$$Pl - N\frac{h}{2\pi} = 0 \qquad \text{czyli} \qquad N = 2\pi\frac{l}{h}P$$

Z uwagi na to, że stosunek długości ramienia prasy do skoku gwintu śruby jest bardzo duży, nacisk N jak wynika z powyższego wzoru, jest wielokrotnie większy od wartości sił przyłożonych do ramienia prasy.

Przykład 11

Ułożyć równania różniczkowe wahadła matematycznego o zmiennej długości, przy czym długość wahadła jest określona daną funkcją L=L(t). Znaleźć rozwiązanie dla L=const. oraz dla L=t+3 (L [m], t[s]).



Rozwiązanie

W rozpatrywanym przykładzie mamy do czynienia z punktem materialnym poddanym więzom idealnym holonomicznym i reonomicznym. Kąt wychylenia wahadła może być przyjęty jako współrzędna uogólniona. Prędkość punktu materialnego można rozłożyć na składową styczną i promieniową.

Równanie Lagrange'a ma postać:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

$$v_R = \frac{dL(t)}{dt}$$

$$v_T = \dot{\varphi} \cdot L(t)$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_R^2 + V_T^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dL(t)}{dt} \right)^2 + (\dot{\varphi} \cdot L(t))^2 \right]$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dL(t)}{dt} \right)^2 + (\dot{\varphi} \cdot L(t))^2 \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot \dot{\varphi} \cdot L^2(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$Q_\varphi = -mg \cdot L(t) \cdot sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt} (m \cdot \dot{\varphi} \cdot L^2(t)) = -mg \cdot L(t) \cdot sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} \cdot L^2(t) + 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot L(t) \frac{dL(t)}{dt} + g \cdot L(t) \cdot sin\varphi \\ = 0$$

$$\ddot{\varphi} \cdot L^2(t) + 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot L(t) \frac{dL(t)}{dt} + g \cdot L(t) \cdot sin\varphi = 0$$

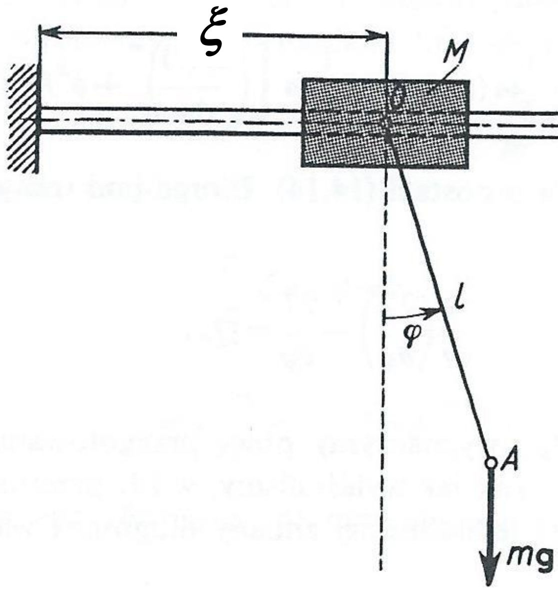
$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{L(t)} \cdot \frac{dL(t)}{dt} \dot{\varphi} + \frac{g}{L(t)} sin\varphi = 0$$

$$gdy\, L = const. \rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{L} sin\varphi = 0$$

$$gdy\, L = t + 3 \ \rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{2}{t+3} \cdot \dot{\varphi} + \frac{g}{t+3} sin\varphi = 0$$

Przykład 12

Ułożyć równania różniczkowe wahadła matematycznego umieszczonego na suwaku jak na rysunku. Suwak o masie *M* może się ślizgać bez tarcia po poziomej prowadnicy (o nieskończonej długości). Wahadło ma masę *m* i długość *L*.



Rozwiązanie

W rozpatrywanym przykładzie mamy do czynienia z punktem materialnym poddanym więzom idealnym holonomicznym i reonomicznym. Kąt wychylenia wahadła może być przyjęty jako pierwsza współrzędna uogólniona. Drugą współrzędną uogólnioną jest położenie suwaka.

Równanie Lagrange'a ma postać:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

$$x = \xi + l \cdot sin\varphi \qquad y = l \cdot cos\varphi$$

$$\dot{x} = \dot{\xi} + l\dot{\varphi} \cdot cos\varphi \qquad \dot{y} = -l\dot{\varphi} \cdot sin\varphi$$

Rozwiązanie

W rozpatrywanym przykładzie mamy do czynienia z punktem materialnym poddanym więzom idealnym holonomicznym i reonomicznym. Kąt wychylenia wahadła może być przyjęty jako pierwsza współrzędna uogólniona. Drugą współrzędną uogólnioną jest położenie suwaka.

Równanie Lagrange'a ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

$$x = \xi + l \cdot sin\varphi \qquad y = l \cdot cos\varphi$$

$$\dot{x} = \dot{\xi} + l\dot{\varphi} \cdot cos\varphi \qquad \dot{y} = -l\dot{\varphi} \cdot sin\varphi$$

$$x = \xi + l \cdot sin\varphi \qquad y = l \cdot cos\varphi$$

$$\dot{x} = \dot{\xi} + l\dot{\varphi} \cdot cos\varphi \qquad \dot{y} = -l\dot{\varphi} \cdot sin\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 \qquad T = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{\xi}cos\varphi\right) + \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2$$

$$Q_\varphi = -mg \cdot l \cdot sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}m\left(2l^2\dot{\varphi} + 2l\dot{\xi}cos\varphi\right) \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}m\left(-2l\dot{\varphi}^2\dot{\xi}sin\varphi\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{1}{2}m\left(2\dot{\xi} + 2l\dot{\varphi}cos\varphi\right) + M\dot{\xi} \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{\xi}cos\varphi + glsin\varphi = 0$$

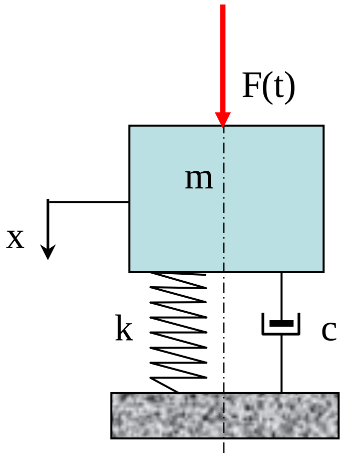
$$(M + m)\ddot{\xi} + ml\ddot{\varphi}cos\varphi = 0$$

Przykład 13

Sformułować równanie ruchu drgań wymuszonych o jednym stopniu swobody z uwzględnieniem sił dyssypacyjnych z zastosowaniem równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

Rozwiązanie

Do tego zadania wykorzystuje się model drgań wymuszonych z tłumieniem.



Równanie Lagrange'a dla tego modelu będzie miało postać

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \qquad \text{a)}$$

gdzie

$$Q_x = Q_x^P + Q_x^* + Q_x(t) \qquad \text{b)}$$

$Q_x^P = -\frac{\partial U}{\partial x}$ **- siła uogólniona od sił potencjalnych**

$Q_x^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}}$ **- uogólniona siła dyssypacyjna (R – funkcja dyssypacyjna Rayleigha)**

$Q_x(t) = \frac{\delta A}{\delta x}$ **- uogólniona siła wymuszająca**

Wielkości T, U, R, i δA wyrażają się wzorami:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad U = \frac{kx^2}{2}, \quad R = \frac{c\dot{x}^2}{2}, \quad \delta A = \mathbf{F}(t)\cdot\delta\mathbf{x} = F(t)\delta x \qquad \text{c)}$$

Wykonując na funkcjach (c) powyższe operacje różniczkowania, otrzymuje się:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d(m\dot{x})}{dt} = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad Q_x^P = -kx, \quad Q_x^* = -c\dot{x}, \quad Q_x(t) = F(t) \qquad \text{d)}$$

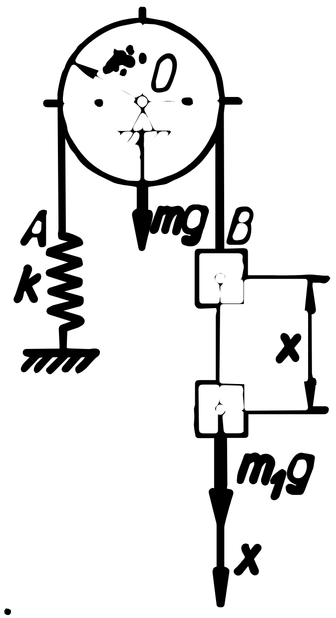
Wstawiając wzór (d) do (a), z wykorzystaniem wzoru (b), otrzymuje się następujące równanie drgań wymuszonych tłumionych:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = F(t) \qquad \text{e)}$$

Równanie (e) jest identyczne z równaniem różniczkowym drgań wymuszonych tłumionych otrzymanym innym sposobem.

Przykład 14

Jednorodny krążek o masie m i promieniu r może obracać się bez tarcia wokół poziomej osi O. Przez krążek jest przerzucona nierozciągliwa nić, do końców której zaczepiono ciężar o masie m_1 i sprężynę o sztywności k. Określić drgania ciężaru jeżeli nadano masie w położeniu spoczynku prędkość początkową v_o skierowaną w dół. Masę sprężyny i nici pominąć.



Rozwiązanie

Układ ma jeden stopień swobody. Współrzędną uogólnioną będzie przemieszczenie x masy m_1. Równanie Lagrange'a ma postać:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$$

Energia kinetyczna ciężaru i krążka wynosi:

$$T=\tfrac{1}{2}m_1v^2+\tfrac{1}{2}I_o\omega^2=\tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{\dot{x}^2}{r^2}=\tfrac{1}{2}\left(m_1+\frac{m}{2}\right)\dot{x}^2$$

Pochodne energii kinetycznej wykorzystywane we wzorze pierwszym są następujące:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\left(m_1+\frac{m}{2}\right)\dot{x}; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\left(m_1+\frac{m}{2}\right)\ddot{x}; \qquad \frac{\partial T}{\partial x}=0$$

Energia potencjalna sprężyny i siła uogólniona, z niej obliczona mają postać:

$$U=\tfrac{1}{2}\cdot k\cdot x^2; \qquad Q_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-kx;$$

Po wykorzystaniu wzorów dwóch ostatnich wzorów i podstawieniu ich do pierwszego otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu, liniowe jednorodne, drgań swobodnych nietłumionych:

$$\left(m_1+\frac{m}{2}\right)\ddot{x}=-kx; \qquad \ddot{x}+\frac{k}{m_1+\frac{m}{2}}x=0$$

Rozwiązanie równania będzie w postaci:

$$x = x_a \sin(\omega_n t + \varphi), \qquad \omega_n^2 = \frac{k}{m_1 + \frac{m}{2}}$$

Z warunków początkowych t = 0, x = 0, $\dot{x}$ = v_o otrzymuje się:

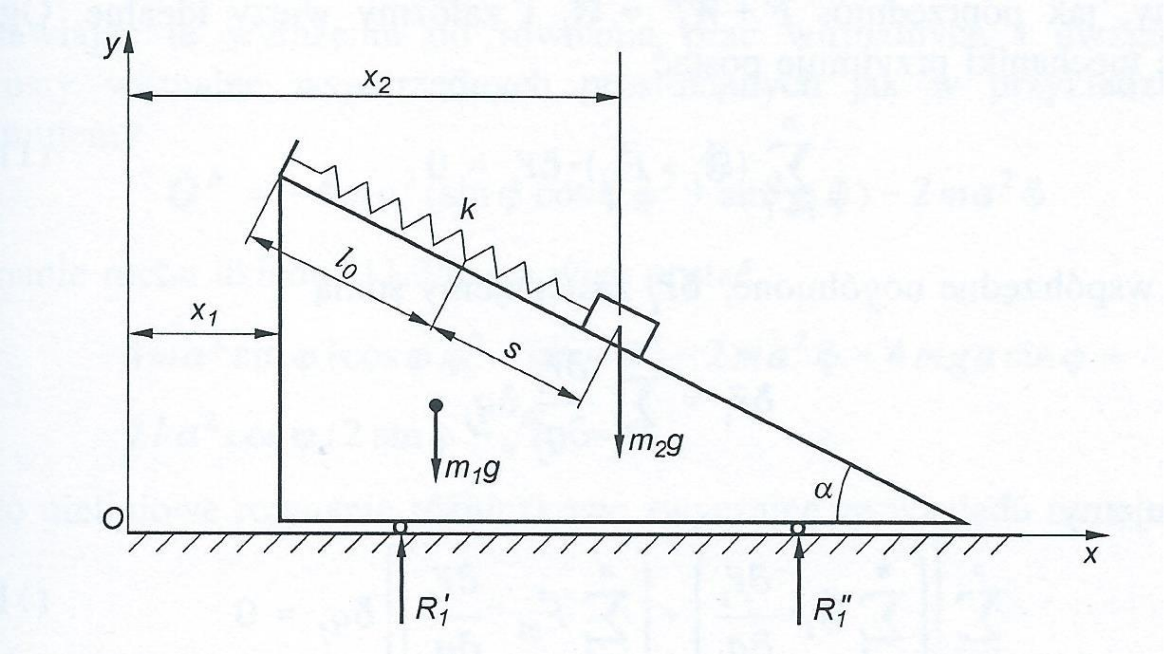
$$\varphi = 0, \qquad x_a = \frac{v_o}{\omega_n}$$

Ostatecznie równanie ruchu i okres drgań mają postać:

$$x = \frac{v_o}{\omega_n}\sin(\omega_n t), \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\left(\frac{m_1 + \frac{m}{2}}{k}\right)^{0,5}$$

Przykład 15

Ułożyć równania różniczkowe układu mechanicznego przedstawionego na rysunku. Masa o masie m_2 może się ślizgać bez tarcia po równi pochyłej o masie m_1. Pominąć wszelkie opory tarcia. Długość swobodna sprężyny wynosi l_0 .



Rozwiązanie

Mamy układ o dwóch stopniach swobody – dwie współrzędne uogólnione: x_1 i s.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

$$x_2 = x_1 + (l_0 + s)\cdot cos\alpha \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{s}\cdot cos\alpha$$

$$y_2 = h - (l_0 + s)\cdot sin\alpha \qquad \dot{y}_2 = -\dot{s}\cdot sin\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2\right) + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1{}^2$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1{}^2 + m_2 cos\alpha\cdot\dot{x}_1\dot{s} + \frac{1}{2}m_2\dot{s}^2$$

$$V = \frac{1}{2}ks^2 + m_2 g\cdot y_2 \qquad V = \frac{1}{2}ks^2 + m_2 g\cdot[h - (l_0 + s)sin\alpha]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2\dot{s} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m_2 cos\alpha\cdot\dot{x}_1 + m_2\dot{s} \quad \frac{\partial V}{\partial s} = ks - m_2 g sin\alpha$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 cos\alpha\cdot\ddot{s} = 0$$

$$m_2 cos\alpha\cdot\ddot{x}_1 + m_2\ddot{s} + ks = m_2 g sin\alpha$$

Przykład 14:

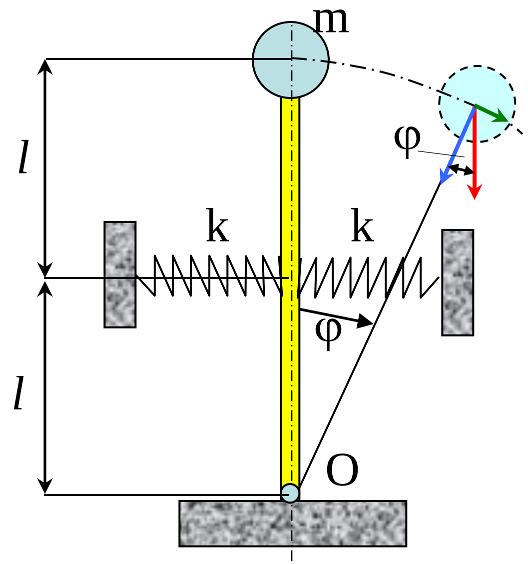
Dla układu przedstawionego na rysunku określić częstość drgań własnych wokół pionowego położenia równowagi. Przyjąć, że pręt jest sztywny i bezmasowy. Przedstawić wykreślnie ruch harmoniczny przy warunkach początkowych: $\varphi(t_0)=\Phi_0$, $\dot{\varphi}(t_0)=\Phi_1$.

Dane:

k=2000N/m

***l*=0,5m**

m=20kg



Po wychyleniu wahadła z położenia równowagi o mały kąt φ (sin φ≈φ) rozkładamy siłę ciężkości na dwie składowe:

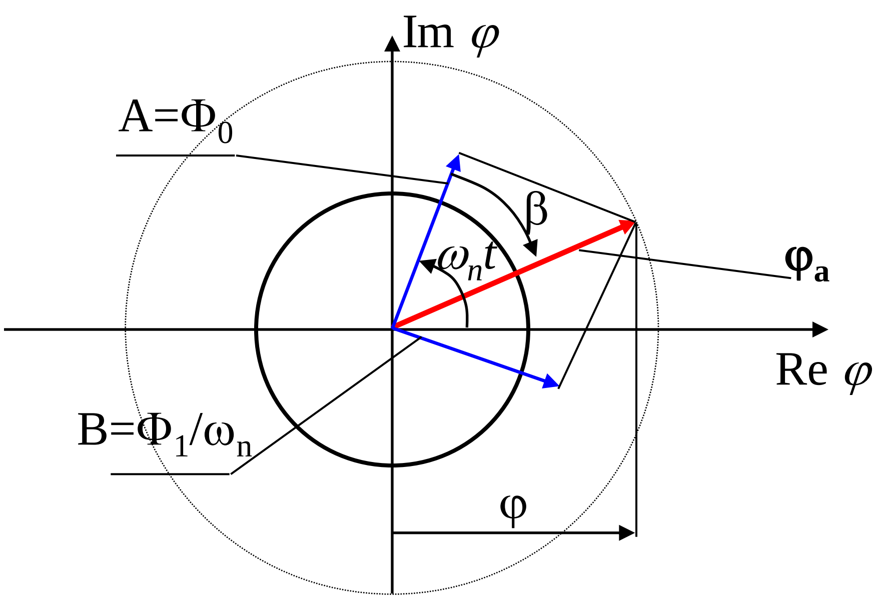
- **składową działającą wzdłuż pręta,**
- **składową do niej prostopadłą.**

Następnie piszemy równanie równowagi momentów sił względem punktu O.

$$B\ddot{\varphi} = -2kl^2\varphi + 2lmg\varphi; \qquad gdzie \quad B = m(2l)^2 = 4ml^2$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2kl^2 - 2lmg}{4ml^2}\varphi = 0;$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m} - \frac{g}{l}\right)} = 6{,}34\,\frac{rad}{s}$$



Rozwiązaniem równania ruchu jest rzut wektora a na oś poziomą

$\varphi = \varphi_a \cos(\omega_n t - \beta)$

$\varphi = \Phi_0 \cos(\omega_n t) + \Phi_1/\omega_n \sin(\omega_n t)$

Przykład 15

Dla układu przedstawionego na rysunku wyznaczyć częstość drgań swobodnych tłumionych, logarytmiczny dekrement tłumienia oraz współczynnik tłumienia krytycznego. Przedstawić interpretację geometryczną drgań.

Dane:

$B=3\,kgm^2$

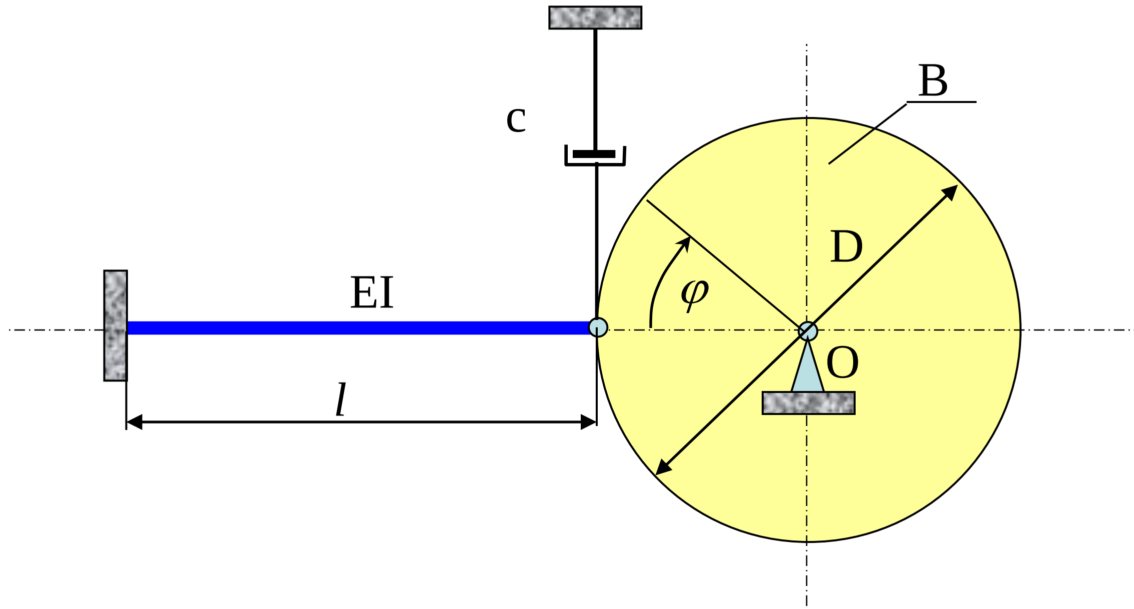
$E=20{,}6\cdot 10^{10}\,N/m^2$

$I=10^{-8}\,m^4$

$l=1\,m$

$D=0{,}5\,m$

$c=800\,Nsm^{-1}$



Rozwiązanie:

Sztywność sprężyny płaskiej wynosi:

$$k=\frac{3EI}{l^3}=3\cdot 20{,}6\cdot 10^{10}\cdot 10^{-8}=6180\,N\cdot m^{-1}$$

Równanie drgań skrętnych tarczy ma postać:

$$B\ddot{\varphi}+c\left(\frac{D}{2}\right)^2\dot{\varphi}+k\left(\frac{D}{2}\right)^2\varphi=0$$

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_n^2 \varphi = 0$$

gdzie:

$$\omega_n^2 = \frac{kD^2}{4B} = \frac{6180 \cdot 0{,}5^2}{4 \cdot 3} = 128{,}75\, s^{-1}$$

$$h = \frac{cD^2}{8B} = \frac{800 \cdot 0{,}5^2}{8 \cdot 3} = 8{,}3\, s^{-1}$$

ponieważ **$h<\omega_n$** **to przewidywane rozwiązanie ma postać:**

$$y = e^{-ht}\left[A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t)\right];$$

Częstość drgań własnych zgodnie ze wzorem ma wartość:

$$\lambda = \sqrt{\omega_n^2 - h^2} = \sqrt{128{,}75 - 68{,}89} = 7{,}74 s^{-1}$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia wynosi: $\delta = \dfrac{\pi h}{\lambda} = 3{,}66$

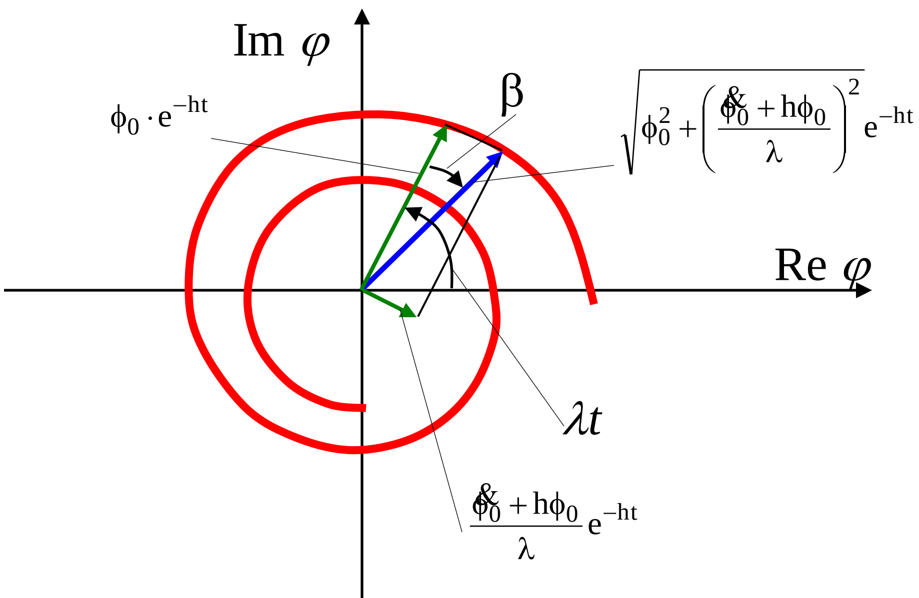
Współczynnik tłumienia krytycznego wyznaczamy dla $\omega_n = h$:

$$c_{kr} = 2\sqrt{B \cdot k} = 272{,}3\ \mathrm{N \cdot s \cdot m^{-1}}$$

Interpretację ruchu dokonamy na podstawie równania drgań przedstawionego w postaci:

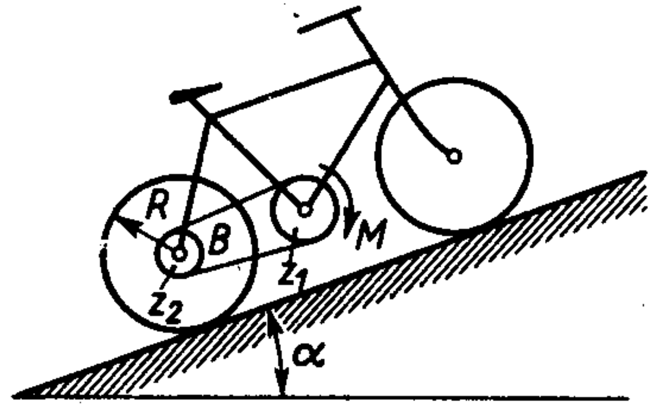
$$\varphi = a e^{-ht} \cos(\lambda t - \beta)$$

$$a = \sqrt{\phi_0^2 + \left(\frac{\dot{\phi}_0 + h \cdot \phi_0}{\lambda}\right)^2}\ ; \qquad \beta = \mathrm{arctg}\,\frac{\dot{\phi}_0 + h \cdot \phi_0}{\lambda \cdot \phi_0}$$



Przykład 16

Rowerzysta wjeżdża na górę nachyloną do po
moment pary sił, jaki musi on wywierać na (
poruszać się ruchem jednostajnym. Dane: G - c
liczba zębów na kole łańcuchowym przy pedal
łańcuchowym tylnym, R - promień tylnego koła
powietrza oraz opór przy toczeniu pominąć.



Rozwiązanie

Oznaczmy elementarny kąt obrotu koła złączonego sztywno z dźwigniami pedałowymi przez $\delta\varphi$. Praca pary sił na tym przesunięciu przygotowanym wynosi:

$$\delta L_M = M\delta\varphi$$

Aby obliczyć pracę siły ciężkości G, zauważmy, że rower porusza się ruchem postępowym z prędkością środka koła tylnego. Wynika z tego, że przesunięciem przygotowanym będzie tutaj przesunięcie środka tego koła. Jeżeli elementarny kąt obrotu koła z dźwigniami pedałowymi wynosi $\delta\varphi$, to elementarny kąt obrotu koła tylnego $\delta\psi$ znajdziemy z zależności:

$$\delta\varphi z_1 = \delta\psi z_2 \quad \text{czyli} \quad \delta\psi = \delta\varphi z_1/z_2$$

Ponieważ ruch koła jest chwilowym ruchem obrotowym wokół punktu styczności z podłożem, zatem przesunięcie przygotowane środka tego koła (które jest zarazem przesunięciem przygotowanym roweru w jego ruchu postępowym) wynosi:

$$\delta s_B = R\delta\psi = R\,\delta\varphi z_1/z_2$$

Przesunięcie to jest równoległe do równi i praca przygotowana siły ciężkości na tym przesunięciu jest równa:

$$\delta L_g = -G\delta s_B \sin(\alpha) = -GR\frac{\delta\varphi z_1}{z_2}\sin\alpha$$

Warunek równowagi wynikający z zasady prac przygotowanych przybiera postać:

$$\delta L_M + \delta L_G = 0$$

$$M\delta\varphi - GR\frac{\delta\varphi z_1}{z_2}\sin\alpha = 0$$

skąd znajdujemy

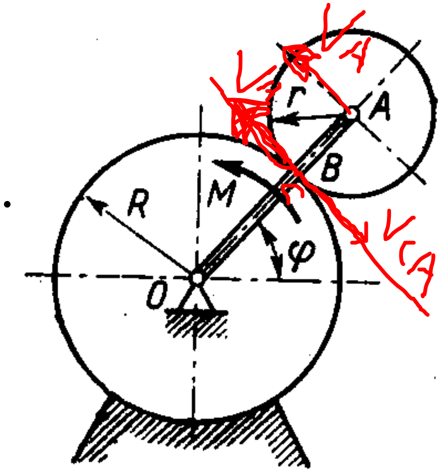
$$M = G\frac{Rz_1 \sin\alpha}{z_2}$$

Jak wspomnieliśmy w zadaniu poprzednim, w równaniu prac przygotowanych uwzględnia się tylko siły czynne w przypadku, gdy na układ są nałożone więzy idealne.
W zadaniu obecnie rozwiązywanym w punktach zetknięcia kół z nawierzchnią prócz reakcji normalnych występują i siły tarcia, które warunkują toczenie bez poślizgu. Ponieważ jednak siły te są przyłożone w punktach, których prędkości są równe zeru, więc przesunięcia przygotowane tych punktów są równe zeru i przyłożone w nich siły nie wykonują pracy.

Przykład 17

Po nieruchomym kole o promieniu R, leżącym w płaszczyźnie poziomej, toczy się bez poślizgu jednorodna tarcza o promieniu r i masie m_2, poruszana korbą OA, obracającą się wokół nieruchomego punktu O. Do korby przyłożona jest para sił o momencie M. Obliczyć przyspieszenie ε korby. Korbę traktujemy jak pręt jednorodny o masie m_1.

Rozwiązanie



Rozpatrywany układ ma jeden stopień swobody.
Jako współrzędną uogólnioną przyjmiemy kąt obrotu korby φ.
Energia kinetyczna korby OA wynosi:

$$T_1 = \frac{I_o \omega_1^2}{2} = \frac{m_1 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2}{2 \cdot 3}$$

gdzie: $I_o = m_1(R+r)^2/3$ jest momentem bezwładności korby względem osi obrotu, $\omega_1 = \dot{\varphi}$ jest prędkością kątową korby.

$\vec{V_C} = \vec{V_A} + \vec{V_{CA}}$

$V_A = V_{CA}$

Energia kinetyczna tarczy:

$$T_2 = \frac{I_A \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_A^2}{2}$$

Po podstawieniu do tego równania: prędkości środka tarczy A wynosi:

$$v_A = (R+r)\omega_1 = (R+r)\dot{\varphi}$$

$$(R+r)\omega_1 = r\omega_2$$

natomiast momentu bezwładności tarczy względem osi przechodzącej przez jej środek jest równy:

$$I_A = \frac{m_2 r^2}{2}$$

oraz prędkości kątowej tarczy (ruch tarczy jest chwilowym ruchem obrotowym wokół punktu B)

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r} = \frac{(R+r)\dot{\varphi}}{r}$$

otrzymujemy

$$T_2 = \frac{3}{4} m_2 (R+r)^2 \dot{\varphi}^2$$

Całkowita energia kinetyczna układu jest równa:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{(R+r)^2}{2}\left(\frac{m_1}{3} + \frac{3m_2}{2}\right)\dot{\varphi}^2$$

Uogólnioną siłę odpowiadającą uogólnionej współrzędnej φ **znajdziemy z wyrażenia na elementarną pracę jako współczynnik przy wariacji kąta** $\delta\varphi$**. Mamy bowiem**

$$\delta L = M\delta\varphi \qquad \text{gdzie} \qquad Q_\varphi = M$$

Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu:

$$(R+r)^2\left(\frac{m_1}{3} + \frac{3m_2}{2}\right)\ddot{\varphi} = M$$

stąd wynika

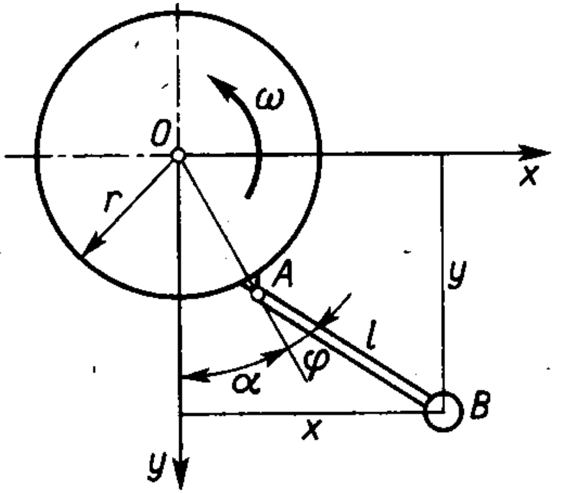
$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{6M}{(R+r)^2\left(2m_1 + 9m_2\right)}$$

Przykład 18

Tarcza kołowa o promieniu r obraca się dokoła pionowej osi ze stałą prędkością kątową ω. Do obwodu tarczy przymocowany jest na przegubie walcowym A nieważki pręt o długości l z umieszczoną na końcu skupioną masą m, który może wykonywać wahania w płaszczyźnie poziomej. Zbadać ruch pręta.

Rozwiązanie

Rozważany układ ma jeden stopień swobody.
Jako współrzędną uogólnioną przyjmiemy kąt wychylenia pręta φ mierzony od promienia OA.
W przyjętym na rysunku układzie osi, współrzędne punktu B wynoszą:



$$x = r\sin\alpha + l\sin(\alpha + \varphi); \quad y = r\cos\alpha + l\cos(\alpha + \varphi),$$

gdzie $\alpha = \omega t$.

Znajdziemy obecnie składowe, prędkości punktu B:

$$\dot{x} = r\,\omega\cos\alpha + l\cos(\alpha + \varphi)(\omega + \dot{\varphi})$$
$$\dot{y} = -r\,\omega\sin\alpha - l\sin(\alpha + \varphi)(\omega + \dot{\varphi}).$$

Energia kinetyczna masy skupionej na końcu pręta wynosi:

$$T = \tfrac{1}{2}m \cdot v_B^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

Po podstawieniu obliczonych poprzednio wielkości x i y oraz wykonaniu przekształceń otrzymujemy następujący wzór na energię kinetyczną:

$$T = \frac{m}{2}\left(r^2\omega^2 + l^2\omega^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l^2\omega\dot{\varphi} + 2lr\omega^2\cos\varphi + 2lr\omega\dot{\varphi}\cos\varphi\right)$$

Z uwagi na to, że ruch odbywa się w płaszczyźnie poziomej, energia potencjalna ma stałą wartość, czyli

V = const.

Po wykonaniu działań otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{gr\omega^2}{lg}\sin\varphi = 0$$

Wprowadzając oznaczenie $l_{red} = lg/(r\omega^2)$ mamy

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_{red}}\sin\varphi = 0$$

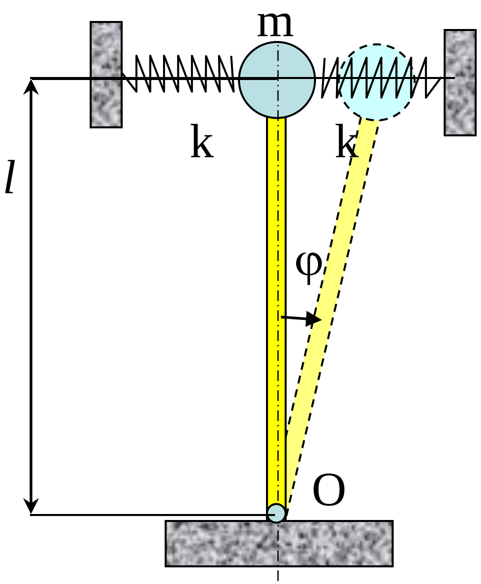
Równanie to jest różniczkowym równaniem ruchu wahadła matematycznego o długości l_{red}. Tak więc pręt względem poruszającej się tarczy wykonuje ruchy okresowe takie, jak wahadło matematyczne o długości

$$l_{red} = \frac{lg}{r\omega^2}$$

Przykład 19

Nieważki pręt o długości *l* z umocowaną na końcu skupioną masą m jest osadzony na przegubie w punkcie O. Pręt utrzymywany jest w położeniu pionowym za pomocą dwóch poziomych sprężyn, których stałe są jednakowe i równe k. Znaleźć okres drgań własnych pręta.

Rozwiązanie



Obierzmy jako współrzędną uogólnioną kąt wychylenia pręta φ z położenia równowagi. Prędkość masy skupionej m (traktowanej jak punkt materialny) wynosi wówczas:

$$v = l\dot{\varphi}$$

a energia kinetyczna tej masy

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$$

W położeniu określonym kątem φ energia potencjalna składa się z energii potencjalnej siły ciężkości i energii odkształconych sprężyn. Pierwsza z nich jest równa:

$$\mathbf{V_1 = mg\mathit{l}\cos\varphi.}$$

Energia odkształconej sprężyny wyraża się następującym wzorem:

$$V_{sp} = \frac{kx^2}{2}$$

gdzie x jest odkształceniem sprężyny, k - stałą sprężyny.
Energia odkształcenia obu sprężyn wynosi więc

$$V_2 = kx^2$$

Przy małych wartościach kąta φ można przyjąć $x = l\varphi$ oraz $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, co pozwala wyrazić energię potencjalną za pomocą wzoru

$$V = V_1 + V_2 = mgl\cos\varphi + kl^2\varphi^2 \approx mgl\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + kl^2\varphi^2$$

Z zasady zachowania energii, otrzymujemy:

$$\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl\frac{\varphi^2}{2} + kl^2\varphi^2 = \mathrm{const.}$$

Przez zróżniczkowanie tego równania względem czasu otrzymujemy równanie różniczkowe opisujące ruch pręta wokół położenia równowagi

$$\ddot{\varphi} + \frac{2kl - mg}{ml}\varphi = 0$$

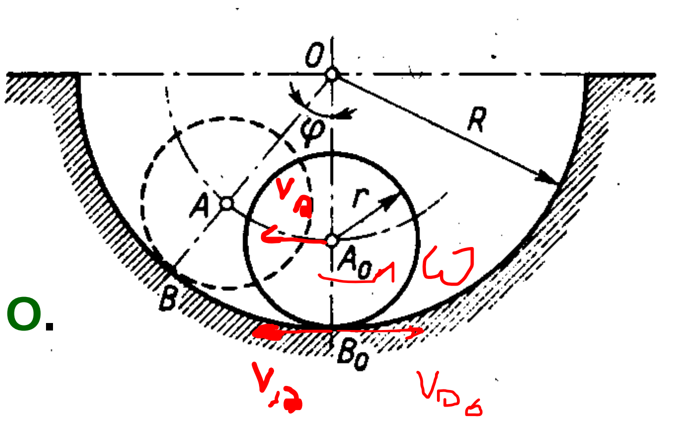
Równanie to będzie miało okresowe rozwiązanie, gdy współczynnik przy φ będzie miał dodatnią wartość, tzn. gdy $2kl > mg$. W tym przypadku okres drgań wynosi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2kl-mg}}$$

Przykład 20

Wewnątrz pustego cylindra kołowego o osi poziomej i promieniu R znajduje się jednorodny walec o masie m i promieniu r. Zakładając, że walec może się toczyć bez poślizgu, obliczyć okres małych drgań walca wokół położenia równowagi.

Rozwiązanie



Jako współrzędną niezależną określającą położenie walca przyjmiemy kąt φ, jaki tworzy płaszczyzna przechodząca przez osie obu walców z pionem.
W zasadzie ruchu środek masy A walca porusza się po okręgu o promieniu (R–r) i środku w punkcie O.
Prędkość środka walca wynosi

$$v_A = (R - r)\dot{\varphi}$$

gdzie φ jest prędkością kątową promienia OA.
Energia kinetyczna walca składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego z prędkością środka masy i energii kinetycznej ruchu obrotowego wokół tego środka, czyli

$$T = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m v_A^2}{2}$$

przy czym I jest momentem bezwładności walca względem jego osi, ω – prędkością kątową walca.
Przy założeniu, że walec toczy się bez poślizgu, wspólna tworząca obu walców jest chwilową osią obrotu walca ruchomego i między prędkością kątową ω walca a prędkością jego środka zachodzi następujący związek:

$$\omega = v_A / r$$

Podstawiając wzór na prędkość v_A i prędkość kątową do wyrażenia na energię kinetyczną, otrzymujemy:

$$T = \frac{3}{4} m (R - r)^2 \dot{\varphi}^2$$

Energia potencjalna wyraża się wzorem:

$$V = -mg(R-r)\cos\varphi.$$

Z zasady zachowania energii wynika równanie

$$T + V = \text{const},$$

czyli

$$\frac{3}{4} m (R - r)^2 \dot{\varphi}^2 - mg(R - r)\cos\varphi = \text{const}.$$

Różniczkując to równanie względem czasu otrzymujemy:

$$\frac{3}{2}(R - r)\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

Zakładając, że kąt φ jest mały, i podstawiając $\sin\varphi \approx \varphi$ znajdujemy

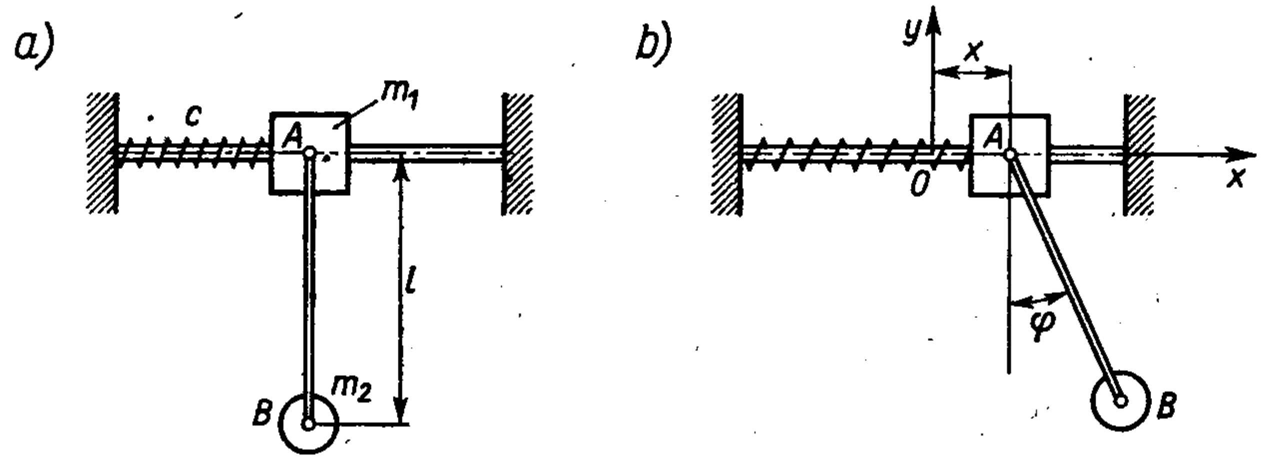
$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-r)}\varphi = 0$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu harmonicznego o okresie:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

Przykład 21

Suwak A o masie m_1 umocowany na sprężynie o stałej c może przesuwać się po gładkiej poziomej prowadnicy. Do suwaka przymocowany jest na przegubie nieważki pręt o długości l z umieszczoną na końcu skupioną masą m_2 (rys. a). Znaleźć częstości kołowe drgań głównych układu.



Rozwiązanie

Układ ma dwa stopnie swobody. Jako współrzędne uogólnione, określające położenie układu, przyjmiemy przesunięcie x suwaka A oraz kąt φ obrotu pręta. Przy układaniu równań ruchu posłużymy się równaniami Lagrange'a, których postać w przypadku sił mających potencjał jest następująca:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

Przypominamy, że w równaniach tych występujące symbole mają następujące znaczenia: q_j - współrzędna uogólniona, $\dot{q}_j$ - pochodna tej współrzędnej względem czasu, T - energia kinetyczna układu, V - energia potencjalna, k -liczba stopni swobody.

W zadaniu tym $k = 2$, $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$.
Załóżmy, że współrzędne będziemy odmierzali od położenia równowagi. Ponieważ ograniczamy się do badania małych drgań, przyjmiemy że wartości współrzędnych oraz ich pochodne są małe.
W wyrażeniach na energię kinetyczną i potencjalną ograniczymy się do wyrazów zawierających drugie potęgi tych wielkości i w związku z tym w pobliżu położenia równowagi energia kinetyczna wyraża się jako kwadratowa forma prędkości uogólnionych. W układzie o dwóch stopniach swobody na podstawie powyższego mamy:

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2\right)$$

gdzie współczynniki a_{11}, a_{12}, a_{22} są w ogólnym przypadku pewnymi funkcjami współrzędnych q_1 i q_2.
Zgodnie z poprzednio uczynionymi założeniami, przy ograniczaniu się do małych rzędu drugiego, w przypadku małych drgań można przyjąć, że współczynniki te są stałe i równe wartościom, jakie przyjmują dla $q_1 = 0$ i $q_2 = 0$ (tzn. wartościom w położeniu równowagi). Przy tym założeniu

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$$

i zagadnienie małych drgań układu o dwóch stopniach swobody sprowadza się do rozwiązania następujących równań różniczkowych:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) + \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

Zajmiemy się obecnie obliczeniem energii kinetycznej i potencjalnej. W przyjętym układzie osi współrzędne punktu B wynoszą (rys. b):

$$x_2 = x + l\sin\varphi, \quad y_2 = -l\cos\varphi.$$

Różniczkując współrzędne względem czasu otrzymamy następujące wartości składowych prędkości punktu B:

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}_2 = l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

W położeniu równowagi, tj. dla $\varphi = 0$ i $x = 0$, mamy

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\varphi}, \qquad \dot{y}_2 = 0$$

i energia kinetyczna układu wynosi

$$T = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{1}{2}\left[\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}^2 + 2m_2 l\dot{x}\dot{\varphi} + m_2 l^2\dot{\varphi}^2\right]$$

Energia potencjalna określona jest następującym wzorem

$$V = m_2 g y_2 + \frac{c}{2}x^2 = -m_2 g l\cos\varphi + \frac{1}{2}cx^2$$

Ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji cosinus w szereg

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

po podstawieniu otrzymujemy

$$V = -m_2 g l\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + \frac{1}{2}cx^2$$

Po wykonaniu działań przewidzianych w równaniach Lagrange'a otrzymujemy:

$$(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2 l\ddot{\varphi}+cx=0; \qquad \ddot{x}+l\ddot{\varphi}+g\varphi=0 \tag{1}$$

Jest to układ dwóch jednorodnych równań różniczkowych o stałych współczynnikach, którego rozwiązanie przewidujemy w postaci:

$$x=A_1\sin(kt+\alpha); \qquad \varphi=A_2\sin(kt+\alpha) \tag{2}$$

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\ddot{x}=-A_1k^2\sin(kt+\alpha); \qquad \ddot{\varphi}=-A_2k^2\sin(kt+\alpha) \tag{3}$$

Podstawienie wyrażeń (2) i (3) do równań (1) prowadzi do następujących zależności:

$$A_1\left[c-(m_1+m_2)k^2\right]-A_2k^2m_2l=0$$

$$-A_1k^2+A_2(g-k^2l)=0$$

Otrzymany jednorodny układ równań liniowych ma niezerowe rozwiązanie, jeżeli jego wyznacznik charakterystyczny jest równy zeru:

$$\begin{vmatrix} c-(m_1+m_2)k^2 & -k^2m_2l \\ -k^2 & g-k^2l \end{vmatrix}=0$$

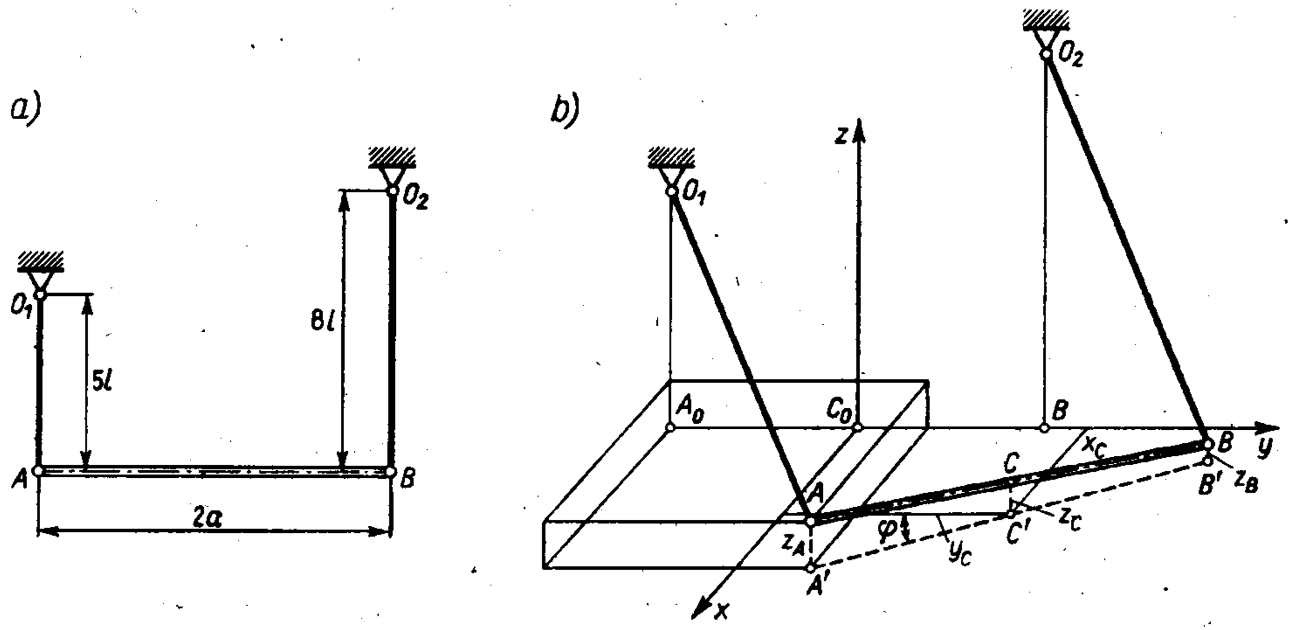
Rozwijając ten wyznacznik otrzymujemy równanie algebraiczne

$$k^4 - k^2\left[\frac{g(m_1+m_2)}{m_1 l} + \frac{c}{m_1}\right] + \frac{gc}{m_1 l} = 0$$

Pierwiastki tego równania traktowanego jako równanie kwadratowe względem k^2 są równe kwadratom częstości kołowych k_1 i k_2.

Przykład 22

Cienka jednorodna belka o długości 2a i masie m została zawieszona na dwóch pionowych nieważkich prętach o długościach 5L i 8L (rys. a). Wyznaczyć częstości drgań głównych belki (w położeniu równowagi belka jest pozioma).



Rozwiązanie

Rozpatrywany układ ma trzy stopnie swobody. Jako współrzędne uogólnione określające położenie belki przyjmujemy współrzędne środka belki x_c i y_c, oraz kąt obrotu φ rzutu belki na płaszczyznę poziomą. Energia kinetyczna belki w położeniu równowagi, po pominięciu małych wyższego rzędu niż drugi, wyraża się następującym wzorem:

$$T = \frac{m\dot{x}_c^2}{2} + \frac{m\dot{y}_c^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{3}\dot{\varphi}^2$$

(Moment bezwładności belki względem osi przechodzącej przez środek masy wynosi 1/3 ma^2).

Aby obliczyć energię potencjalną, założymy, że belka doznała przemieszczenia przedstawionego na rys. b i obliczymy wzniesienia z_A i z_B końców A i B belki. Z rysunku tego otrzymujemy zależność

$$(O_1A)^2 = 25l^2 = x_A^2 + y_A^2 + (5l - z_A)^2$$

Dla małych φ możemy przyjąć

$$y_A = y_c,\ x_A = x_c + a\varphi$$

i po podstawieniu znajdujemy

$$0 = x_c^2 + 2ax_c\varphi + a^2\varphi^2 + y_c^2 - 10lz_A + z_A^2$$

Pomijając małe z_A^2 otrzymujemy

$$z_A = \frac{x_c^2 + y_c^2 + a^2\varphi^2 + 2ax_c\varphi}{10l}$$

W podobny sposób znajdziemy wzniesienie punktu B

$$z_B = \frac{x_c^2 + y_c^2 + a^2\varphi^2 + 2ax_c\varphi}{16l}$$

Wzniesienie środka masy C jest średnią arytmetyczną wzniesień z_A i z_B, czyli

$$z_C = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{13x_c^2 + 13y_c^2 + 13a^2\varphi^2 + 26ax_c\varphi}{160l}$$

Energia potencjalna wynosi więc:

$$V = mgz_c = \frac{mg}{160l}\left(13x_c^2 + 13y_c^2 + 13a^2\varphi^2 + 26ax_c\varphi\right)$$

Zbadamy obecnie ruch układu posługując się równaniami Lagrange'a

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c}\right) + \frac{\partial V}{\partial y_c} = \ddot{y}_c + \frac{13g}{80l}y_c = 0\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_c} = \ddot{x}_c + \frac{13g}{80l}x_c + \frac{13ga}{80l}\varphi = 0\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{a}{3}\ddot{\varphi} + \frac{13g}{80l}x_c + \frac{13ga}{80l}\varphi = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Z pierwszego równania wynika, że zmiana współrzędnej y_c zachodzi niezależnie od dwóch pozostałych. Współrzędna ta jest więc współrzędną główną, czyli normalną. Częstość kołowa odpowiadająca tej współrzędnej jest jedną z częstości drgań głównych układu i jej kwadrat wynosi:

$$k_1^2 = \frac{13g}{80l}$$

Aby znaleźć pozostałe dwie częstości drgań głównych, będziemy postępować podobnie jak w zadaniach poprzednich.
Przewidujemy rozwiązanie szczególne w postaci:

$$x_c = A_1 \sin(kt + \alpha); \qquad \varphi = A_2 \sin(kt + \alpha)$$

Po podstawieniu tych funkcji do dwóch ostatnich równań układu (1) otrzymujemy analogicznie jak w poprzednich zadaniach jednorodny układ równań liniowych, który ma niezerowe rozwiązania dla dwóch wartości parametru k^2:

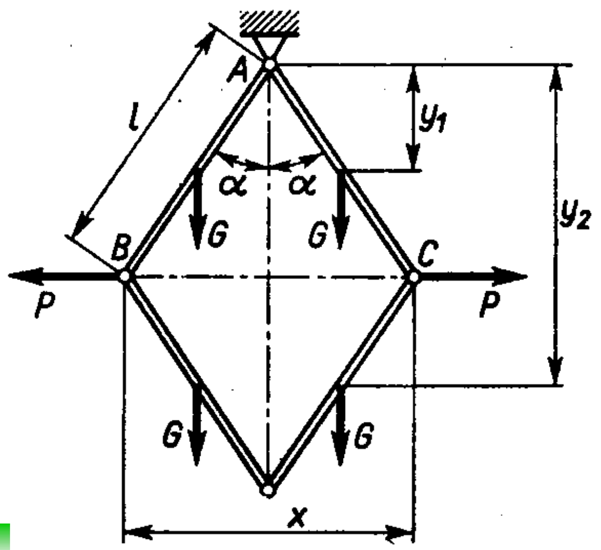
$$k_2^2 = \frac{3g}{20l}; \qquad k_3^2 = \frac{g}{2l}$$

Są to kwadraty częstości kołowych dwóch następnych drgań głównych belki.

Przykład 23

Cztery jednorodne pręty o jednakowej długości l i ciężarze G są połączone przegubami i zawieszone w węźle A. Do węzłów B i C przyłożone są dwie równe co do wartości poziome siły P. Znaleźć wartość kąta α w położeniu równowagi.

Rozwiązanie



Pręty te tworzą w każdej chwili romb i cały układ jest symetryczny względem pionowej osi przechodzącej przez węzeł A. Oznaczymy rzędne punktów przyłożenia sił ciężkości G odpowiednio przez y_1 i y_2:

$$y_1 = \frac{l}{2}\cos(\alpha); \qquad y_2 = \frac{3l}{2}\cos(\alpha)$$

Składowe pionowe przesunięć przygotowanych tych punktów wyznaczymy jako różniczki obu rzędnych. Mamy wówczas

$$\delta y_1 = -\frac{l}{2}\sin\alpha\,\delta\alpha; \qquad \delta y_2 = -\frac{3l}{2}\sin\alpha\,\delta\alpha$$

Znak minus oznacza, że przy wzroście kąta α rzędne y_1 i y_2 zmniejszają się). Długość przekątnej BC oznaczymy przez x. Składowe poziome przesunięć przygotowanych punktów przyłożenia siły P znajdziemy również drogą różniczkowania

$$x = 2l\sin(\alpha); \qquad \delta x = 2l\cos(\alpha)\delta\alpha$$

Równanie prac przygotowanych dla układu prętów ma postać

$$2G\delta y_1 + 2G\delta y_2 + P\delta x = 0$$

Po podstawieniu do tego równania obliczonych uprzednio wyrażeń na przesunięcia przygotowane otrzymujemy ostatecznie:

$$-2G\frac{l}{2}\sin\alpha\,\delta\alpha-2G\frac{3l}{2}\sin\alpha\,\delta\alpha+P\cdot 2l\cos\alpha\,\delta\alpha=0$$

$$\delta\alpha\left(P\cos\alpha-2G\sin\alpha\right)=0$$

Równanie to jest spełnione, dla dowolnego $\delta\alpha$, gdy

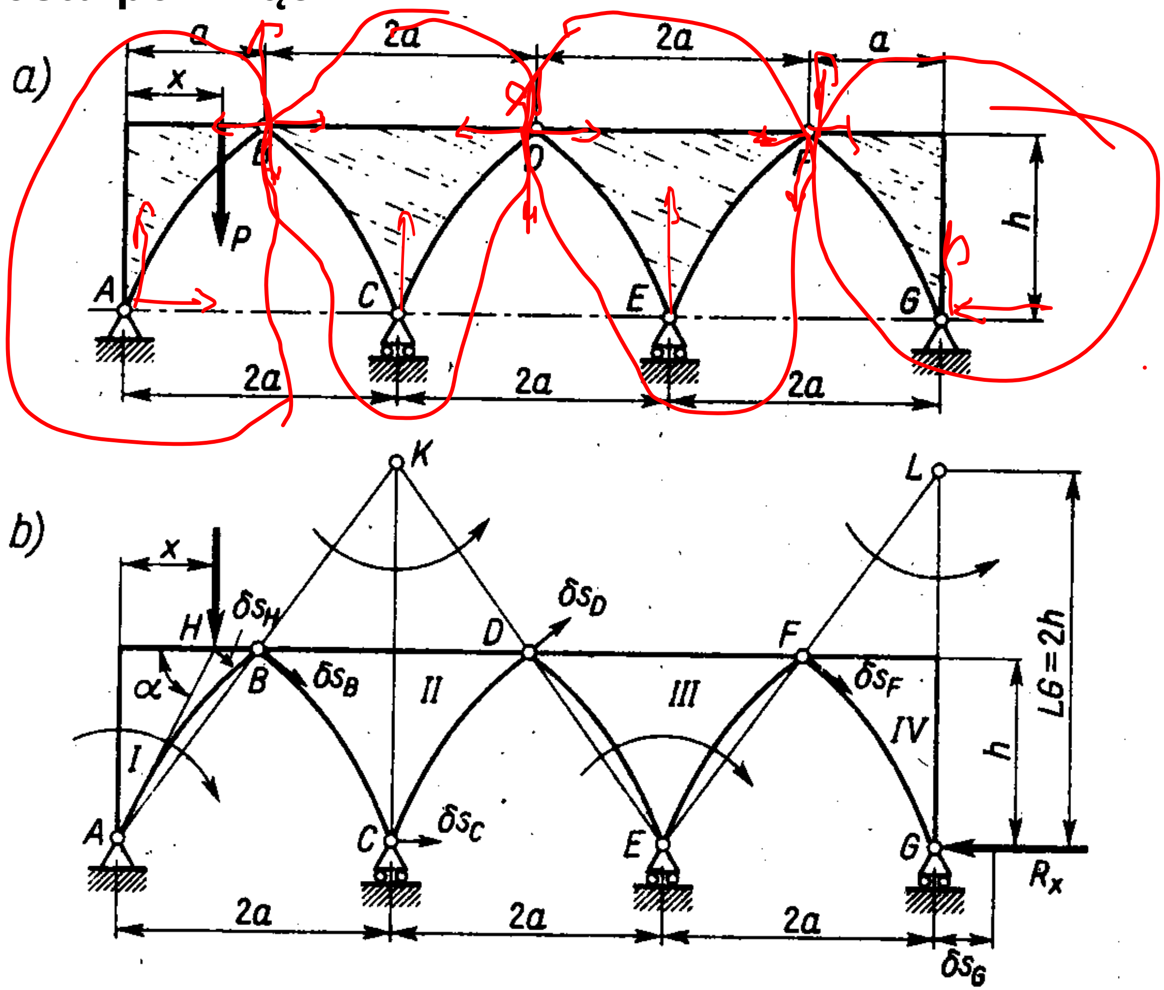
$$P\cos\alpha-2G\sin\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad P=2G\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{P}{2G}\right)$$

Przykład 24

Most składa się z czterech elementów połączonych ze sobą przegubami B, D i F. Skrajne elementy połączone są z fundamentem za pomocą przegubów stałych A i G, środkowe zaś spoczywają na podporach przesuwnych C i E. Znaleźć składową poziomą R_x reakcji przegubu G, jeżeli na pierwszy element mostu działa pionowa siła P, przyłożona w odległości x od lewego końca (rys. a). Ciężar własny mostu pominąć.



Rozwiązanie

W równaniu, które otrzymujemy stosując zasadę prac przygotowanych, nie występują reakcje więzów idealnych. Jeżeli więc chcemy wyznaczyć jedną z reakcji, musimy nadać jej charakter siły czynnej. W tym celu usuwamy myślowo podporę, której reakcję mamy wyznaczyć i w dalszych rozważaniach traktujemy ją jako siłę czynną. W przypadku gdy układ jest podparty w sposób statycznie wyznaczalny, wówczas przez usunięcie jednego podparcia nadajemy mu jeden stopień swobody, co umożliwia obliczenia przesunięć przygotowanych wszystkich, jego punktów, przy czym za przesunięcia przygotowane będziemy wówczas uważali przesunięcia zgodne z pozostałymi więzami.

W rozpatrywanym zadaniu chcąc obliczyć poziomą reakcję w przegubie G, należy zastąpić w punkcie G przegub podporą przesuwną oraz przyłożyć w tym punkcie poziomą siłę R_x, co zostało wykonane na rys. b.

Znajdziemy obecnie przesunięcie przygotowane punktów H i G. Most składa się z czterech sztywnych części. Przesunięciem przygotowanym części I jest elementarny obrót tej części wokół przegubu A. Jeżeli ten elementarny kąt obrotu oznaczymy przez $\delta\varphi$, to przesunięcia przygotowane punktów H i B będą odpowiednio równe

$$\delta s_H = AH \cdot \delta\varphi; \qquad \delta s_B = AB \cdot \delta\varphi;$$

przy czym przesunięcie δs_B jest prostopadłe do odcinka AB.

Przemieszczenie przygotowane części II jest elementarnym przemieszczeniem figury płaskiej w jej płaszczyźnie. Jak wiemy z kinematyki ciała sztywnego, takie przemieszczenie można rozpatrywać jako obrót ciała o elementarny kąt wokół chwilowego środka.

Należy wyznaczyć więc położenie środka obrotu części II. Ponieważ znamy kierunki przesunięć przygotowanych dwóch punktów tej części, poprzednio określonego przesunięcia przygotowanego punktu B oraz punktu C, który może tylko doznać przesunięcia w kierunku poziomym, więc prowadząc proste prostopadłe do kierunków elementarnych przesunięć znajdziemy w punkcie przecięcia się tych prostych środek elementarnego obrotu K.

Wyznaczymy obecnie przesunięcie przygotowane punktu D. Jest ono co do wartości takie samo jak punktu B i skierowane prostopadle do odcinka KD, czyli

$$\delta s_D = \delta s_B$$

Postępując w analogiczny sposób stwierdzimy, że środkiem obrotu części III jest punkt E, części IV zaś punkt L. Jak wynika z rys. b, zachodzi tu zależność:

$$\delta s_F = \delta s_D = \delta s_B$$

Aby wyznaczyć przesunięcie przygotowane punktu G, skorzystamy z zależności, że w chwilowym ruchu obrotowym prędkości punktów, a więc i przesunięcia przygotowane tych punktów, są proporcjonalne do odległości punktów od chwilowego środka. Mamy więc

$$\frac{\delta s_F}{FL} = \frac{\delta s_G}{LG} \qquad \text{czyli} \qquad \delta s_G = \delta s_F \frac{LG}{FL} = AB \cdot \delta\varphi \frac{LG}{FL}$$

Równanie prac przygotowanych przybiera postać:

$$P \cdot \delta s_H \cdot \cos\alpha - R_x \cdot \delta s_G = 0$$

gdzie: α oznacza kąt między kierunkiem siły P i kierunkiem przesunięcia przygotowanego punktu H.

Podstawiając obliczone wielkości znajdziemy

$$P \cdot AH \cdot \delta\varphi \cdot \cos\alpha - R_x \cdot AB \cdot \delta\varphi \frac{LG}{FL} = 0$$

Ponieważ, jak widać z rys. b

$$AB = FL, \qquad LG = 2h, \qquad AH \cdot \cos\alpha = x$$

przeto otrzymujemy ostatecznie:

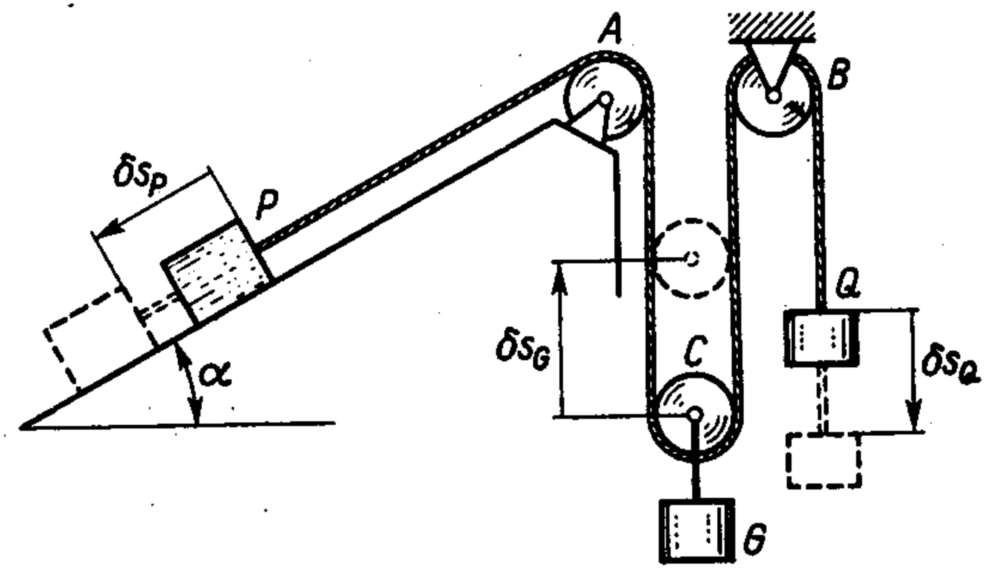
$$(P \cdot x - 2R_x \cdot h)\delta\varphi = 0$$

i stąd

$$R_x = \frac{P \cdot x}{2h}$$

Przykład 25

Na końcach nierozciągliwej liny przerzuconej przez dwa stałe gładkie krążki A i B zostały zawieszone dwa ciężary P i Q. Ciężar P leży na gładkiej równi pochyłej tworzącej kąt α z poziomem. Między krążkami A i B został zawieszony krążek C z zawieszonym ciężarem G. Mając dany ciężar P wyznaczyć ciężary G i Q, aby zachodziła równowaga.



Rozwiązanie

Rozważany układ ma dwa stopnie swobody. Nadajmy ciężarom P i Q dowolne przesunięcia przygotowane δs_Q i δs_P, jak to zostało zaznaczone na rysunku. Przesunięcie przygotowane ciężaru G wynosi wówczas

$$\delta s_G = \frac{\delta s_Q + \delta s_P}{2}$$

i jak wynika z rysunku, jest skierowane przeciwnie do siły ciężkości G.

Prace przygotowane poszczególnych sił ciężkości są następujące:

$$\delta L_P = P\delta s_P \cos(90° - \alpha) = P\delta s_P \sin\alpha$$

$$\delta L_Q = Q\delta s_Q$$

$$\delta L_G = -G\delta s_G = -G\frac{\delta s_Q + \delta s_P}{2}$$

Suma prac wszystkich tych sił musi być równa zeru, czyli

$$\delta L_P + \delta L_Q + \delta L_G = 0$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$\left(P\sin\alpha - \frac{G}{2}\right)\delta s_P + \left(Q - \frac{G}{2}\right)\delta s_Q = 0$$

Ponieważ δs_p i δs_Q przedstawiają dwie niezależne wielkości, więc w położeniu równowagi muszą być spełnione dwa równania:

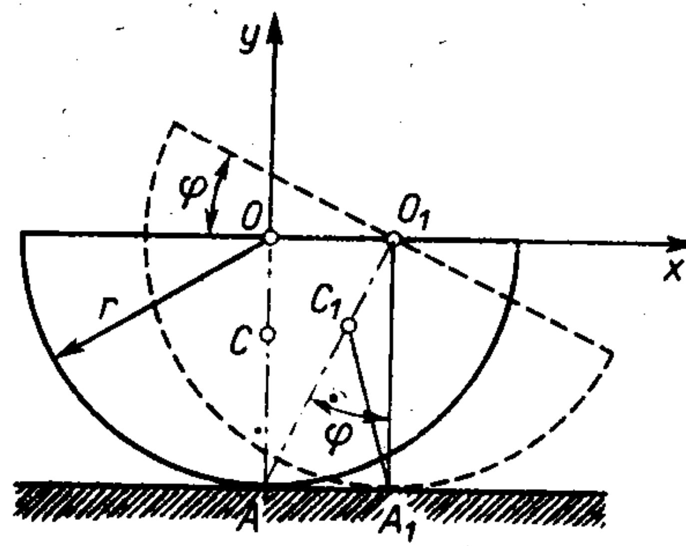
$$Q - \frac{G}{2} = 0; \quad P\sin\alpha - \frac{G}{2} = 0$$

stąd znajdujemy

$$Q = \frac{G}{2}; \quad G = 2P\sin\alpha$$

Przykład 26

Znaleźć okres małych drgań jednorodnego półwalca o promieniu r leżącego na chropowatej poziomej płaszczyźnie, przy założeniu, że półwalec toczy się bez poślizgu.



Rozwiązanie

W zadaniu tym będziemy zajmować się badaniem małych ruchów ciał wokół położenia równowagi stałej. Jak wiemy, ruch taki jest ruchem okresowym.

W celu wyznaczenia równania ruchu posłużymy się zasadą zachowania energii mechanicznej.

W przypadku gdy na ciało działają siły zachowawcze (mające potencjał), suma energii potencjalnej V i kinetycznej T w czasie ruchu jest stała, czyli

$$T + V = \text{const}.$$

W dalszych rozważaniach założymy, że wychylenia i prędkości są małe. Rozważmy półwalec wychylony z położenia równowagi o mały kąt ϕ. Jeżeli między półwalcem a płaszczyzną nie ma poślizgu, to ruch jego można rozpatrywać jako chwilowy ruch obrotowy wokół osi, przechodzącej przez chwilowy punkt styczności (punkt A_1i jego energia kinetyczna wynosi:

$$T = \frac{I_{A_1}\dot{\varphi}^2}{2}$$

gdzie I_{A1} jest momentem bezwładności względem chwilowej osi obrotu. Moment bezwładności półwalca względem osi przechodzącej przez punkt O_1 wynosi

$$I_{O_1} = \tfrac{1}{2} mr^2$$

gdzie m jest masą półwalca.

Stosując twierdzenie Steinera, mamy

$$I_{C_1} = I_{O_1} - m(O_1C_1)^2 = \tfrac{1}{2} mr^2 - m\left(\tfrac{4r}{3\pi}\right)^2 = mr^2\left(\tfrac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)$$

Podobnie

$$I_{A_1} = I_{C_1} + m(A_1C_1)^2 =$$

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta $O_1C_1A_1$ otrzymujemy

$$(A_1C_1)^2 = (A_1O_1)^2 + (O_1C_1)^2 - 2 \cdot O_1C_1 \cdot A_1C_1 \cdot \cos\varphi$$

Zgodnie z uczynionym na początku założeniem, że kąt φ jest mały, możemy przyjąć, że

$$\cos\varphi = 1; \quad oraz \quad A_1C_1 \approx AC = r\left(1 - \tfrac{4}{3\pi}\right) \cdot \cos\varphi$$

Biorąc to pod uwagę mamy:

$$I_{A1} = I_{C_1} + mr^2\left(1 - \tfrac{4}{3\pi}\right)^2 = mr^2\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{8}{3\pi}\right)$$

Ostatecznie otrzymujemy następujące wyrażenie na energię kinetyczną półwalca:

$$T=\frac{mr^2}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\right)\dot{\varphi}^2$$

Na podstawie powyższych rozważań można stwierdzić, że przy badaniu małych drgań wokół położenia równowagi stałej energię kinetyczną można wyznaczać przyjmując zależności geometryczne i kinematyczne takie, jakie zachodzą dla tego położenia. (W rozpatrywanym zadaniu położenie, dla którego $\varphi = 0$).

Energia potencjalna półwalca wynosi:

$$V=mgy_c$$

gdzie y_c - współrzędna środka masy półwalca.

Przyjmując punkt O za początek układu współrzędnych mamy:

$$y_c=-O_1C_1\cdot\cos\varphi=-\frac{4r}{3\pi}\cos\varphi$$

Uwzględniając tylko małe rzędu drugiego możemy przyjąć $\cos\varphi\approx 1-\varphi^2/2$ i otrzymujemy

$$V=-mg\frac{4r}{3\pi}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)$$

Podstawiając wyrażenia na energię kinetyczną i potencjalną do wzoru pierwszego otrzymujemy:

$$\frac{mr^2}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{8}{3\pi}\right)\dot{\varphi}^2+mg\,\frac{2r}{3\pi}\varphi^2=\mathrm{const.}$$

Przez zróżniczkowanie powyższego równania względem czasu i po skróceniu przez $\dot{\varphi}$ dochodzimy do następującego równania różniczkowego:

$$\ddot{\varphi}+\frac{8g}{r(9\pi-16)}\varphi=0$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu harmonicznego o częstości kołowej (pulsacji)

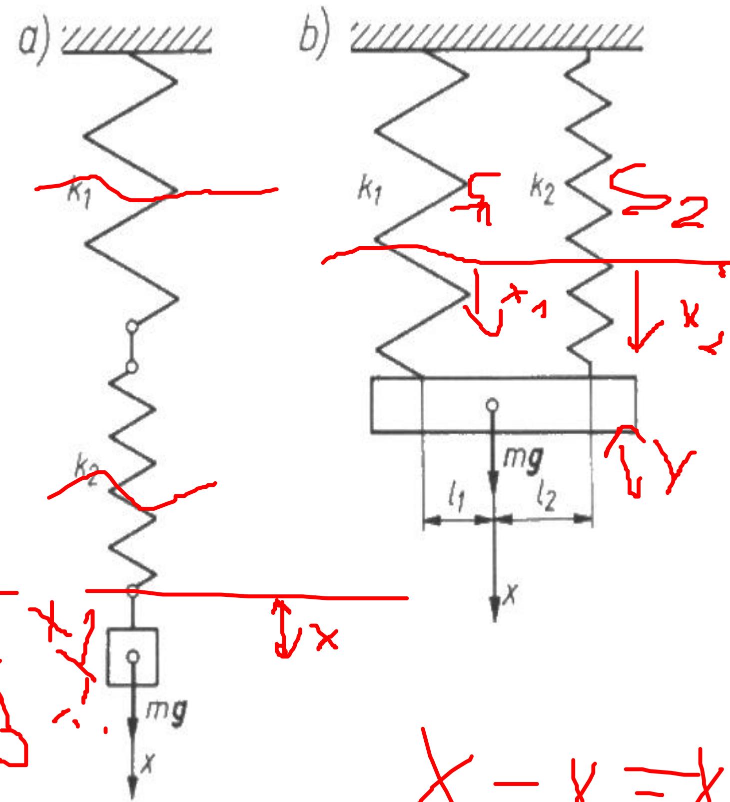
$$\omega=\sqrt{\frac{8g}{r(9\pi-16)}}$$

i okresie drgań

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{r(9\pi-16)}{8g}}$$

Przykład 27

Określić stosunek okresów drgań swobodnych punktu materialnego o masie *m* zawieszonego na dwóch jednakowych sprężynach przy szeregowym i równoległym ich połączeniu. Dane są sztywności obu sprężyn k_1 i k_2 [N/m].



$X = X_1 = X_2$

Rozwiązanie

W przypadku połączenia szeregowego

Sprężyn ich wydłużenie wynosi:

$$S_1 = S_2 = S$$

$$x = x_1 + x_2 = \frac{S_1}{k_1} + \frac{S_2}{k_2} = S\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$\boxed{S = x \cdot k_{zas}} = x \cdot \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\boxed{k_{z1} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

Równanie różniczkowe drgań swobodnych w tym przypadku ma postać:

$$\ddot{x}+\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}x=0$$

Okres drgań wynosi:

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$$

W przypadku równoległego połączenia sprężyn, przy jednakowym ich wydłużeniu, sztywność zastępcza jest równa:

$x = x_1 = x_2$

$$k_{z2}=k_1+k_2$$

$S = S_1 + S_2$

$k_z \cdot x = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2$

Równanie różniczkowe drgań swobodnych:

$$\ddot{x}+\frac{k_1+k_2}{m}x=0$$

Okres drgań w tym przypadku jest równy:

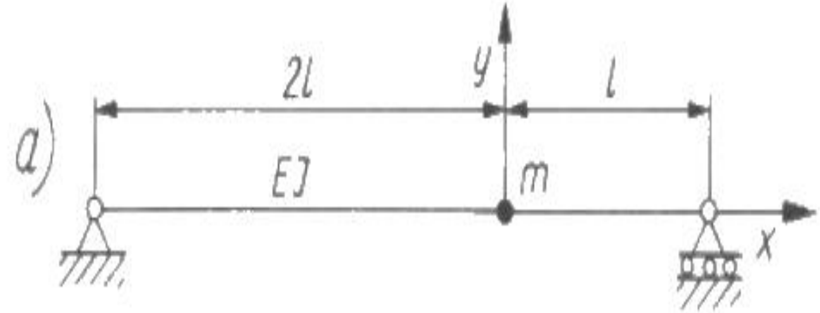
$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

Stosunek okresów rozważanych drgań swobodnych punktu materialnego wynosi:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 k_2}} = (k_1 + k_2)\frac{\sqrt{k_1 k_2}}{k_1 k_2}$$

Przykład 28

Dana jest nieważka belka o długości *3l* z masą skupioną *m*. Obliczyć okres drgań belki *T*, jeżeli jej sztywność giętna wynosi *EJ*.



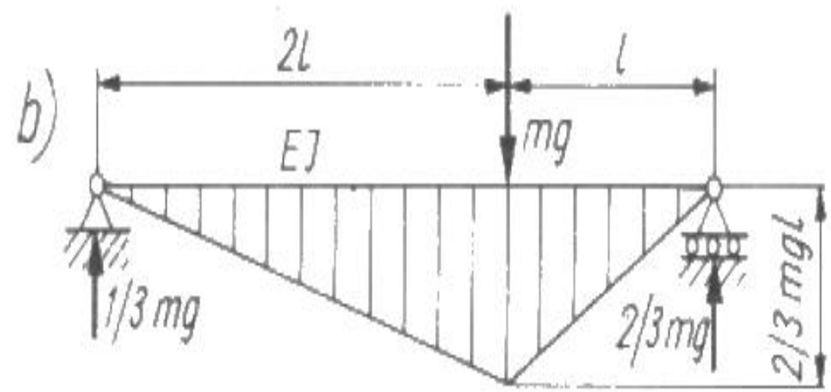
Rozwiązanie

Dynamiczne równanie ruchu masy *m*

$$m \cdot \ddot{y} = -k \cdot y$$

Współczynnik sztywności belki jest równy ilorazowi ciężaru *mg* i strzałki ugięcia f belki w punkcie przyłożenia ciężaru

$$k = \frac{mg}{f}$$



Wartość strzałki ugięcia f belki wyznaczona metodą Mohra wynosi:

$$f = mg\frac{4l^3}{9EJ}$$

stąd

$$k = \frac{9EJ}{4l^3}$$

Stąd równanie różniczkowe drgań swobodnych belki możemy zapisać:

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

gdzie częstość drgań własnych ω_n belki:

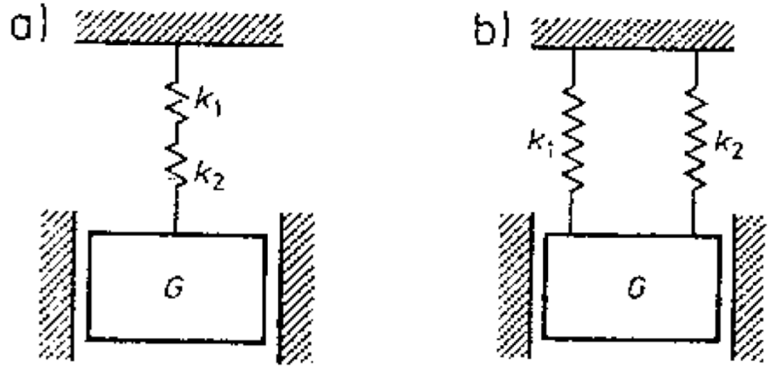
$$\omega_n = \sqrt{\frac{9EJ}{4l^3 m}}$$

stąd okres drgań *T*:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4l^3 m}{9EJ}}$$

Zadanie

Wyznaczyć sztywności zastępcze oraz równania ruchu ciała o ciężarze *G* = 150 N zawieszonego na sprężynach o sztywnościach $k_1 = 2 \cdot 10^3$ N/m i $k_2 = 8 \cdot 10^3$ N/m w sposób zilustrowany na rys.



Rozpatrując warunek równowagi sił działających na ciało, dla obydwu przy-padków zamocowań otrzymujemy:

$$m \cdot \ddot{y} + k_z y = 0$$

Sztywności zastępcze sprężyn wynoszą przypadek:

a)

$$\frac{1}{k_z} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

b)

$$k_z = k_1 + k_2$$

a) $$k_z=\frac{k_1\cdot k_2}{k_1+k_2}=\frac{2\cdot 10^3\ \frac{N}{m}\cdot 8\cdot 10^3\ \frac{N}{m}}{2\cdot 10^3\ \frac{N}{m}+8\cdot 10^3\ \frac{N}{m}}=1{,}6\cdot 10^3\ \frac{N}{m}$$

b) $$k_z=k_1+k_2=2\cdot 10^3\ \frac{N}{m}+8\cdot 10^3\ \frac{N}{m}=1{,}0\cdot 10^4\ \frac{N}{m}$$

a) $$\ddot{y}+\frac{g}{G}\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}y=0$$ $$\ddot{y}+104{,}64\frac{1}{s^2}y=0$$

b) $$\ddot{y}+\frac{g}{G}\left(k_1+k_2\right)y=0$$ $$\ddot{y}+654\frac{1}{s^2}y=0$$

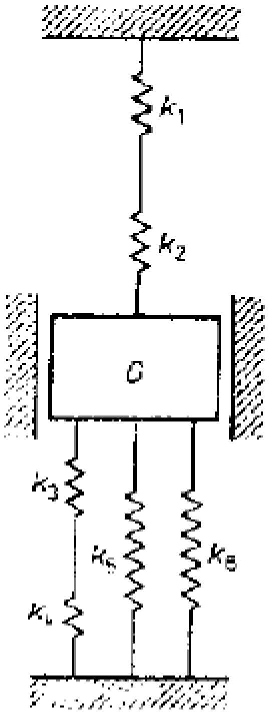
$\omega_n=\sqrt{104{,}64}$ $\omega_n=\sqrt{654}$

$\omega_n=10{,}23\ 1/s$ $\omega_n=25{,}57\ 1/s$

Zadanie

Wyznaczyć sztywność zastępczą sprężyny oraz równanie ruchu ciała o ciężarze G = 500 N pokazanego na rys. Sztywności poszczególnych sprężyn wynoszą:

$k_1 = 3\cdot10^4$ N/m; $k_2 = 5\cdot10^3$ N/m; $k_3 = 6\cdot10^3$ N/m; $k_4 = 8\cdot10^3$ N/m
$k_5 = 1\cdot10^4$ N/m; $k_6 = 2\cdot10^4$ N/m;



Potraktujmy omawiany przypadek połączenia łączników sprężystych jako rów-noległe. Elementami składowymi połączenia są łączniki sprężyste o wartościach sztywności k_6, k_5 oraz częściowych sztywnościach zastępczych k_{z1} , k_{z2} Częściowe sztywności zastępcze określone są wzorami:

$$k_{z1} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \qquad k_{z2} = \frac{k_3 \cdot k_4}{k_3 + k_4}$$

$$k_z = k_{z1} + k_{z2} + k_5 + k_6 = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_3 \cdot k_4}{k_3 + k_4} + k_5 + k_6$$

$$k_z = \frac{3\cdot10^4\,\frac{N}{m}\cdot5\cdot10^3\,\frac{N}{m}}{3\cdot10^4\,\frac{N}{m}+5\cdot10^3\,\frac{N}{m}} + \frac{6\cdot10^3\,\frac{N}{m}\cdot8\cdot10^3\,\frac{N}{m}}{6\cdot10^3\,\frac{N}{m}+8\cdot10^3\,\frac{N}{m}} + 1\cdot10^4\,\frac{N}{m} + 2\cdot10^4\,\frac{N}{m} = 3{,}77\cdot10^4\,\frac{N}{m}$$

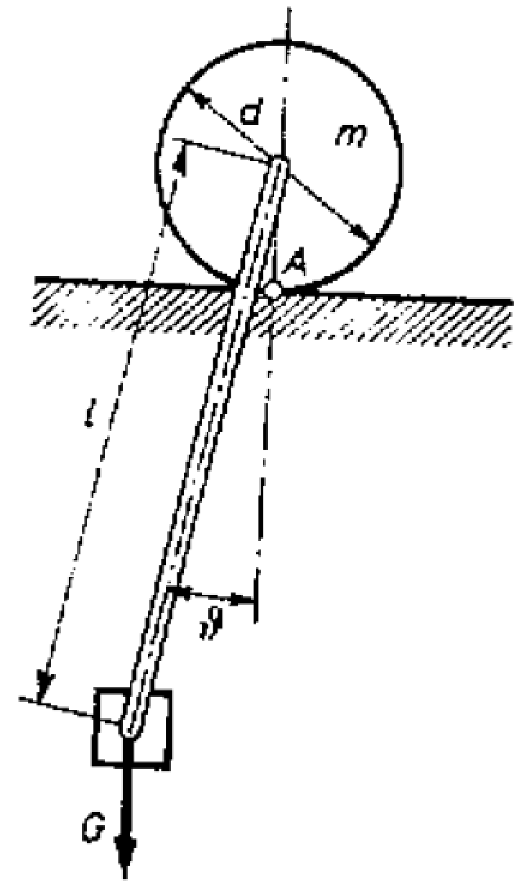
$$\ddot{y} + \frac{g}{G}\,k_z\cdot y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{500\,N}\,3{,}77\cdot10^4\,\frac{N}{m}\cdot y = 0$$

$$\ddot{y} + 739{,}674\,\frac{1}{s^2}\cdot y = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{739{,}674} = 27{,}2\ 1/s \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0{,}23\ s$$

2.7. Na jednym końcu sztywnego pręta o długości $l = 1$ m zamocowano ciało o ciężarze $G = 100$ N. Drugi koniec pręta połączono sztywno z osią walca o rednicy $d = 0{,}4$ m i masie $m = 20$ kg (rys. 2.11). Wyznaczyć równanie ruchu ciała w tak zbudowanym modelu przyjmując, że słuszne są związki $\sin\vartheta \approx \vartheta$, $\cos\vartheta \approx 1$.



Stosując prawo krętu otrzymamy następującą zależność:

$$-Gl\sin\vartheta \cong -Gl\vartheta = I_A\ddot{\vartheta}.$$

Moment bezwładności układu obliczony względem punktu A wynosi

$$I_A = \frac{1}{2}m\frac{d^2}{4} + m\frac{d^2}{4} + \frac{G}{g}z^2,$$

gdzie

$$z^2 = l^2 + \frac{d^2}{4} - dl\cos\vartheta = l^2 + \frac{d^2}{4} - dl = \left(l - \frac{d}{2}\right)^2.$$

Tak więc

$$I_A = \frac{3}{8}md^2 + \frac{G}{g}\left(l - \frac{d}{2}\right)^2.$$

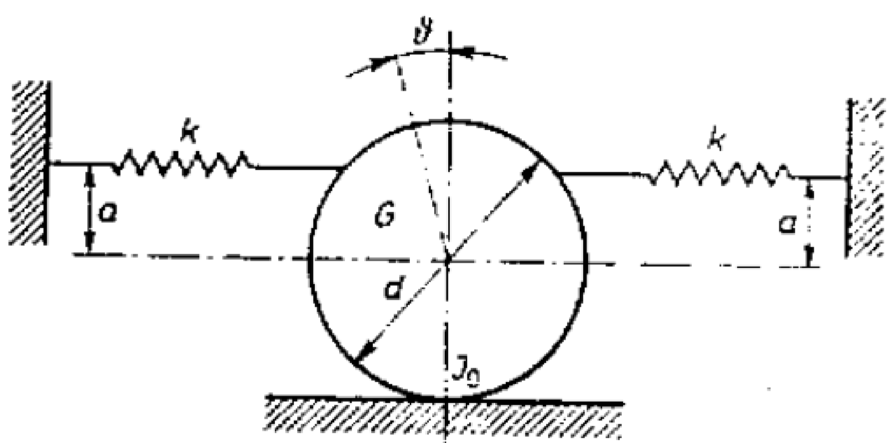
Równanie ruchu ciała jest następujące:

$$\ddot{\vartheta}+\frac{Gl}{\frac{3}{8}md^2+\frac{G}{g}\left(l-\frac{d}{2}\right)^2}\vartheta=0.$$

Wstawiając dane liczbowe otrzymujemy

$$\ddot{\vartheta}+\frac{10^2\cdot 1}{\frac{3}{8}\cdot 2\cdot 10\cdot 4^2\cdot 10^{-2}+\frac{100}{9{,}81}(1-2\cdot 10^{-1})^2}\vartheta=0, \qquad \text{stąd} \qquad \ddot{\vartheta}+12{,}94\vartheta=0.$$

2.8. Wyznaczyć równanie ruchu walca o ciężarze $G = 200$ N i średnicy $d = 0{,}5$ m, który umieszczony jest na poziomej płaszczyźnie i połączony w sposób zilustrowany na rys. 2.12 za pomocą dwóch jednakowych sprężyn o sztywności $k = 2 \cdot 10^3 \ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$ z dwiema równoległymi ścianami. Sprężyny zamocowane są w połowie długości walca na wysokości $a = 0{,}15$ m nad jego osią. Drgania walca są tak małe, że można przyjąć, iż $\sin \vartheta \approx \vartheta$; tarcie pominąć.



Rys. 2.12

Zauważmy, że obrót walca o mały kąt ϑ powoduje przemieszczenie jego środka o wartości $x = \frac{d}{2}\vartheta$. Koniec dźwigni przemieszcza się wówczas o wartość $x_1 = \vartheta l - x = \vartheta\left(l - \frac{d}{2}\right)$.

Całkowita energia kinetyczna układu jest sumą energii walca oraz dźwigni o ciężarze G_1. Określa ją wyrażenie

$$E = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{d^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{d^2}{8}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{d^2}{4}\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{G_1 l^2}{3g}\dot{\vartheta}^2 - \frac{G_1}{g}\frac{ld}{4}\dot{\vartheta}^2,$$

gdzie $\frac{Gd^2}{8g}$, $\frac{G_1 l^2}{12}$ – momenty bezwładności analizowanych ciał.

Zmiana energii potencjalnej jest wynikiem działania sprężyn oraz podniesienia się punktów ciała o ciężarze G_1.

$$V = \frac{2kx_1^2}{2} + G_1 \frac{1}{2} l(1 - \cos\vartheta).$$

Wstawiając wyznaczoną wcześniej wartość przemieszczenia końca dźwigni oraz zastępując funkcję trygonometryczną w nawiasie funkcją sinus kąta połówkowego i uwzględniając warunek małych drgań ($\sin\vartheta \approx \vartheta$) otrzymujemy

$$V = \left[k\left(l - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} G_1 l\right]\vartheta^2.$$

Poszukując ostatecznej postaci równań ruchu, wykorzystajmy postać (2.26) równań Lagrange'a. Obliczamy składniki sumy wzoru (2.26)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \frac{G}{g}\frac{d^2}{4}\ddot{\vartheta} + \frac{G}{g}\frac{d^2}{8}\ddot{\vartheta} + \frac{G_1}{g}\frac{d^2}{4}\ddot{\vartheta} + \frac{G_1 l^2}{3g}\ddot{\vartheta} - \frac{G_1}{g}\frac{ld}{2}\ddot{\vartheta}$$

lub po uporządkowaniu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \frac{1}{24g}\left[3(3G + 2G_1)d^2 + 4G_1 l(2l - 3d)\right]\ddot{\vartheta}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \left[2k\left(l - \frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} G_1 l\right]\vartheta.$$

Równanie ruchu układu jest więc następujące:

$$\ddot{\vartheta} + g\,\frac{48k\left(l - \dfrac{d}{2}\right)^2 + 12G_1 l}{3(3G + 2G_1)d^2 + 4G_1 l(2l - 3d)}\,\vartheta = 0.$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy

$$\ddot{\vartheta}+9{,}81\,\frac{48\cdot 10^{3}\left(1-\dfrac{4\cdot 10^{-1}}{2}\right)^{2}+12\cdot 10\cdot 1}{3(3\cdot 5\cdot 10+2\cdot 3\cdot 10)\,4^{2}\cdot 10^{-2}+4\cdot 3\cdot 10(2\cdot 1-3\cdot 4\cdot 10^{-1})}\,\vartheta=0.$$

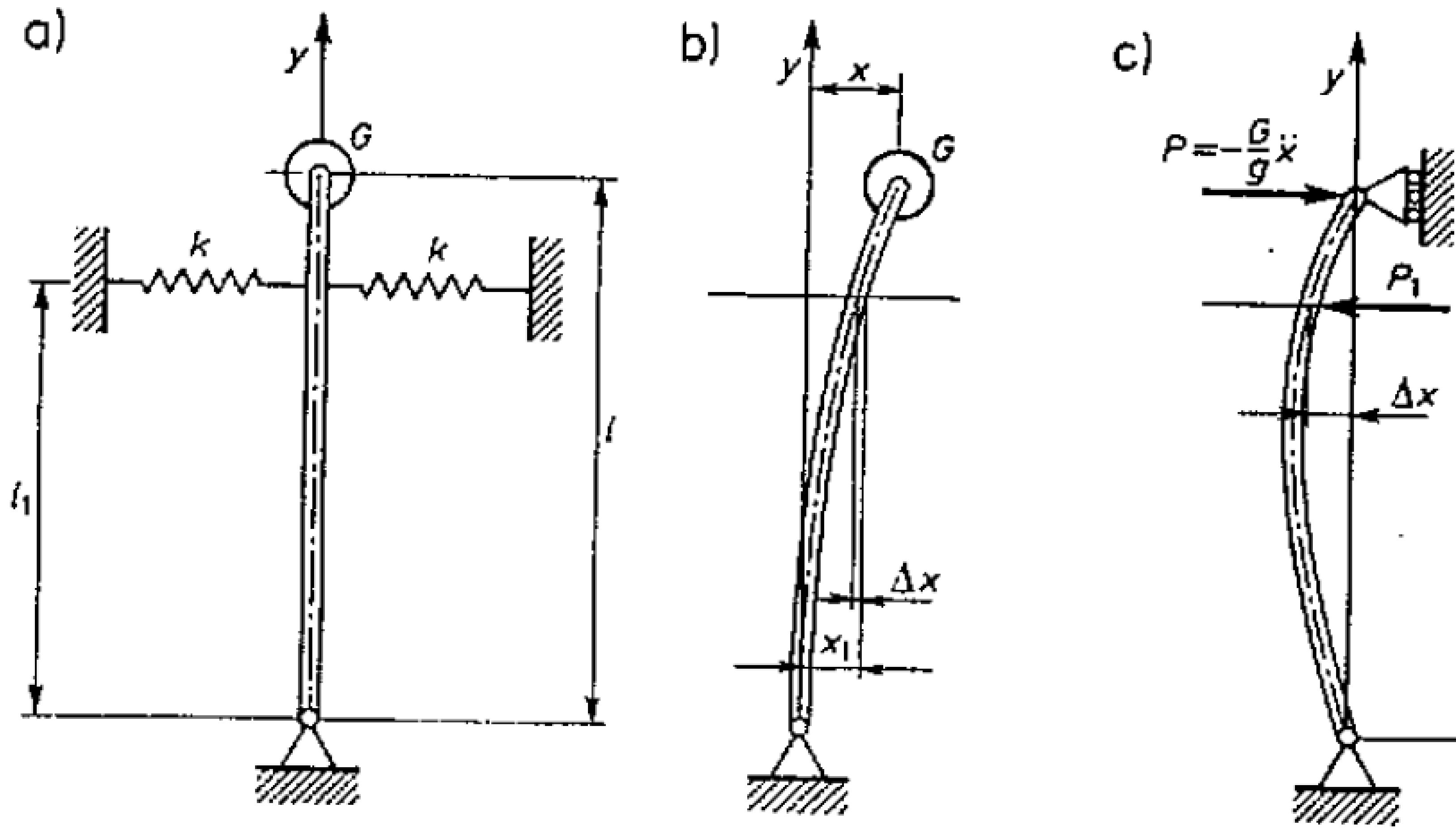
Ostatecznie

$$\ddot{\vartheta}+1549{,}26\vartheta=0.$$

2.11. Wyznaczyć równanie ruchu ciała o ciężarze $G=10$ N, zamocowanego n końcu stalowego pręta o długości $l=1{,}5$ m i momencie bezwładności $J=1{,}45\cdot 10^{-4}$ m^4 oraz module sprężystości $E=2{,}1\cdot 10^{11}$ N/m^2. W odległości $l_1=1$ m od przegubu pręt za pomocą sprężyn o sztywności $k=2\cdot 10^{3}$ N/m zost połączony ze ścianami w sposób zilustrowany na rys. 2.15.

Rozpatrzmy warunki równowagi pręta wychylonego. W czasie wychyleni pręta (rys. 2.15b) równanie równowagi momentów od sił działających jest następu jące:

$$-Pl-Gx+P_1\,l_1=0.$$



Rys. 2.15

Ponieważ $P_1 = 2k(x_1 - \Delta x)$ oraz $\frac{x}{l} = \frac{x_1}{l_1}$ otrzymujemy $P_1 = 2k\left(x\frac{l_1}{l} - \Delta)\right)$.

Nieznaną wielkością w powyższym wyrażeniu jest jeszcze Δx. Ugięcie to (rys. 2.15c) pochodzące bezpośrednio od siły P_1 można określić za pomocą wzoru

$$\Delta x = \frac{Pl_1(l-l_1)^2}{3EJ_x}\ddot{x}.$$

Wstawiając w miejsce siły P wartość $P = -\frac{G}{g}\ddot{x}$ otrzymamy

$$\Delta x = -\frac{G}{g}\frac{l_1(l-l_1)^2}{3EJ_x}\ddot{x}.$$

Uwzględniając, że $P_1 l_1 = Pl$ i wstawiając do równania równowagi momentów sił wyznaczone wielkości otrzymujemy wyrażenie

$$\frac{G}{g}l\ddot{x} + 2kl_1\left[x\frac{l_1}{l} + \frac{G}{g}\ddot{x}\frac{l_1(l-l_1)^2}{3EJ_x}\right] - Gx = 0$$

lub po uporządkowaniu

$$\ddot{x}+\frac{2k\frac{l_1^2}{l}-G}{\frac{G}{g}l\left[1+2k\frac{l_1^2(l-l_1)^2}{3EJ_x l}\right]}x=0.$$

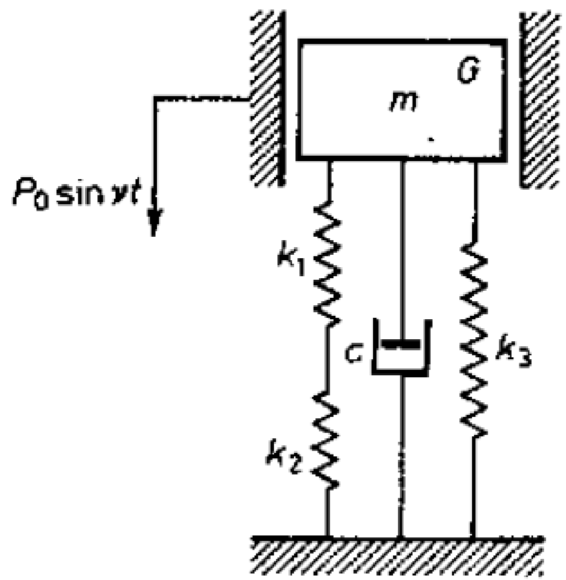
Wstawiając dane liczbowe mamy

$$\ddot{x}+\frac{2\cdot 2\cdot 10^3\cdot\frac{1}{1,5}-10}{\frac{10}{9,81}\cdot 1,5\left[1+2\cdot 2\cdot 10^3\frac{1^2(1,5-1)^2}{3\cdot 2,1\cdot 10^{11}\cdot 1,45\cdot 10^{-4}\cdot 1,5}\right]}x=0.$$

Stąd

$$\ddot{x}+1737,5x=0.$$

2.18. Ciało o ciężarze $G = 10$ N zostało zawieszone na sprężynach w spo zilustrowany na rys. 2.22. Na ciało działa sinusoidalnie zmienna, z częstości $= 25 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, siła $P_0 = 50$ N. Przyjmując, że współczynniki sztywności łącznik sprężystych wynoszą: $k_1 = 10^3$ N/m, $k_2 = 2 \cdot 10^3$ N/m, $k_3 = 3 \cdot 10^3$ N/m, a ws czynnik tłumienia wiskotycznego tłumika $c = 50$ N·s/m; wyznaczyć równa ruchu.



Rys. 2.22

Niech współrzędna uogólniona x oznacza przemieszczenie ciała o ciężarze
Sztywność zastępcza układu wynosi

$$k_z = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_3 .$$

Korzystając z metody Newtona wyznaczmy warunek równowagi sił (2.27) działa-
cych na ciało

$$0 = -\sum \frac{G}{g}\ddot{x} - k_z(x + x_{st}) + mg - c\dot{x} + P_0 \sin vt, \quad / \cdot \frac{G}{g} \quad \text{gdzie} \quad x_{st} = \frac{G}{k_z}.$$

Porządkując otrzymujemy

$$\ddot{x} + \frac{g}{G}c\dot{x} + \frac{g}{G}k_z x = \cancel{P_0} \sin vt$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{G}c\dot{x} + \frac{g}{G}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + k_3\right)x = P_0 \sin vt \qquad \frac{g}{G} \cdot P_0 = P_0$$

Wstawiając dane liczbowe mamy

$$\ddot{x} + \frac{9{,}81}{10} \cdot 50\dot{x} + \frac{9{,}81}{10}\left(\frac{10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{10^3 + 2 \cdot 10^3} + 3 \cdot 10^3\right)x = 50 \sin 25t .$$

$49{,}05 - 9{,}81$

Stąd

$$\ddot{x} + 49{,}05\dot{x} + 3597x = 50 \sin 25t .$$

2.29. Dwa ciała o ciężarze $G_1 = 50$ N, $G_2 = 30$ N zostały połączone za pomocą łączników sprężystych o sztywnościach $k = k_1 = k_3 = 5 \cdot 10^3$ N/m oraz $k_2 = 10^3$ N/m w sposób zilustrowany na rys. 2.33a. Wyznaczyć równania ruchu ciał układu.

Rozpatrzmy warunek równowagi sił działających na każde z ciał (rys. 2.33b)

$$-\frac{G_1}{g}\ddot{x}_1 - k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) = 0,$$

$$-\frac{G_2}{g}\ddot{x}_2 - k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) = 0.$$

Porządkując, otrzymujemy

$$\ddot{x}_1 + \frac{g}{G_1} k x_1 + \frac{g}{G_1} k_2 (x_1 - x_2) = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{g}{G_2} k x_2 + \frac{g}{G_2} k_2 (x_2 - x_1) = 0.$$

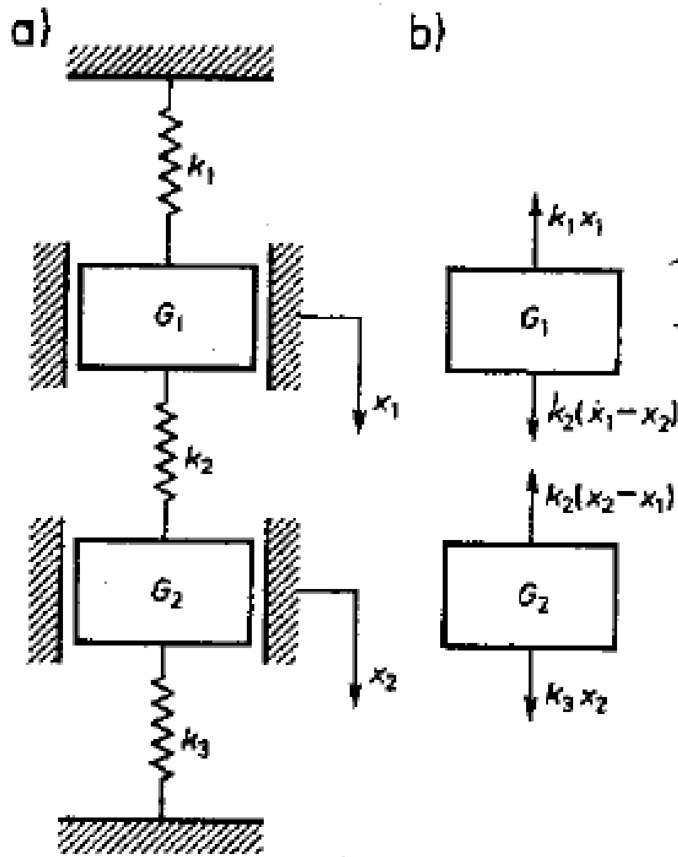
Uwzględniając wartości parametrów danych mamy

$$\ddot{x}_1+\frac{9{,}81}{50}5\cdot 10^3\,x_1+\frac{9{,}81}{50}10^3(x_1-x_2)=0; \quad \text{stąd} \quad \ddot{x}_1+1177{,}3x_1-196{,}3x_2=0,$$

$$\ddot{x}_2+\frac{9{,}81}{30}5\cdot 10^3\,x_2+\frac{9{,}81}{30}10^3(x_2-x_1)=0;$$

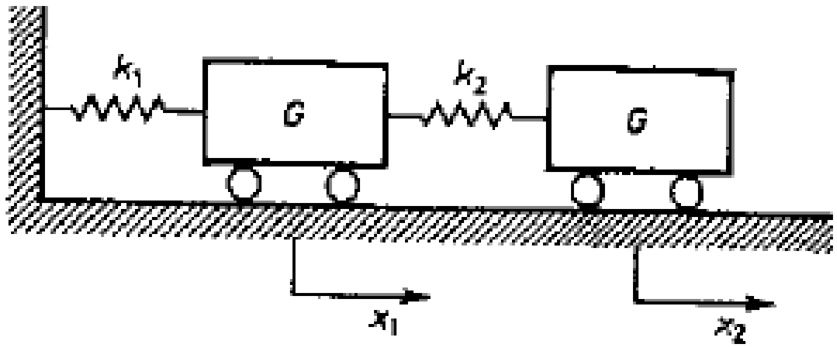
stąd

$$\ddot{x}_2+1962x_2-327x_1=0.$$



Rys. 2.33

2.31. Wyznaczyć równanie ruchu układu złożonego z dwu ciał, każde o ciężarze $G = 10$ N Ciała połączone są między sobą sprężyną o sztywności $k_2 = 10^3$ N/m, ciało pierwsze jest zamocowane do ściany za pomocą sprężyny o sztywności $k_1 = 10^4$ N/m (rys. 2.35).



Rys. 2.35

Przedstawiony na rys. 2.35 układ posiada dwa stopnie swobody. Przyjmijmy za współrzędne uogólnione x_1, x_2 i wykorzystajmy równania Lagrange'a

$$E = \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}\frac{G}{g}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2), \qquad V = \frac{1}{2}[k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2],$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{G}{g}\ddot{x}_1, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{G}{g}\ddot{x}_2, \qquad \frac{\partial E}{\partial x_1} = \frac{\partial E}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1), \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k_2 (x_2 - x_1).$$

Podstawiając mamy

$$\frac{G}{g}\ddot{x}_1+(k_2+k_1)\,x_1-k_2\,x_2=0,$$

$$\frac{G}{g}\ddot{x}_2+k_2\,x_2-k_2\,x_1=0$$

lub w odniesieniu do jednostki masy

$$\ddot{x}_1+\frac{g\,(k_1+k_2)}{G}x_1-\frac{gk_2}{G}x_2=0,$$

$$\ddot{x}_2+\frac{gk_2}{G}x_2-\frac{gk_2}{G}x_1=0.$$

Uwzględniając dane zadania otrzymujemy

$$\ddot{x}_1+\frac{9{,}81\,(10^4+5\cdot10^3)}{10}x_1-\frac{9{,}81\cdot5\cdot10^3}{10}x_2=0,$$

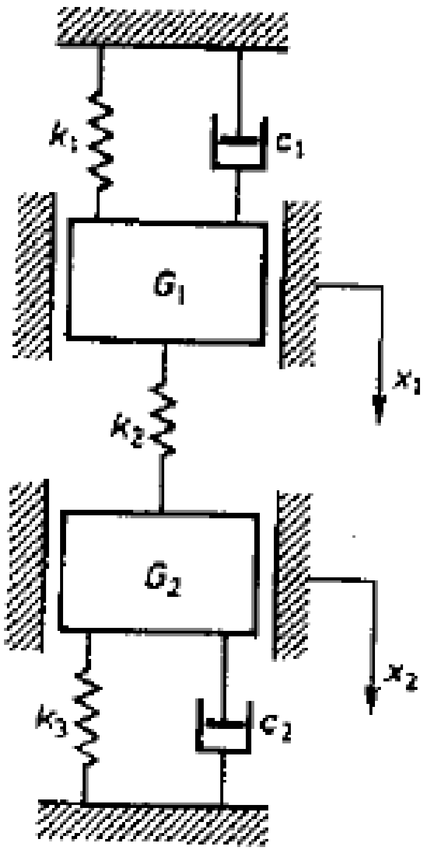
$$\ddot{x}_2+\frac{9{,}81\cdot5\cdot10^3}{10}x_2-\frac{9{,}81\cdot5\cdot10^3}{10}x_1=0.$$

Mamy więc

$$\ddot{x}_1+14715x_1-4905x_2=0,$$

$$\ddot{x}_2+4905x_2-4905x_1=0.$$

2.33. Dwa ciała o ciężarze $G_1 = 30$ N i $G_2 = 50$ N zostały połączone za pomocą łączników sprężystych o sztywnościach $k_1 = 10^4$ N/m i $k_3 = 2 \cdot 10^4$ N/m ze ścianami oraz za pomocą sprężyny o sztywności $k_2 = 5 \cdot 10^4$ N/m między sobą. Jednocześnie ciała te połączono ze ścianami stosując tłumiki drgań z których jeden charakteryzuje się współczynnikiem tłumienia $c_1 = 10^3$ N·s/m, a drugi współczynnikiem $c_2 = 2 \cdot 10^3$ N·s/m (rys. 2.37). Wyznaczyć równania ruchu układu.



Rys. 2.37

Rozwiązując zadanie skorzystamy z metody Lagrange'a wykorzystując postać (2.16) równań. Energię kinetyczną układu określa zależność

$$E = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}\dot{x}_2^2,$$

a energię potencjalną związek

$$V = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_3 x_2^2.$$

Funkcja dysypacji przyjmie postać

C2

$$D = \frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}c_2\dot{x}_2^2$$

Wyznaczmy kolejne składniki równań Lagrange'a

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} = \frac{G_1}{g}\dot{x}_1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{G_1}{g}\ddot{x}_1, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2} = \frac{G_2}{g}\dot{x}_2, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{G_2}{g}\ddot{x}_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_2 x_1 - k_2 x_2, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k_2 x_2 - k_2 x_1 + k_3 x_2, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = c_1\dot{x}_1,$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = c_2\dot{x}_2.$$

Wykorzystując postać (2.25) otrzymujemy

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1 g}{G_1}\dot{x}_1 + \frac{g(k_1+k_2)}{G_1}x_1 - \frac{gk_2}{G_1}x_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{c_2 g}{G_2}\dot{x}_2 + \frac{g(k_2+k_3)}{G_2}x_2 - \frac{gk_2}{G_2}x_1 = 0.$$

Wstawiając wartości parametrów danych mamy

$$\ddot{x}_1 + \frac{10^3 \cdot 9{,}81}{30}\dot{x}_1 - \frac{9{,}81\,(5 \cdot 10^4 + 10^4)}{30}x_1 - \frac{9{,}81 \cdot 5 \cdot 10^4}{30}x_2 = 0,$$

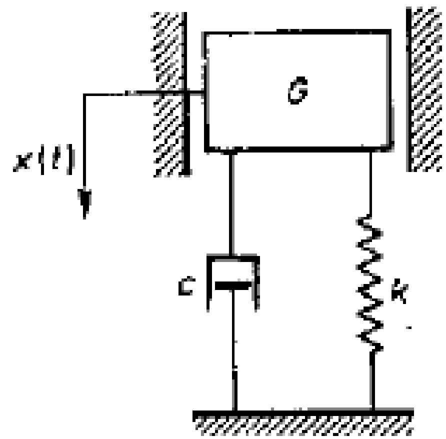
$$\ddot{x}_2 + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}{50}\dot{x}_2 + \frac{9{,}81\,(2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4)}{50}x_2 - \frac{9{,}81 \cdot 5 \cdot 10^4}{50}x_1 = 0$$

lub

$$\ddot{x}_1 + 327\dot{x}_1 + 19620x_1 - 16350x_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + 39{,}4\dot{x}_2 + 13734x_2 - 9810x_1 = 0.$$

4.10. Ciału o ciężarze $G = 200$ N zamocowanemu do podłoża poprzez łączniki sprężyste i tłumiący w sposób zilustrowany na rys. 4.8 nadano prędkość początkową $v_0 = 0{,}1$ m/s. Przyjmując, że sztywność sprężyny wynosi $k = 4{,}5 \cdot 10^3$ N/m, współczynnik tłumienia $c = 150$ N·s/m wyznaczyć częstość kołową drgań tłumionych, przemieszczenie oraz prędkość ciała.



Rys. 4.8

Równanie ruchu ciała ma postać (4.12), gdzie

$$h = \frac{cg}{2G} = \frac{150 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 200} = 3{,}67\ 1/\text{s}, \qquad \omega_0^2 = \frac{kg}{G} = \frac{4{,}5 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}{200} = 220{,}7\ 1/\text{s}^2.$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{4.12}$$

Równanie przedstawia więc małe drgania harmoniczne o małym tłumieniu. Mamy bowiem $h < \omega_0$ oraz $\omega^2 = \omega_0^2 - h^2 > 0$.

Rozwiązanie ogólne równania ruchu, określające przemieszczenia ciała, ma postać (4.14). Prędkość ciała opisana jest zależnością

$$\dot{x}(t) = e^{-ht}[-h(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \omega(B\cos\omega t - A\sin\omega t)].$$

Uwzględniając warunki początkowe ruchu, czyli dla $t = 0$, $x = 0$ oraz $\dot{x} = v_0$ wyznaczymy stałe

$$A = 0, \qquad B = \frac{v_0}{\omega}.$$

Wstawiając otrzymane zależności do wzorów uprzednio podanych, otrzymujemy przemieszczenie

$$x(t) = e^{-ht}\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t = 0{,}0067e^{-3{,}68t}\sin 14{,}4t,$$

prędkość

$$\dot{x}(t) = e^{-3{,}68t}(0{,}1\cos 14{,}4t - 0{,}024\sin 14{,}4t).$$

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \qquad (4.14)$$