MECHANIKA ANALITYCZNA

Więzy, Zasada prac przygotowanych

LECH MURAWSKI

l.murawski@wm.umg.edu.pl

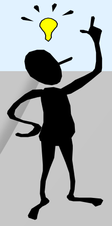
pok. A213

Mechanika Analityczna

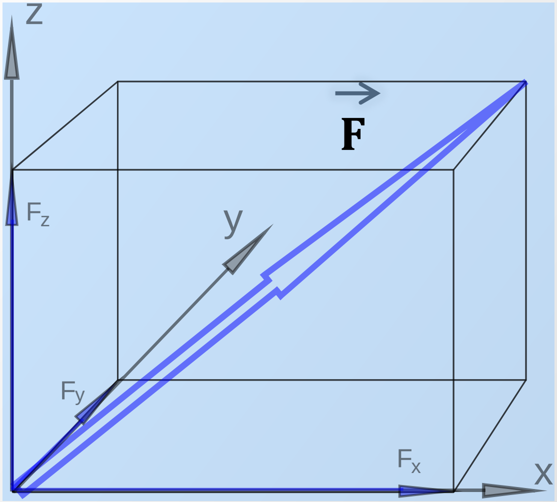
Mechanika analityczna wykorzystuje zalety więzów układów mechanicznych do rozwiązania problemu. Więzy ograniczają liczbę stopni swobody układu więc mogą być wykorzystane do zredukowania liczby równań ruchu. Wymaga to jednak zdefiniowania współrzędnych uogólnionych w których wyrażone są wszystkie wielkości takie jak energia potencjalna i kinetyczna lub siły uogólnione.

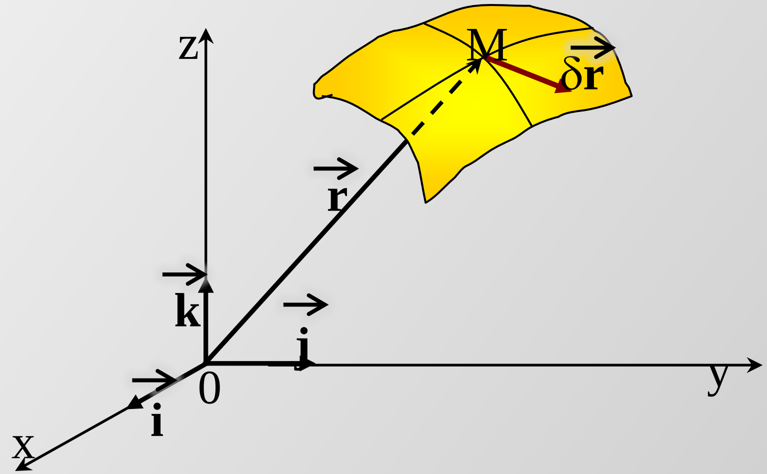
Mechanika analityczna może się opierać na dwóch podstawowych podejściach: równaniach Lagrange (Lagrangian oparty o uogólnione prędkości w przestrzeni konfiguracyjnej) lub równaniach Hamiltona (Hamiltonian oparty o współrzędne i odpowiadające im momenty w przestrzeni fazowej). Oba podejścia są równoważne.

Mechanika analityczna nie wprowadza nowych praw fizyki! Nie jest też uogólnieniem mechaniki klasycznej. Jest to zbiór równoważnych formalizmów w opisie zjawisk mechanicznych.



Równania ruchu w układzie Kartezjańskim





$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$F_x = m \cdot a_x$$
$$F_y = m \cdot a_y$$
$$F_z = m \cdot a_z$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$
$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$
$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

$\Rightarrow$

$$F_x = m \cdot \ddot{x}$$
$$F_y = m \cdot \ddot{y}$$
$$F_z = m \cdot \ddot{z}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = m \cdot \ddot{x}$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = m \cdot \ddot{y}$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = m \cdot \ddot{z}$$

Powyższe równania to równania różniczkowe ruchu punktu materialnego w prostokątnym układzie współrzędnych; ale mamy też inne układy odniesienia!

Mechanika Analityczna

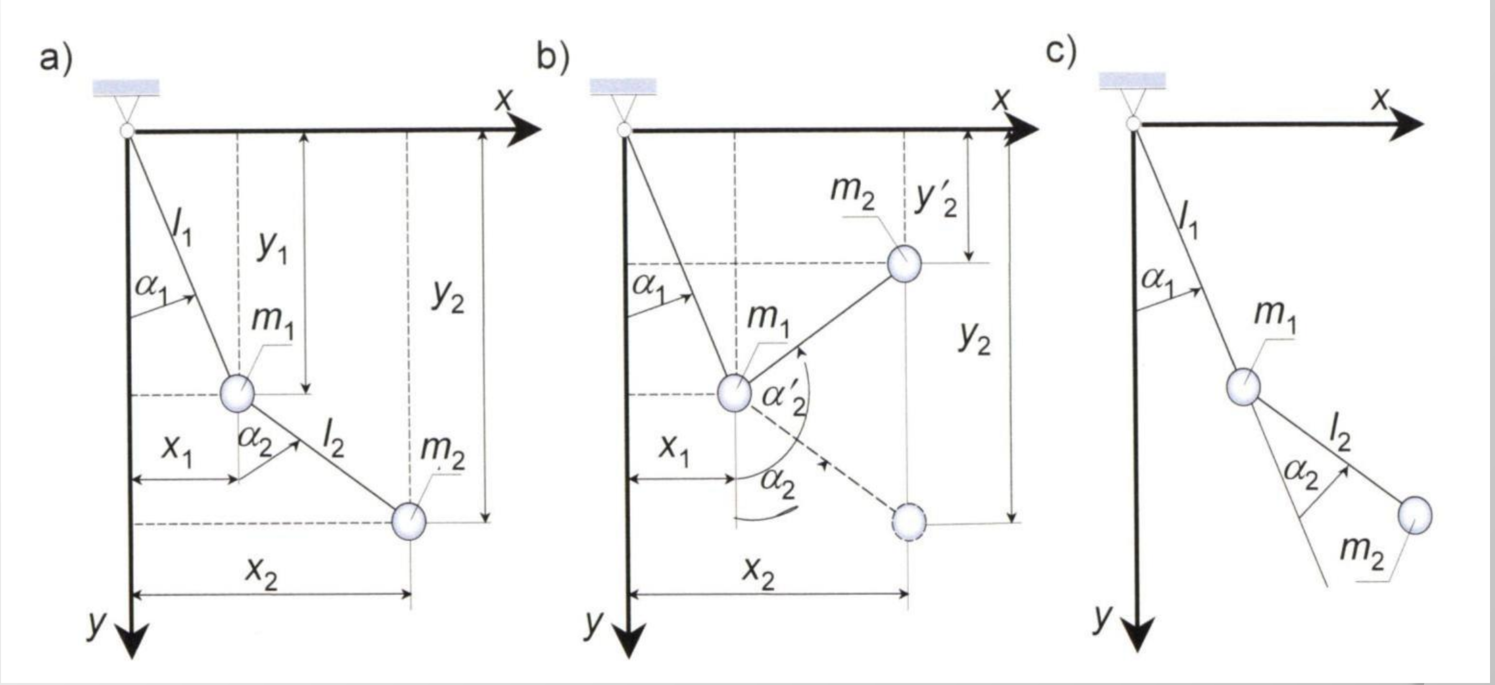
Mechanika analityczna zajmuje się badaniem właściwości równań ruchu układów mechanicznych, uwarunkowanych szczególną ich postacią. W mechanice analitycznej operuje się szerszym zakresem analizy matematycznej niż ma to zazwyczaj miejsce w innych działach mechaniki klasycznej.
Mechanika analityczna rozpatruje ogólne zasady mechaniki; wyprowadzenie z nich podstawowych równań różniczkowych ruchu i metody ich całkowania. Dynamika analityczna posiada własne metody badań, przydatne do rozwiązywania złożonych zadań mechaniki, a także zadań innych działów fizyki.

Przemieszczenia niektórych punktów nieswobodnego układu materialnego nie mogą być dowolne z powodu działających na nie ograniczeń ruchu w postaci więzów. Oznacza to, że nie wszystkie współrzędne punktów są od siebie niezależne. Położenie punktów układu nieswobodnego jednoznacznie określają współrzędne niezależne. Pozostałe współrzędne można obliczyć z równań więzów:

$$f_\nu\left(x_1, y_1, z_1, \Lambda\ , x_n, y_n, z_n\right) = 0, \qquad \nu = 1,2,\Lambda\ , r$$

Więzem ***nazywa się ograniczenie ruchu nałożone na punkt lub układ punktów materialnych.***

Przykład układu mechanicznego z więzami: podwójne wahadło matematyczne



Podwójne wahadło matematyczne:
a) współrzędne kątowe α_1, α_2 oraz liniowe x_1, y_1, x_2, y_2;
b) różne położenia współrzędnej y_2 masy m_2 *przy tej samej współrzędnej* x_2;
c) przykład innych współrzędnych niezależnych (uogólnionych) $q_1 = \alpha_1$, $q_2 = \alpha_2$

Zależności pomiędzy współrzędnymi:

$x_1 = l_1 \sin \alpha_1$

$y_1 = l_1 \cos \alpha_1$

$x_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin\alpha_2$

$y_2 = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2$

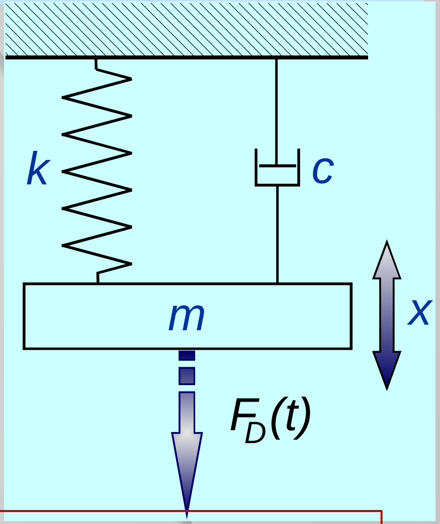
Przykład układu mechanicznego z więzami

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

Siły zewnętrzne
i wynikające z więzów:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$$

$$F(x, \dot{x}, t) = F_1(x) + F_2(\dot{x}) + F_3(t)$$



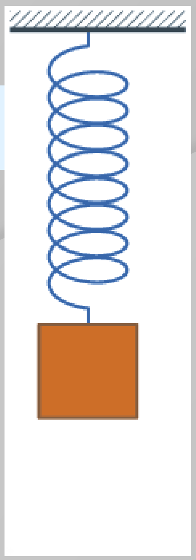
$F_1(x)$ Oddziaływania sprężyste, np. sprężyna

Sztywność: F=k·x

$F_2(\dot{x})$ Opory ruchu liniowego – tłumik drgań

Tłumienie: F=c·dx/dt

$F_3(t) \equiv F_D(t)$ Wymuszenie zewnętrzną siłą zmienną w czasie

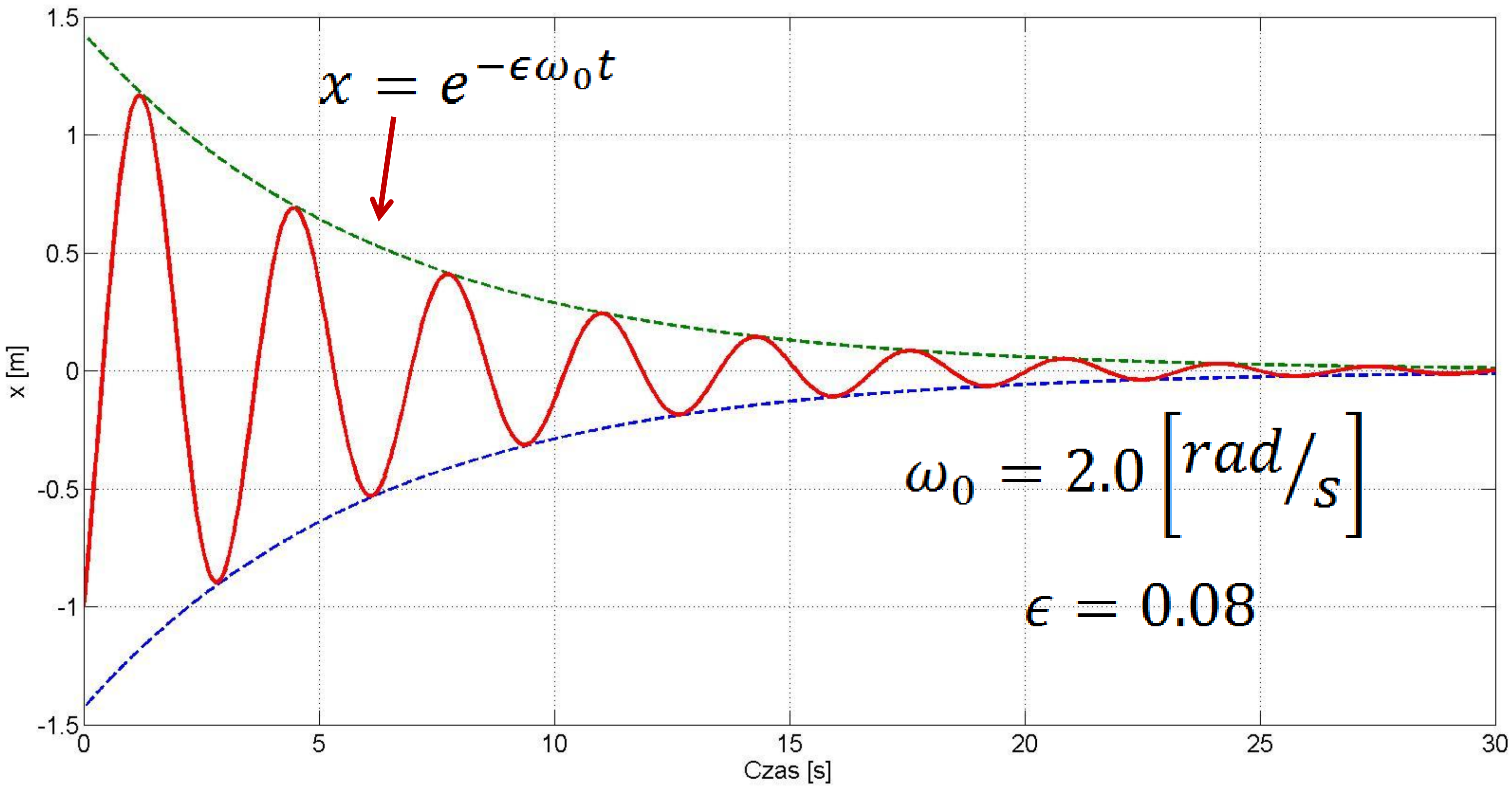


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_D(t)$$

Rozwiązanie dla układu bez zewnętrznych sił wymuszających – drgania własne (małe tłumienie!)

$$c < 2\sqrt{km} \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x = e^{-\epsilon\omega_0 t} \cdot \left\{C_1 sin\left[\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_0 t\right] + C_2 cos\left[\sqrt{1-\epsilon^2}\cdot\omega_0 t\right]\right\}$$



Rozwiązanie dla układu z wymuszeniem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_D(t)$$

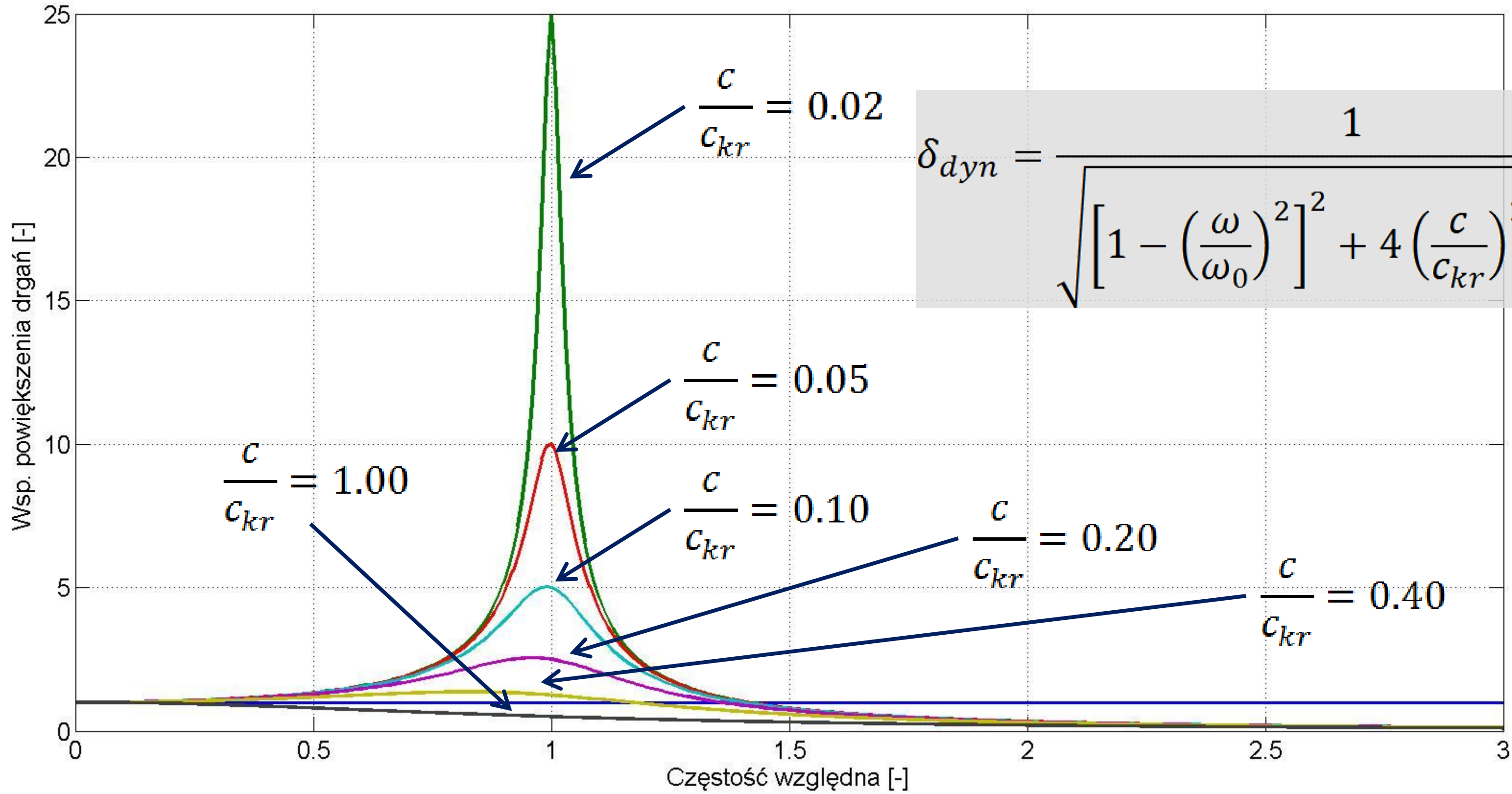
$$A = \frac{\Delta L_{st}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{c}{c_{kr}}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\delta_{dyn} = \frac{A}{\Delta L_{st}}$$

$$\delta_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{c}{c_{kr}}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Drgania wymuszone tłumione

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_D sin(\omega t)$$



$$\delta_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{c}{c_{kr}}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

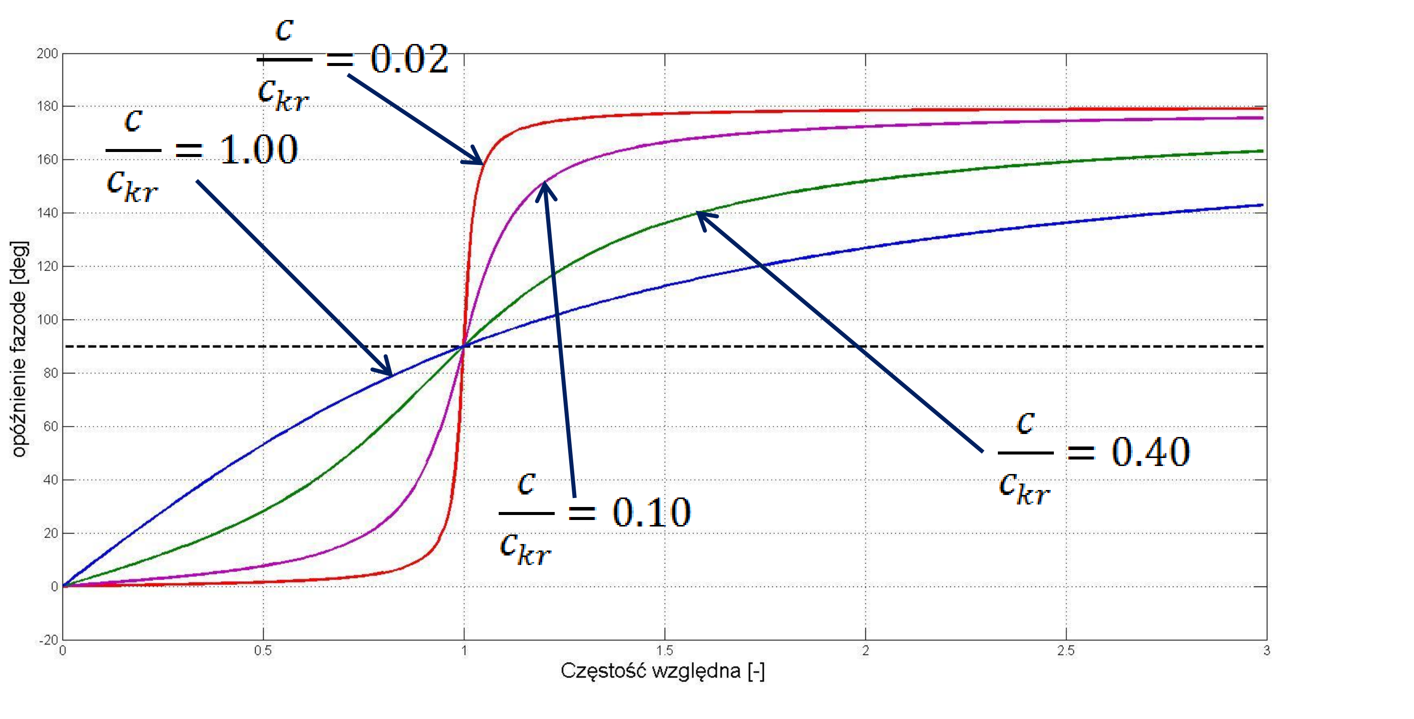
Drgania wymuszone tłumione

$$A = \frac{\Delta L_{st}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{c}{c_{kr}}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\delta_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{c}{c_{kr}}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$tg\varphi = \frac{2\frac{c}{c_{kr}}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$



Więzy

Więzem nazywa się ograniczenie ruchu nałożone na punkt lub układ punktów materialnych.
Rozróżnia się kilka przypadków więzów:

Więzy skleronomiczne **są to więzy niezależne od czasu. W przypadku układu punktów materialnych $M_1, M_2, \ldots, M_n$, których położenie określa się za pomocą współrzędnych prostokątnych, równania takich więzów mają postać:**

$$f_\nu(x_1, y_1, z_1, \Lambda, x_n, y_n, z_n) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \Lambda, r$$

Więzy reonomiczne **są to więzy zależne od czasu. Równania takich więzów mają postać:**

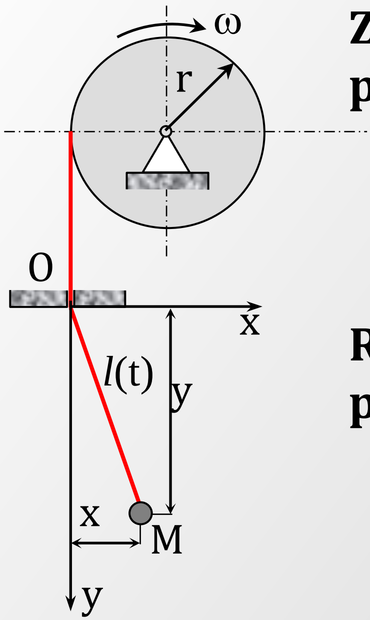
$$f_\nu(x_1, y_1, z_1, \Lambda, x_n, y_n, z_n, t) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \Lambda, r$$

Przykładem takich więzów może być wahadło matematyczne, którego długość l jest daną funkcją czasu. Ma to miejsce wtedy, gdy nić, na której zawieszony jest punkt materialny M, nawijana jest na bęben. Gdy bęben obraca się ruchem jednostajnym, to:

$$l = l_o - r \cdot \omega \cdot t$$

gdzie: l_o – długość początkowa wahadła, ω – prędkość kątowa bębna.

Więzy



Zgodnie z obranym układem współrzędnych równanie więzów przyjmuje postać:

$$x^2 + y^2 - \left(l_o - r \cdot \omega \cdot t\right)^2 = 0$$

Równanie to opisuje więzy reonomiczne, ponieważ czas występuje w postaci jawnej.

Więzy, których równania zawierają współrzędne określające położenie układu, lecz nie zawierają pochodnych tych współrzędnych względem czasu, noszą nazwę więzów holonomicznych.

Z powyższego wynika, że więzami holonomicznymi są więzy skleronomiczne i reonomiczne.

Więzy

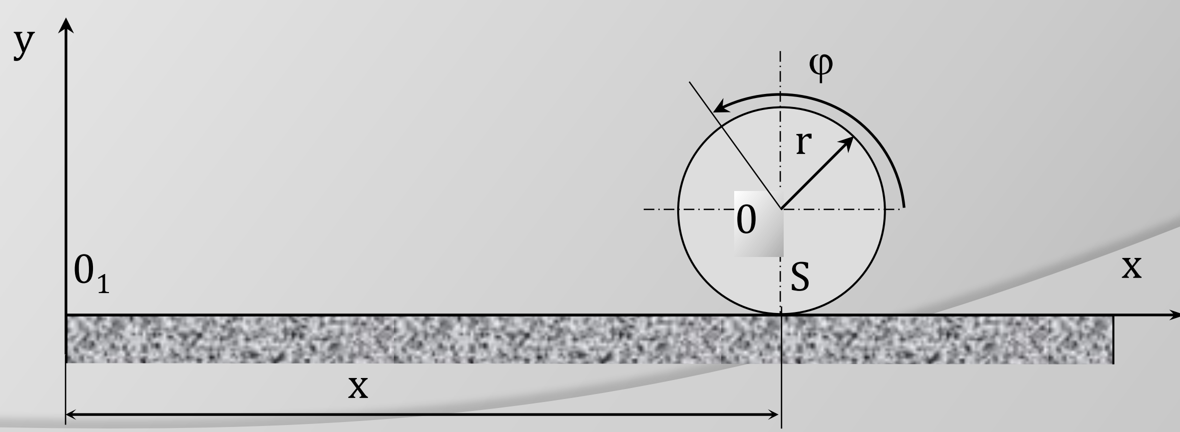
Więzy, których równania, oprócz współrzędnych określających położenie układu, zawierają pochodne tych współrzędnych względem czasu, noszą nazwę **wiezów nieholonomicznych (anholonomicznych)**:

$$f_\nu\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t\right) = 0$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, r$$

Przykładem równania więzów nieholonomicznych będzie:

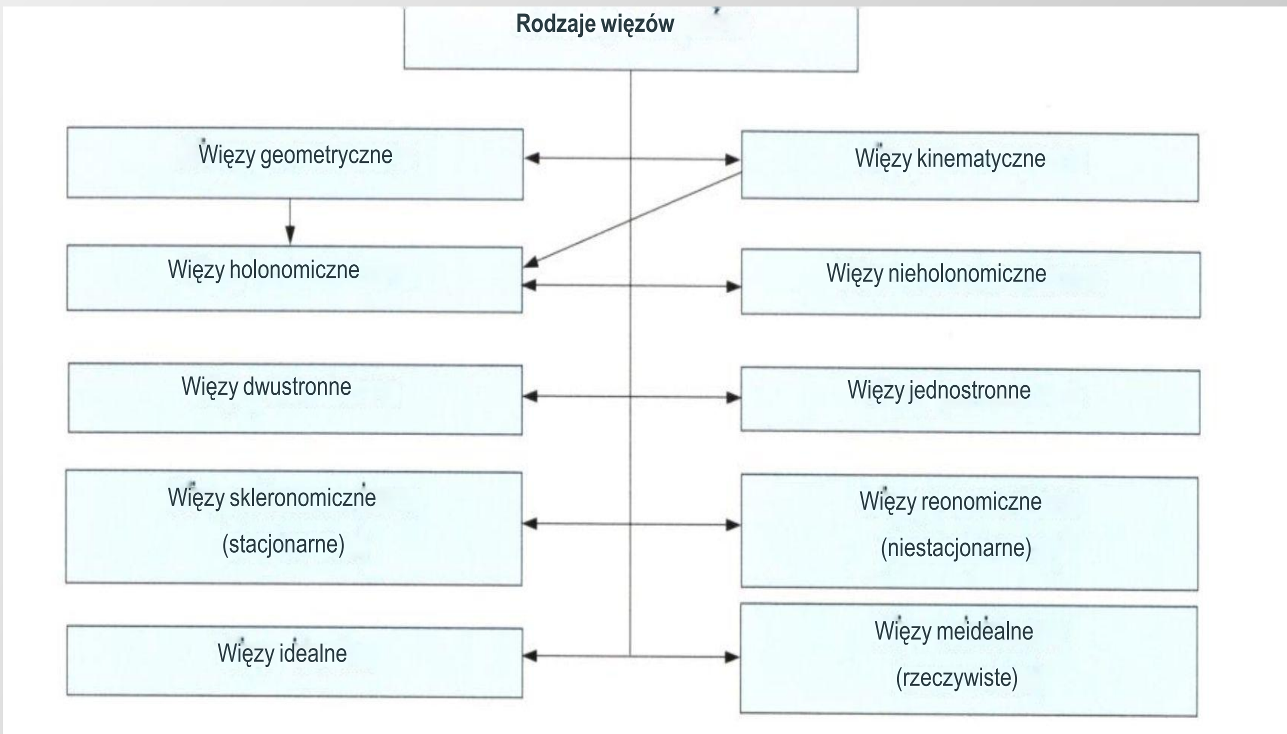
$$v_s = \dot{x} + r \cdot \dot{\varphi} = 0$$



Rodzaje więzów

Więzami są ograniczenia nałożone na ruch układu (na współrzędne lub prędkości punktów lub brył układu). Można je wyrazić w postaci zależności analitycznych nazywanych ***równaniami więzów***.

Istnieją różnego rodzaju więzy pomiędzy współrzędnymi lub prędkościami punktów układów mechanicznych. Wśród nich wyróżniamy więzy geometryczne i kinematyczne, holonomiczne i nieholonomiczne, skleronomiczne i reonomiczne, dwustronne i jednostronne, a także idealne i rzeczywiste.

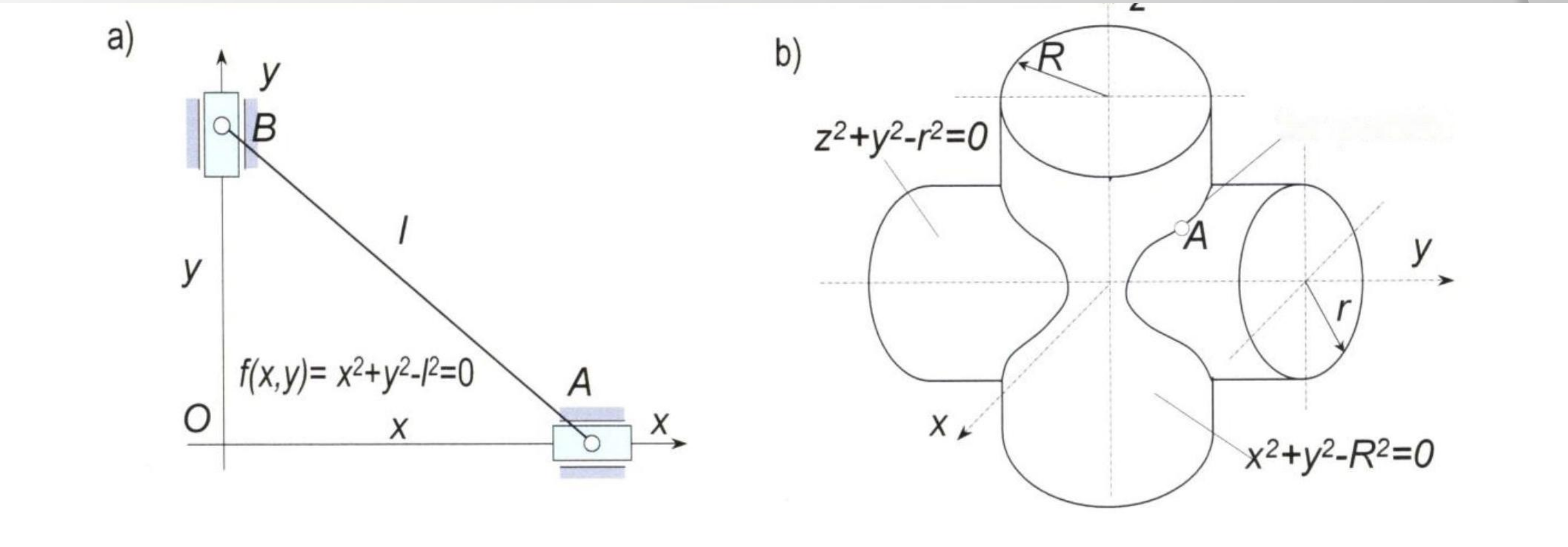


Więzy geometryczne (dwustronne)

Przykłady więzów geometrycznych:

a) punkt B związany z punktem A za pomocą sztywnego łącznika,

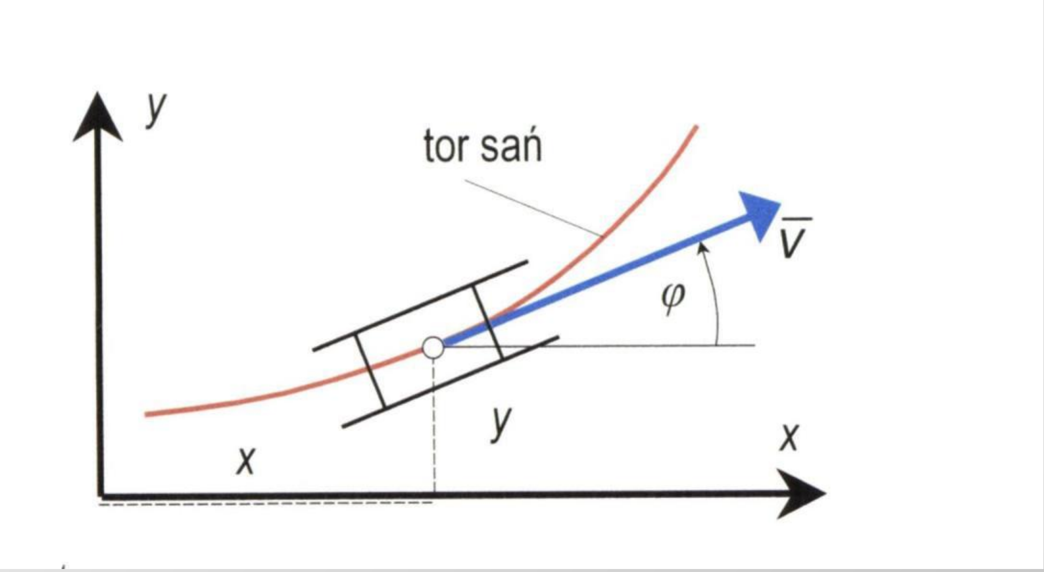
b) punkt A porusza się po torze powstałym z przecięcia dwóch walców



Więzy kinematyczne(dwustronne)

Więzy kinematyczne dwustronne są to więzy zależne od prędkości. W równaniach tych więzów występują współrzędne i ich pierwsze pochodne względem czasu.

Przykład: tzw. ***równanie sań***. Sanie spoczywają na ostrych płozach. Mogą poruszać się tylko w kierunku płóz, a nie w kierunku do nich poprzecznym. Oznacza to, że prędkość środka sań ma kierunek równoległy do ich kierunku, co jest konsekwencją nałożonych na układ więzów.



$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = tg\varphi$$

$$f(x, y, \varphi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}) = \dot{x} \cdot tg\varphi - \dot{y} = 0$$

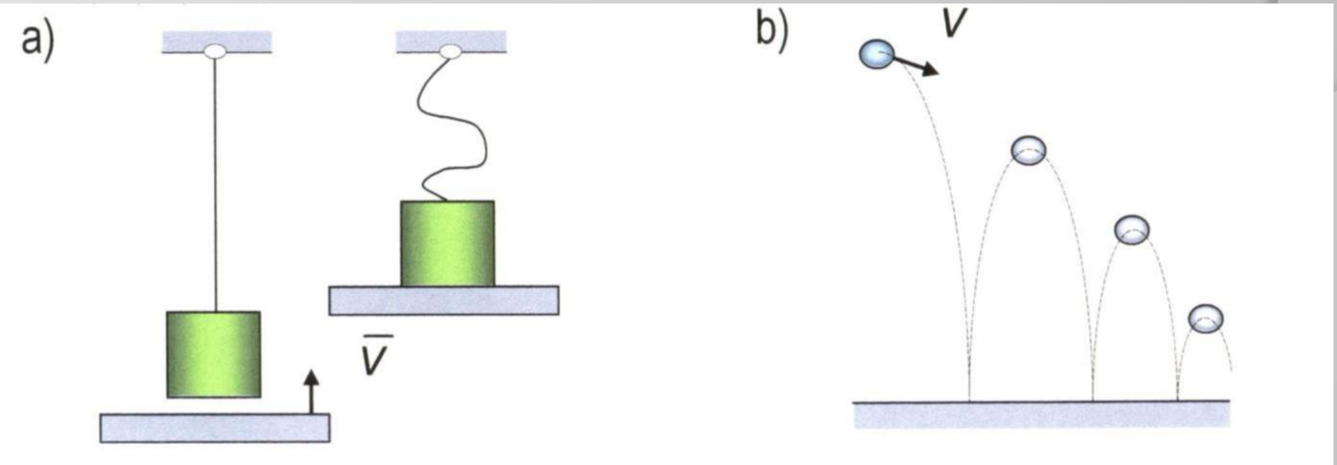
Więzy jedno- i dwustronne

Więzy dwustronne są to więzy, które nie pozwalają na oderwanie układu od więzów (oddziałują w dwóch kierunkach). W równaniach tych więzów wystepują znaki równości.

Jeżeli więzy pozwalają na oderwanie układu od więzów (oddziałują jednostronnie), to noszą one nazwę ***więzów jednostronnych*.** Równania więzów przyjmują wówczas postać nierówności.

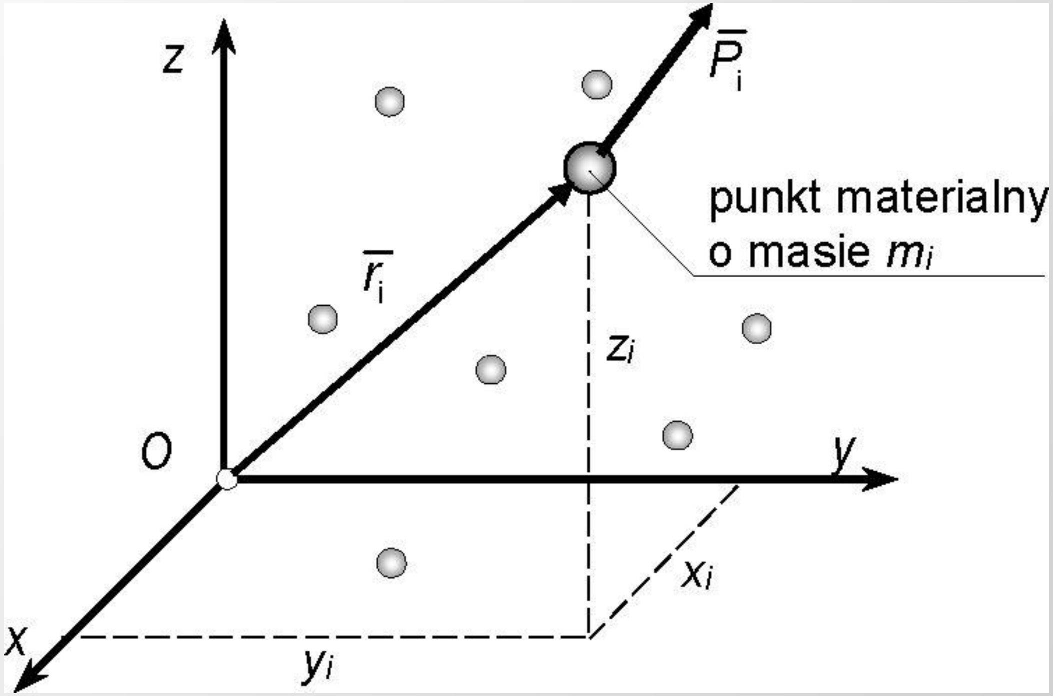
$$f_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\ldots\ldots, x_p, y_p, z_p) \geq 0$$

Przykład: ciężar zawieszony na nierozciągliwej lince, do którego zbliża się ruchoma podstawa lub powierzchnia, na którą spada piłka rzucona z pewnej wysokości, i od której odbija się potem wielokrotnie.



Współrzędne uogólnione, więzy

Rozpatrujemy układ o wielu stopniach swobody, układ złożony z ***p*** punktów materialnych. Na układ mogą być nałożone więzy.



Współrzędne dowolne:

wektorowe:

$$\bar{r}_i[x_i, y_i, z_i], \qquad i = 1,2,\dots,p$$

kartezjańskie:

$$x_i, y_i, z_i \qquad i = 1,2,\dots,p$$

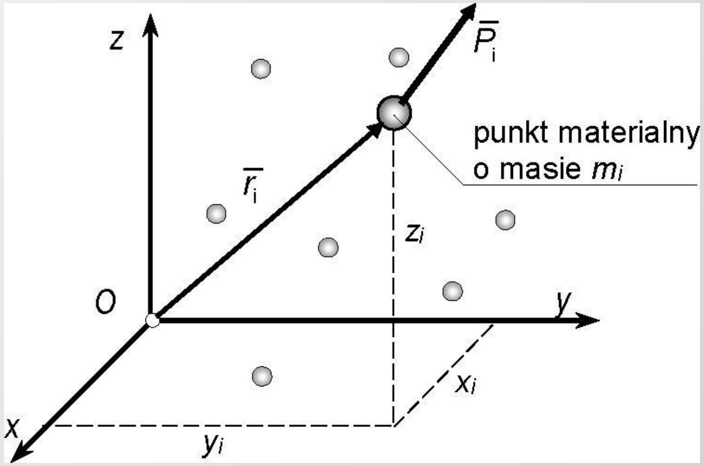
Współrzędne uogólnione Współrzędne uogólnione są to współrzędne <u>niezależne</u> od siebie, opisujące jednoznacznie położenie układu w przestrzeni (jest to <u>minimalna</u> liczba współrzędnych potrzebnych do opisu położenia układu).

$$q_i \,, \quad \text{gdzie} \quad i = 1,2,\dots,s \,,$$

gdzie:

s=3p-w liczba stopni swobody,
w liczba więzów.

Współrzędne uogólnione



Współrzędne kartezjańskie:

$$\overline{r}_i[x_i, y_i, z_i], \quad i = 1,2,\ldots,p$$

Współrzędne uogólnione:

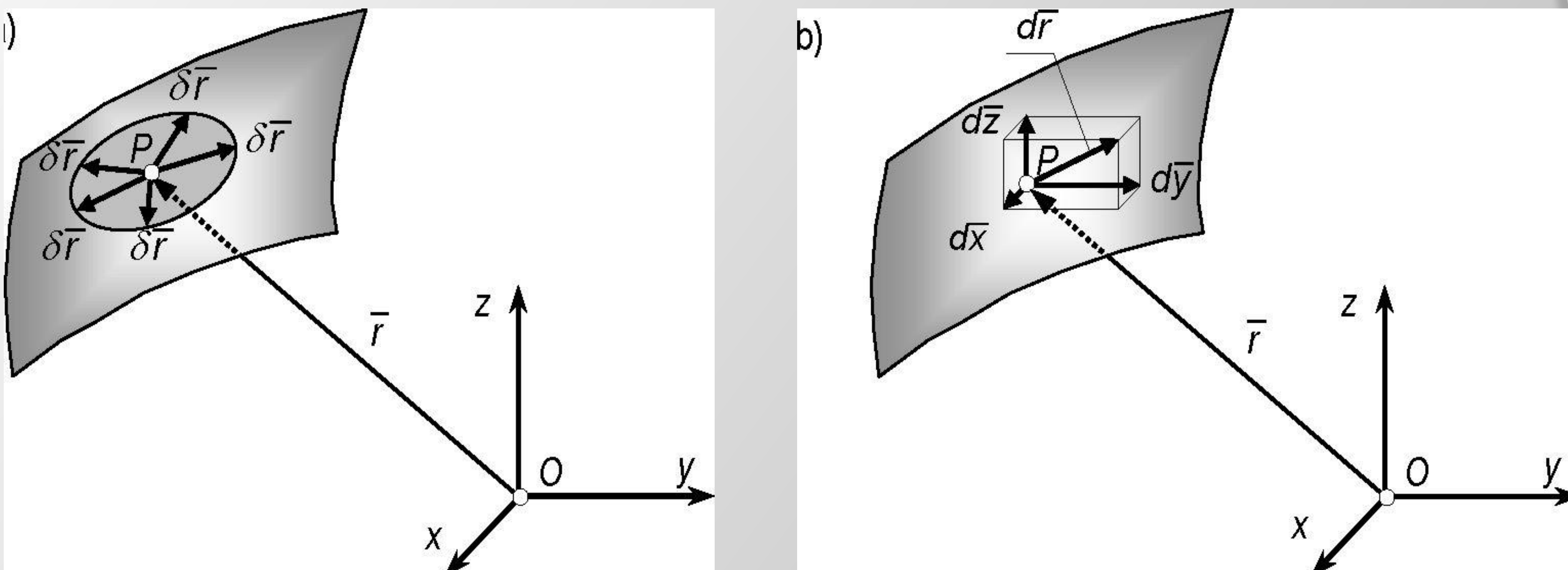
$$q_i \text{ , gdzie } i = 1,2,\ldots,s \text{ ,}$$

Współrzędne prostokątne (kartezjańskie) dowolnego punktu można wyrazić w zależności od współrzędnych uogólnionych:

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_s), \quad y_i = y_i(q_1, \ldots, q_s), \quad z_i = z_i(q_1, \ldots, q_s)$$

Przemieszczenia przygotowane

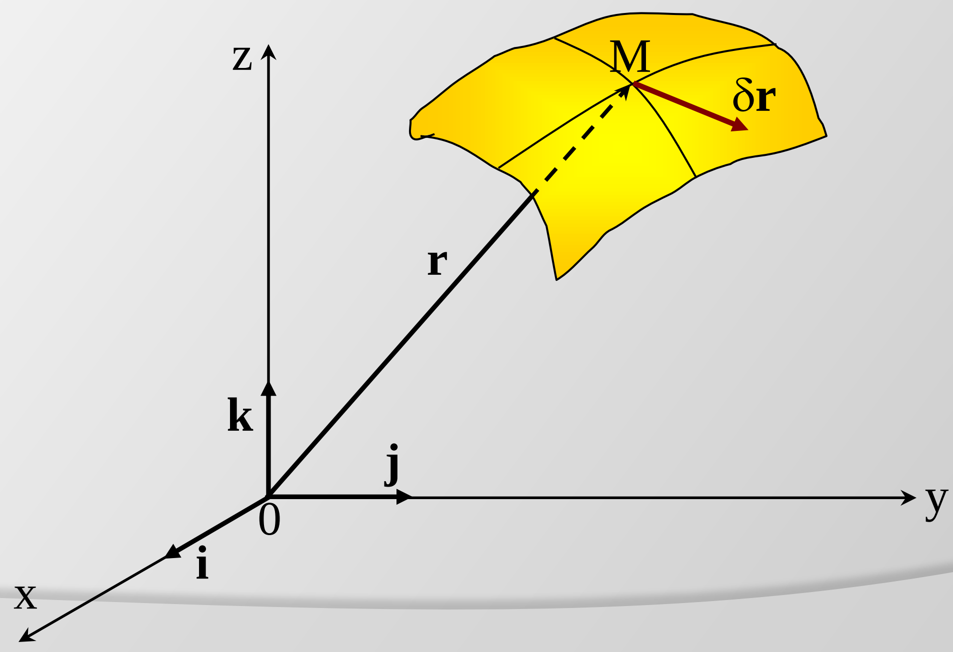
Przemieszczenie (przesunięcie) przygotowane (wirtualne) jest to każde dowolne, możliwe przemieszczenie punktu, zgodne z więzami. Jeżeli położenie punktu określone jest za pomocą wektora ***r***, to przemieszczenie przygotowane oznaczamy symbolem ***Sr***.



Przemieszczenia:
a) przygotowane ***Sr***
b) rzeczywiste ***dr***

Przemieszczenia przygotowane

Rozważamy nieswobodny punkt materialny M, który pozostaje na pewnej nieruchomej powierzchni. Punkt myślowo przesuwamy o **δr**, zgodnie z więzami nałożonymi na ten punkt. Wektor tego przesunięcia musi leżeć w płaszczyźnie stycznej do powierzchni, po której możliwy jest ruch badanego punktu materialnego. W odróżnieniu od rzeczywistego elementarnego przesunięcia dr, przesunięcie **δr** nazywa się **przesunięciem przygotowanym (wirtualnym).**

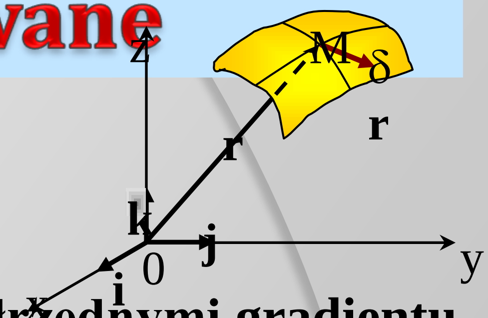


$$\delta\mathbf{r} = \delta x \cdot \mathbf{i} + \delta y \cdot \mathbf{j} + \delta z \cdot \mathbf{k}$$

δx, δy, δz – współrzędne przygotowane

nazywane **wariacjami**

Przemieszczenia przygotowane



Równanie więzów punktu M ma postać:

$$f(x,y,z)=0$$

Pochodne cząstkowe w danym punkcie powierzchni są współrzędnymi gradientu funkcji tej powierzchni tj. współrzędnymi wektora prostopadłego powierzchni. Stąd:

$$grad\ f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

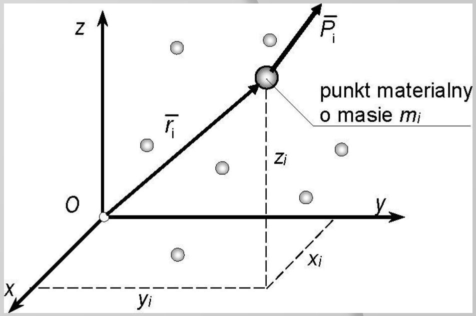
Ponieważ wektor przesunięcia przygotowanego δr jest styczny w punkcie M powierzchni f , to z prostopadłości gradientu f i wektora δr wynika:

$$grad\ f\cdot\delta\mathbf{r}=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0$$

Każdy wektor δr, spełniający powyższe równanie, nazywa się wektorem przesunięcia przygotowanego.

Przemieszczenia przygotowane *n* punktów

Jeżeli mamy do czynienia z układem ***n*** punktów materialnych, poddanych więzom ***k***, to zachodzą następujące związki



$$f_\nu(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k$$

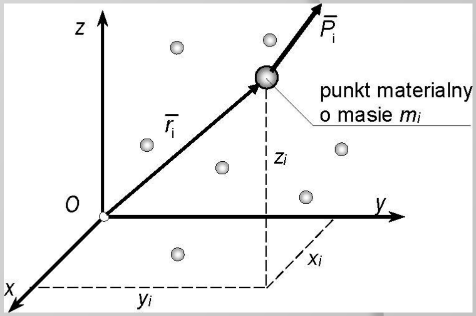
$$\delta \mathbf{r}_i = [\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i] \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_\nu}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad} f_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Przemieszczenia przygotowane we współrzędnych uogólnionych

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_s), \quad y_i = y_i(q_1, \ldots, q_s), \quad z_i = z_i(q_1, \ldots, q_s)$$



W tym przypadku mamy *s* przemieszczeń przygotowanych:

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \qquad \delta y_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \qquad \delta z_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

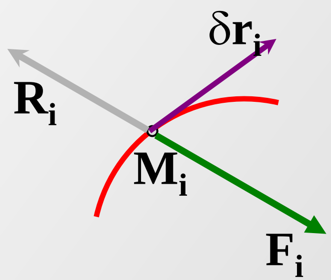
Praca przygotowana

Praca jest to iloczyn skalarny wektora siły i wektora przemieszczenia

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dL = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

Praca siły F na przesunięciu wirtualnym δr, nazywa się pracą przygotowaną (wirtualną) i oznacza się ją przez δL.



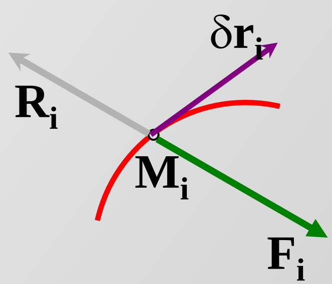
$$\delta L = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$$

Gdy na układ złożony z n punktów materialnych M_1, M_2, …, M_n działają siły F_1, F_2, … , F_n, to praca przygotowana będzie definiowana jako suma prac nad wszystkimi punktami

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i \right)$$

Praca przygotowana sił reakcji

Na nieswobodny punkt materialny, do którego przyłożono siłę F, działa jeszcze siła reakcji więzów R. Praca reakcji na przesunięciu przygotowanym rozważanego punktu równa jest Rδr i na ogół różna jest od zera. Gdy jednak punkt materialny pozostaje na doskonale gładkiej powierzchni lub linii, wówczas reakcje więzów, jako normalne do powierzchni lub linii, nie wykonują pracy na każdym przesunięciu zgodnym z więzami. Więzy takie nazywa się idealnymi.



Więzy nazwiemy idealnymi wtedy, gdy suma prac przygotowanych reakcji na dowolnych przesunięciach przygotowanych wszystkich rozważanych punktów materialnych podlegającym tym więzom jest równa zeru.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

Zasada prac przygotowanych

Niech układ nieswobodnych punktów materialnych M_1, M_2, ..., M_n znajduje się w równowadze pod działaniem sił czynnych F_i i reakcji więzów R_i. W przypadku tym siły F_i i R_i spełniać muszą następujące równanie:

$$F_i + R_i = 0$$

Praca wszystkich sił (czynnych i reakcji) na przesunięciu przygotowanym dla i-tego punktu wynosi:

$$\delta L_i = \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

Ponieważ, wypadkowa sił F_i i R_i jest równa zeru, to suma prac tych sił na przesunięciu przygotowanym δr_i punktu M_i będzie równa zeru:

$$\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Sumując powyższe równania dla wszystkich punktów materialnych układu, otrzymuje się:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Zasada prac przygotowanych

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

Jeżeli punkt lub układ punktów materialnych jest w równowadze do suma prac przygotowanych sił zewnętrznych (sił czynnych i sił reakcji) jest równa zeru.

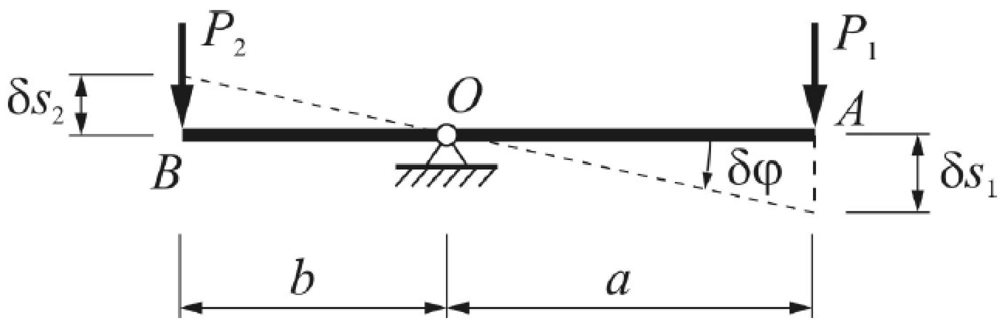
Równanie powyższe przedstawia zasadę prac przygotowanych (wirtualnych).

***Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu materialnego o więzach idealnych jest to, aby suma prac przygotowanych wszystkich sił czynnych przy dowolnym przemieszczeniu przygotowanym układu była równa zeru*.**

Zasadę prac przygotowanych można zapisać w postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad lub \quad \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i \right) = 0$$

Przykład zastosowania



$$P_1 \delta s_1 - P_2 \delta s_2 = 0$$

$$\delta s_1 = a\delta\varphi\,, \qquad \delta s_2 = b\delta\varphi$$

Stąd:

$$(P_1 a - P_2 b)\delta\varphi = 0$$

Przy dowolnym $\delta\varphi \neq 0$ mamy

$$P_1 a - P_2 b = 0\,, \quad \text{czyli} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{b}{a}$$

Przykład zastosowania

Można wykazać, że zasada prac przygotowanych jest równoważna statycznym warunkom równowagi.
Załóżmy, że przemieszczenie dowolnego punktu bryły ma postać

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_0 + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \cdot (\delta \mathbf{r}_0 + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i) = \delta \mathbf{r}_0 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i) = 0,$$

czyli

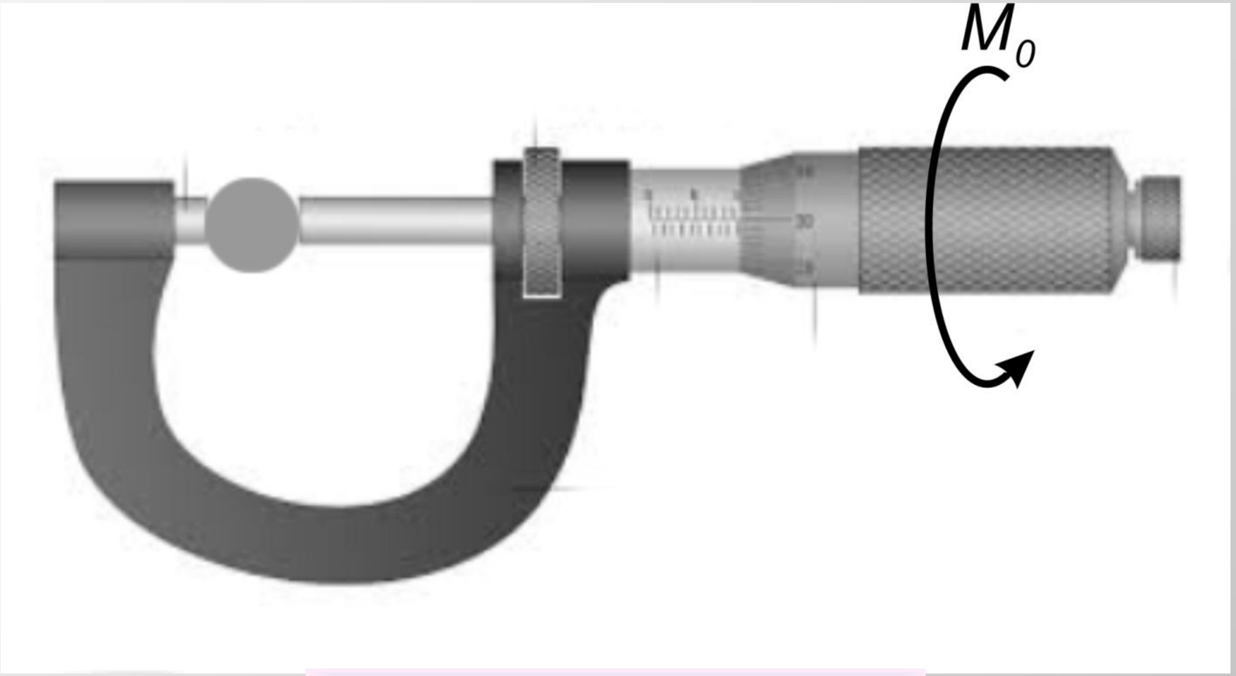
$$\delta \mathbf{r}_0 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i + \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i) = 0$$

Ponieważ $\mathbf{r}_i$ i $\boldsymbol{\varphi}$ są dowolne, to

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i) = 0$$

Przykład zastosowania

Jeżeli skok śruby mikrometrycznej wynosi ***h*** to jaki jest nacisk śruby na kulkę jeżeli działamy z momentem $\boldsymbol{M_0}$?



$$\delta L = M_0 \delta\varphi - R\delta h = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta h} = \frac{2\pi}{h}$$

$$R = M_0 \frac{2\pi}{h}$$

Mechanika analityczna w dynamice

Ogólne równanie dynamiki w Mechanice analitycznej otrzymuje się, wykorzystując **zasadę prac przygotowanych i zasadę d'Alemberta** dla układu materialnego.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = m \cdot \bar{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i - m \cdot \bar{a} = 0$$

Jeżeli: $\bar{B} \equiv -m \cdot \bar{a}$ $\Longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i + \bar{B} = 0$

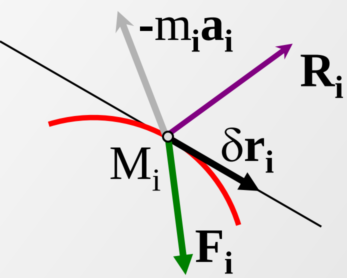
Zasada d'Alemberta: siła bezwładności punktu materialnego równoważy w każdej chwili sumę wszystkich sił działających na ten punkt

Opierając się na zasadzie d'Alemberta można każde zagadnienie dynamiki sprowadzić do zagadnienia równowagi sił rzeczywistych działających na punkty materialne rozpatrywanego układu i sił bezwładności tych punktów. Wynika stąd, że na dowolnym przemieszczeniu przygotowanym nieswobodnego układu materialnego suma prac przygotowanych sił rzeczywistych i sił bezwładności jest równa zeru. W przypadku więzów idealnych wystarczy brać pod uwagę jedynie pracę przygotowaną sił czynnych i sił bezwładności.

Mechanika analityczna w dynamice

Niech $\mathbf{F}_i$ oznacza wypadkową sił czynnych działających na punkt materialny M_i, a_i - przyspieszenie, a δr_i - przesunięcie przygotowane tego punktu (rys.). Dla dowolnego przemieszczenia przygotowanego rozpatrywanego układu musi być spełnione następujące równanie:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{F}_i - m_i\mathbf{a}_i\right)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$$



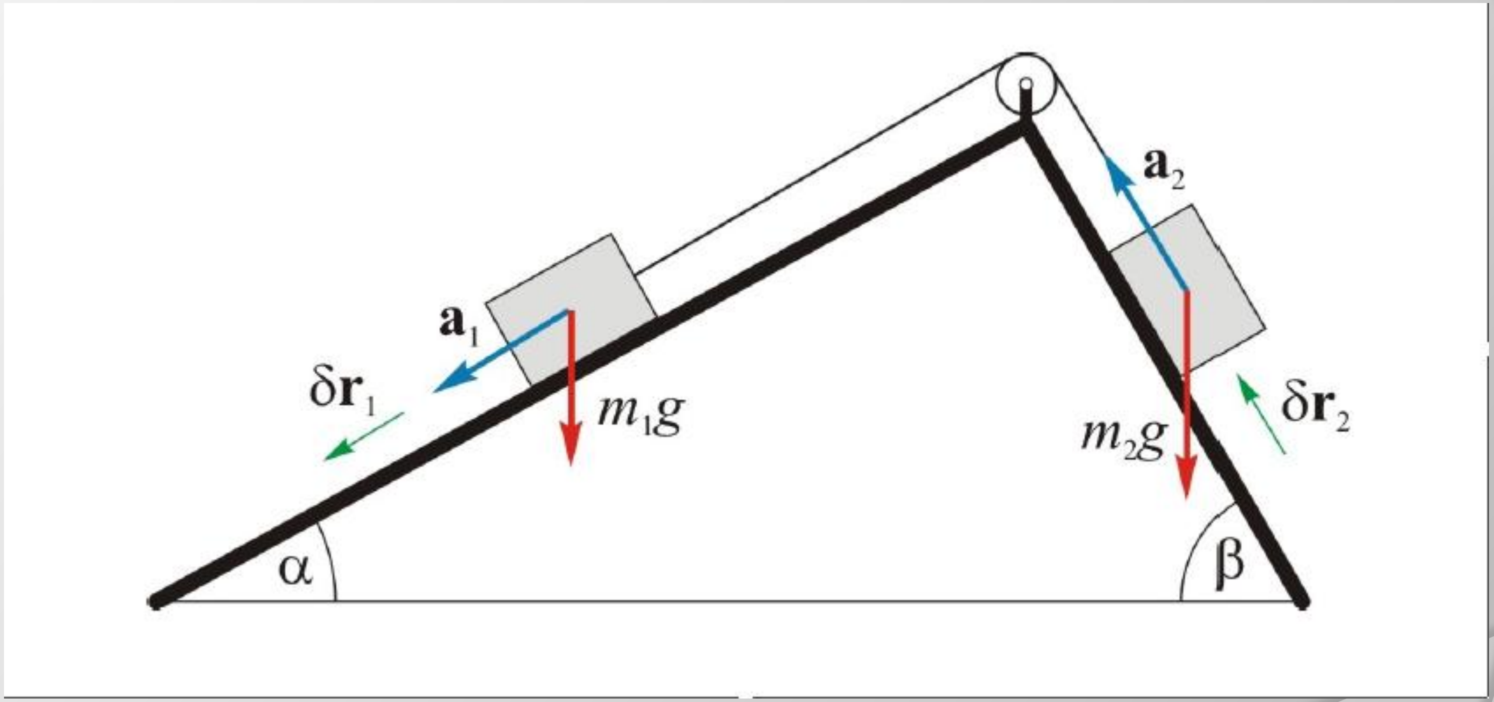
Biorąc pod uwagę, że $a_i=\ddot{r}_i$, gdzie r_i oznacza poprowadzony z nieruchomego bieguna promień-wektor punktu M_i, powyższemu równaniu można nadać postać:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\right)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$$

W przypadku nieswobodnego układu materialnego o więzach idealnych suma prac przygotowanych sił czynnych F_1, F_2, ..., F_n oraz sił bezwładności $-m_1a_1$, $-m_2a_2$, ..., $-m_na_n$ na dowolnym przemieszczeniu przygotowanym tego układu równa się zeru. Równanie powyższe nosi nazwę ogólnego równania dynamiki lub zasady d'Alemberta-Lagrange'a.

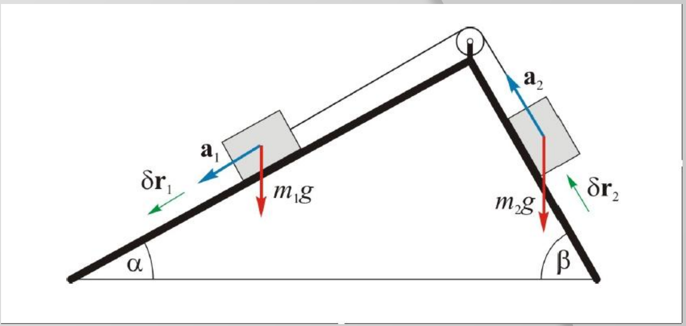
Przykład

Wyznaczyć przyśpieszenia obu mas poruszających się na równi pochyłej, połączonych nierozciągliwą i bezmasową liną; masowy moment bezwładności bloczka jest również pomijalnie mały.



Przykład

Ponieważ lina jest nierozciągliwa, to:



$$a_1 = a_2 = a$$

Ogólne równanie dynamiki:

$$(m_1\boldsymbol{g} - m_1\boldsymbol{a}_1)\cdot\delta\boldsymbol{r}_1 + (m_2\boldsymbol{g} - m_2\boldsymbol{a}_2)\cdot\delta\boldsymbol{r}_2 = 0$$

$$|\delta\boldsymbol{r}_1| = |\delta\boldsymbol{r}_2| = \delta s$$

$$m_1\boldsymbol{g}\delta\boldsymbol{r}_1 = m_1 g\delta s cos(90-\alpha)$$

$$m_2\boldsymbol{g}\delta\boldsymbol{r}_2 = -m_2 g\delta s cos(90-\beta)$$

$$m_1\boldsymbol{a}_1\delta\boldsymbol{r}_1 = m_1 a\delta s$$

$$m_2\boldsymbol{a}_2\delta\boldsymbol{r}_2 = m_2 a\delta s$$

$$[(m_1 sin\alpha - m_2 sin\beta)g - (m_1+m_2)a]\delta s = 0$$

$$(m_1 sin\alpha - m_2 sin\beta)g - (m_1+m_2)a = 0$$

$$a = g\,\frac{m_1 sin\alpha - m_2 sin\beta}{m_1+m_2}$$

Zasada Dirichleta

$$dL = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right] = -dV$$

$$V = mgz + C$$

Stosując zasadę prac przygotowanych do układu punktów materialnych, znajdujących się w polu potencjalnym (pracę wykonują wyłącznie siły określone potencjałem), otrzymujemy:

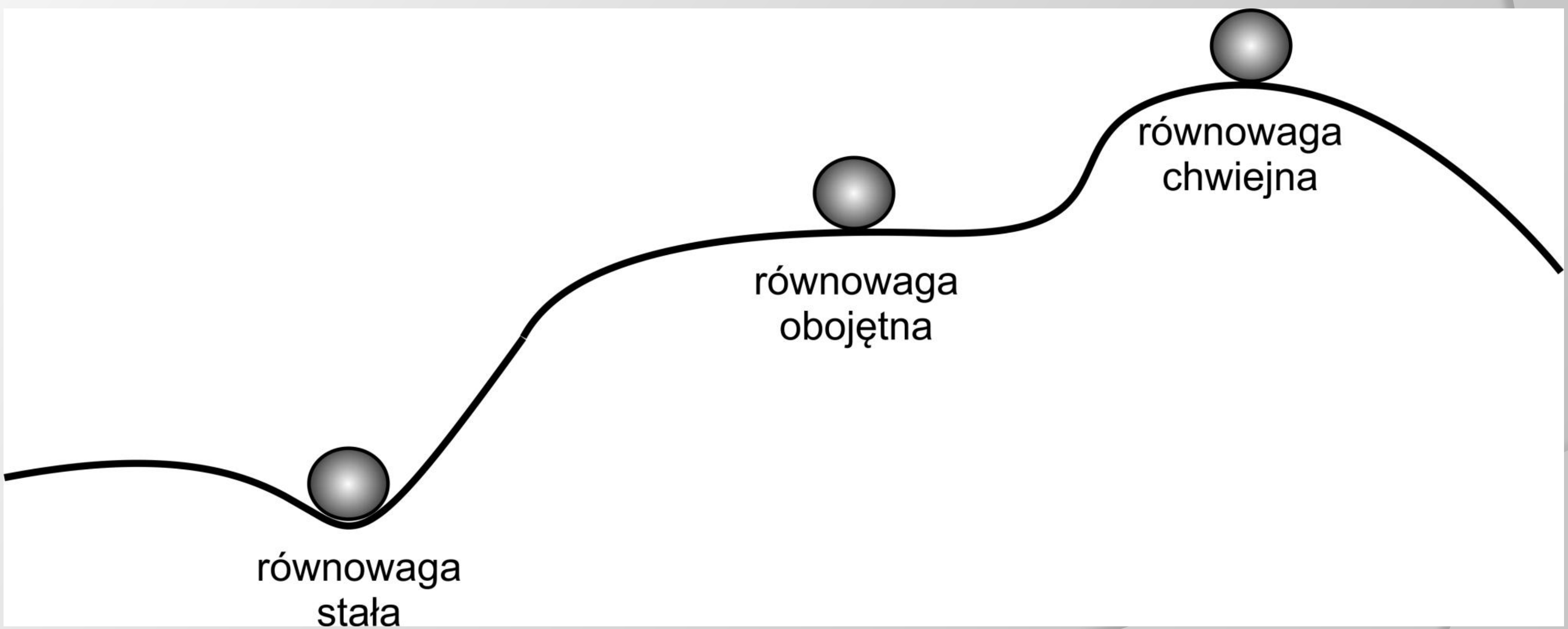
$$\sum\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right] = \sum \delta V = 0$$

Równowaga w polu zachowawczym (potencjalnym) istnieje wówczas gdy wariacja potencjału jest równa zeru

Zasada Dirichleta

Równowaga w polu zachowawczym (potencjalnym) istnieje wówczas gdy wariacja potencjału jest równa zeru

Zasada Dirichleta: Układ materialny w zachowawczym polu sił znajduje się w położeniu równowagi stałej, gdy jego energia potencjalna osiąga minimum.



Dziękuję za uwagę!