

MECHANIKA ANALITYCZNA

Wstęp, Mechanika Techniczna

LECH MURAWSKI

l.murawski@wm.umg.edu.pl

pok. A213

Zasady

- Obecność będzie sprawdzana na wykładach -> lista; można mieć max 1 nieobecność nieusprawiedliwioną i do 1/3 nieobecności usprawiedliwionych; obecność może przeważać szalę stopnia z zajęć
- Proszę o nie spóźnianie się; w przypadkach losowych -> cisza; zmiana zasad gdy spóźnienia będą nagminne
- Na wykładzie będzie podane wszystko co jest niezbędne do egzaminu; egzamin tylko teoretyczny – pięć pytań; najważniejszy jest tok rozumowania
- Do zaliczenia przedmiotu trzeba mieć zaliczone zarówno ćwiczenia jak i egzamin z wykładów
- Poprawy, zaliczanie zajęć oraz wszelkie pytania i problemy na konsultacjach (**wtorek, godz. 9-10 w semestrze**)
- Wszelkie ustalenia tylko (!) poprzez starostę roku/grupy; proszę o maile kontaktowe

Pytania?

Literatura

Teoria:

- J.Kubik, J.Mielniczuk, A.Wilczyński: *Mechanika Techniczna*
- J.Leyko: *Mechanika Ogólna*
- T.Niezgodziński: *Mechanika Ogólna*
- W.Kurnik: *Wykłady z Mechaniki Ogólnej*
- Z. Osiński: *Teoria drgań*, PWN
- J. Awrejcerewicz : *Drgania deterministyczne układów dyskretnych*

Zadania:

- J.Misiak: *Zadania z Mechaniki Ogólnej*
- M.Fligiel: *Zadania z Mechaniki Ogólnej*

Prawa Newtona

I prawo: Jeżeli na ciało nie działa żadna siła to pozostaje ono w stanie spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym, prostoliniowym.

prawo bezwładności - fundamentalna własność materii

II prawo: Jeżeli na ciało działa niezrównoważona siła to powoduje ona jego przyśpieszenie, które jest odwrotnie proporcjonalne do masy tego ciała i jest skierowane zgodnie z kierunkiem działania siły.

przyśpieszenie – zmiana prędkości w czasie

masa – miara bezwładności ciała

pierwsze prawo wynika z drugiego prawa Newtona

wszystkie wielkości mogą być zależne od czasu \Rightarrow równanie różniczkowe

podstawowe równanie dynamiki!

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

III prawo: Każda siła działająca na ciało wywołuje przeciwdziałanie równe co do wartości, skierowane w tym samym kierunku ale z przeciwnymi zwrotami.

zasada akcji i reakcji

Prawo powszechnego oddziaływania grawitacyjnego

Każde dwa ciała materialne o masach m_1 i m_2 działają na siebie z siłą proporcjonalną do iloczynu tych mas, a odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości pomiędzy tymi ciałami.

$$F_g = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$k = 6.67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right]$$

Prawa Newtona obowiązują w inercjalnych układach odniesienia

Inercjalny układ odniesienia jest to układ, który nie podlega przyśpieszeniu; w układzie inercjalnym nie pojawiają się pozorne siły bezwładności.

Założenie: Ziemia jest układem inercjalnym

ale: siły odśrodkowe i Coriolisa

lepiej przybliżenie: układ słoneczny → Galaktyka → gwiazdy stałe → promieniowanie reliktowe

Ciekawostka:

Uniwersalny Inercjalny Układ Odniesienia to układ, w którym promieniowanie reliktowe nie jest przesunięte ku czerwieni w żadnym kierunku

Przyśpieszenie grawitacyjne ziemi $\cong 9.81 \text{ m/s}^2$

Zmiany przyśpieszenia ziemskiego $\cong \pm 0.025 \text{ m/s}^2$

Przyśpieszenie związane z ruchem obrotowym ziemi (na równiku) = 0.034 m/s^2

Przyśpieszenie związane z ruchem wokół słońca = 0.00006 m/s^2

Uwagi:

Teoria Newtona to pierwsza wielka unifikacja: mechaniki nieba z mechaniką ziemi.

Teoria Newtona to przypadek graniczny teorii kwantów (stała Plancka = 0) oraz teorii względności ($c = \infty$).

I. Newton wprowadził metodę matematyczno-empiryczną oraz idealizację (modelowanie) świata; rezygnacja z prób opisanie wszystkich zjawisk na raz (od Arystotelesa do Kartezjusza). Przykładowo Arystoteles twierdził, że próżni nie ma więc zawsze są jakieś siły (I prawo N.) i wtedy $F=ev^2$ (??? Prawo Stokesa).

Archimedes nie doceniany „trzeci” (obok Platona i Arystotelesa) filozof grecki; wprowadzał początki metody matematyczno-empirycznej: stosował eksperymenty dające wyrazić się liczbami; prawda to nie tylko piękno.

Idealizacja Newtona to ograniczenie się do odpowiedzi na pytanie „jak?” a nie „dlaczego?”; nowa metoda weryfikuje piękne struktury matematyczne badaniami empirycznymi; teoria Kartezjusza próbowała odpowiadać na pytania „dlaczego?” (teoria wirów i eteru) ale nie dawała sprawdzalnych wyników (100 lat walki!)

Uwagi:

Teoria Newtona jest „nie-mechanistyczna” bo wprowadzała siły na odległość (matematyczne a nie realne?).

I. Newton zdawał sobie sprawę z niekompletności swojej teorii, np. dla czego wszechświat (statyczny!) się nie zapadł do jednego punktu? Wszechświat to miliardy igieł postawionych na swoich czubkach.

Czy nowe prawa „muszą” być odkryte? Rachunek różniczkowy (niezbędny w nowoczesnej fizyce) wynaleziony został równoległe przez I. Newtona oraz G.W. Leibniza, podobnie szczególna teoria względności ale ogólna teoria względności???

Dlaczego wiele współczesnych praw jest nieintuicyjnych? Stosunek mikro do makro-świata to co najmniej 10^{40} ! (a my pośrodku). ~ 14 mld. lat po „wielkim wybuchu” ($k\rho T^2=1$) bo wcześniej brak węgla a później brak gorących gwiazd. Skąd idealne dostosowanie stałych fizycznych (lub np. kwadrat w prawie powszechnej grawitacji)?

Problem determinizmu w fizyce i w całym świecie – problem wolnej woli -> chaos deterministyczny.

Działy mechaniki ogólnej

- **Statyka** Bada stany równowagi ciał poddanych działaniu sił
- **Kinematyka** Bada ruchy ciał bez uwzględnienia działających sił, mas ciał oraz warunków ruchu
- **Dynamika** Bada ruchy ciał materialnych pod wpływem działających sił z uwzględnieniem praw Newtona
- **Teoria drgań** Bada periodyczne zmiany deformacji konstrukcji
- **Wytrzymałość Materiałów** Bada zjawiska zachodzące w materiałach (odkształcenia, naprężenia) występujące pod wpływem oddziaływania sił zewnętrznych (statyka odkształcalnych ciał stałych)

Mechanika Analityczna



Mechanika klasyczna (Newtona) nie wystarczy, kiedy?

- Większość układów mechanicznych jest układami poddanymi więzom (układy nieswobodne); często siły reakcji nas nie interesują a muszą być uwzględniane w równaniach.
- Układy mechaniczne są złożone z wielu części (punktów materialnych i brył sztywnych); równania ruchu trzeba budować dla każdego elementu układu osobno z uwzględnieniem oddziaływań wewnętrznych.



Mechanika analityczna jest zbiorem formuł matematycznych alternatywnych do mechaniki klasycznej opisujących w innym ujęciu równania ruchu układów mechanicznych. Opisana w XVIII i XIX wieku przez J.L.Lagrange oraz W.R.Hamilton.

Mechanika Newtona (uzupełniona o prawa Eulera) opiera się na wielkościach wektorowych, natomiast mechanika analityczna operuje globalnymi wielkościami skalarnymi: ***energiją kinetyczną i energiją potencjalną***.

Równania ruchu są wielkościami skalarnymi, wyprowadzane z kilku fundamentalnych zasad (praw) poprzez analizę wariacji tych wielkości.

STATYKA

Podstawowe pojęcia i zasady statyki

Siła - wektorowa wielkość fizyczna będąca miarą oddziaływań fizycznych między ciałami.

Jednostka w układzie SI: **[N]**

Siła ma wartość 1 N, jeżeli nadaje ciału o masie 1 kg, przyspieszenie 1 m/s²

Rozróżnienie siły ciężkości (waga) od masy!

Moment siły:

$$\vec{M}_0 = \vec{F} \times \vec{r}$$

$$|\vec{M}_0| = F \cdot \rho$$

Moment siły względem punktu i prostej

$$\vec{M}_0 = \vec{F} \times \vec{r}$$

$$|\vec{M}_0| = F \cdot r \cdot \sin\alpha$$

$$|\vec{M}_0| = F \cdot \rho$$

Moment siły względem prostej jest równy rzutowi wektora siły na płaszczyznę prostopadłą do prostej, pomnożonemu wektorowo przez odległość pomiędzy tą siłą a punktem przebicia prostej przez płaszczyznę.

Moment siły względem osi współrzędnych:

$$\vec{M}_0 = [M_x, M_y, M_z]$$



Moment pary sił

Para sił jest to układ złożony z dwóch sił równoległych nie leżących na jednej prostej, równych co do wielkości i o przeciwnych zwrotach.

Wypadkową pary sił jest siła zerowa; moment pary sił jest wielkością charakteryzującą parę sił. Moment pary sił jest wektorem swobodnym bo nie zależy od punktu względem którego liczymy momenty pojedynczych sił.

$$\vec{M}_O = \vec{AB} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}_O| = F \cdot d$$



Przestrzenny dowolny układ sił

Warunkiem równowagi bryły sztywnej poddanej działaniu dowolnego przestrzennego układu sił jest zerowanie się głównego wektora siły i głównego wektora momentu.

$$\vec{F}_w = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \qquad \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{i,0} = 0$$

W zapisie wersorowym:

$$\vec{F}_w = F_{w_x} \cdot \vec{i} + F_{w_y} \cdot \vec{j} + F_{w_z} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{M}_0 = M_{0_x} \cdot \vec{i} + M_{0_y} \cdot \vec{j} + M_{0_z} \cdot \vec{k}$$

Warunki równowagi przestrzennego dowolnego układu sił

$$\overline{F_w} = 0 \quad i \quad \overline{M_0} = 0$$



$$F_{w_x} = 0, \quad F_{w_y} = 0, \quad F_{w_z} = 0$$

$$M_{0_x} = 0, \quad M_{0_y} = 0, \quad M_{0_z} = 0$$



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$$
$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

Bryła poddana przestrzennemu dowolnemu układowi sił jest w równowadze jeżeli spełnionych jest sześć równań równowagi.

Warunki równowagi płaskiego dowolnego układu sił

Aby ciało było w równowadze, zarówno główny wektor siły układu F_w jak i główny wektor momentu (liczony względem dowolnego punktu) M_0 muszą być równe zero.

$$\vec{F}_w = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n M_{i,0} = 0$$

Równania równowagi płaskiego dowolnego układu sił

$$\overline{F_w} = 0 \quad i \quad \overline{M_0} = 0$$



$$F_{w_x} = 0, \quad F_{w_y} = 0, \quad M_0 = 0$$

Ponieważ rzut sumy na dowolną oś jest równy sumie rzutów poszczególnych sił składowych to:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{i,0} = 0$$

Dla płaskiego dowolnego układu sił mamy trzy równania równowagi. Za pomocą tych równań możemy obliczyć trzy niewiadome. Jeżeli niewiadomych jest więcej to mamy do czynienia z układem statycznie niewyznaczalnym i ...

Przestrzenny zbieżny układ sił

Przestrzenny, zbieżny układ sił jest to układ w którym linie działania sił nie leżą w jednej płaszczyźnie ale przecinają się w jednym punkcie.

$$\vec{F}_W = F_{W_x} \cdot \vec{i} + F_{W_y} \cdot \vec{j} + F_{W_z} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F}_W \equiv 0 \rightarrow F_{W_x} = 0 \text{ i } F_{W_y} = 0 \text{ i } F_{W_z} = 0$$

Równania równowagi przestrzennego, zbieżnego układu sił:

$$\sum_{i=1}^n F_{i_x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i_y} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i_z} = 0$$

Warunki równowagi płaskiego zbieżnego układu sił

Ciało jest w równowadze (nie porusza się) jeżeli wypadkowa siła jest równa zero (zamknięcie wieloboku wszystkich sił składowych).

$$\vec{F}_W = F_{W_x} \cdot \vec{i} + F_{W_y} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F}_W \equiv 0 \rightarrow F_{W_x} = 0 \text{ i } F_{W_y} = 0$$

Równania równowagi płaskiego, zbieżnego układu sił:

$$\sum_{i=1}^n F_{i_x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{i_y} = 0$$

Płaski układ sił zbieżnych jest w równowadze jeżeli suma rzutów wszystkich sił na oś x oraz oś y jest równa zero.

Tarcie

Tarcie (jeden z głównych czynników oporów ruchu) to całość zjawisk fizycznych towarzyszących przemieszczaniu się względem siebie dwóch ciał (tarcie zewnętrzne) lub cząstek wewnątrz tego samego ciała (tarcie wewnętrzne) i powodujących rozpraszanie energii podczas ruchu.

$$T = \mu \cdot N$$

Rodzaje tarcia zewnętrznego:

1. Tarcie ślizgowe
 - Tarcie statyczne
 - Tarcie kinetyczne
2. Tarcie toczne
3. Tarcie cięgien

Rodzaje tarcia ślizgowego:

1. Tarcie suche
2. Tarcie płynne
3. Tarcie graniczne
4. Tarcie mieszane

Tarcie ślizgowe

$$T \leq \mu \cdot N$$

Prawa tarcia sformułowane (doświadczalnie) przez Coulomba (Leonardo da Vinci, Guillaume Amontons):

1. Siła tarcia jest niezależna od wielkości stykających się powierzchni, a zależy od rodzaju materiałów, gładkości powierzchni, temperatury, smaru, zanieczyszczeń.
2. Wielkość siły tarcia, dla ciała znajdującego się w spoczynku, może zmieniać się od zera do maksymalnej wartości, zwanej wartością graniczną (proporcjonalną do siły nacisku).
3. Siła tarcia ma zwrot przeciwny do zwrotu (kierunku) przemieszczania się ciała, po utracie stanu równowagi i nie zależy od prędkości poruszającego się ciała.

Tarcie ślizgowe

Przyczyny tarcia: Wskutek chropowatości powierzchnie ciał stykają się tylko na małych obszarach styku (rzędu 1 mikrometra), występujących na grzbietach chropowatości. Obszar tych styków jest znacznie mniejszy niż powierzchni całkowitej stykających się ciał. W miejscach styku powstają siły przyczepności wywołane adhezją i tworzeniem połączeń mostkowych. Ponadto, tam, gdzie zachodzi zahaczanie się nierówności oba ciała deformują się, a często także ścierają.

$$T \leq \mu \cdot N$$

$$T_{max} = \mu \cdot N$$

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}_{max}$$

$$tg\rho = \frac{T_{max}}{N} = \mu$$

gdzie:

ρ - kąt tarcia

μ - współczynnik tarcia statycznego



Tarcie kinetyczne

Ciało znajduje się w równowadze statycznej jeżeli wypadkowa reakcja (siła nacisku + siła tarcia) znajduje się wewnątrz stożka tarcia.

$$T_k = \mu_k \cdot N$$

$$\mu_k < \mu$$

gdzie:

μ - współczynnik tarcia statycznego

μ_k - współczynnik tarcia kinetycznego



Tarcie ślizgowe

Przybliżone wartości współczynników tarcia ślizgowego:

<i>Materiał stykających się powierzchni</i>	<i>statyczne μ</i>		<i>kinetyczne μ_k</i>	
	<i>na sucho</i>	<i>zwilżone olejem</i>	<i>na sucho</i>	<i>zwilżone olejem</i>
Stal \Leftrightarrow Stal	0.15	0.1	0.1	0.01
Metal \Leftrightarrow Drewno	0.5-0.6	0.1	0.2-0.5	0.02-0.08
Drewno \Leftrightarrow Drewno	0.65	0.2	0.2-0.4	0.04-0.16
Stal \Leftrightarrow Lód	0.03	-	0.02	-
Guma \Leftrightarrow Asfalt	0.45-0.7	-	0.25-0.4	-

Tarcie toczne

Tarcie toczne (*nazywane również oporem toczenia*) – jest to opór ruchu występujący przy toczeniu jednego ciała po drugim. Tarcie toczne jest przykładem tarcia zewnętrznego. Tarcie toczne powstaje na skutek odkształcalności materiału koła i podłoża.

Występuje np. pomiędzy elementami łożyska tocznego lub między kołem pojazdu a nawierzchnią drogi. Zwykle tarcie toczne jest znacznie mniejsze od tarcia ślizgowego występującego między ciałami stałymi.

Dla niezbyt dużych prędkości toczenia, siła tarcia tocznego nie zależy od prędkości toczenia. Gdy prędkość toczenia jest duża, tak że prędkość powstawania odkształceń jest porównywalna z prędkością rozchodzenia się odkształceń w materiale, opory tarcia tocznego zwiększają się gwałtownie i przewyższają tarcie ślizgowe.

Dla małych prędkości toczenia, niezbyt plastycznych materiałów oraz odkształceń w zakresie sprężystego odkształcenia materiałów wielkość współczynnika tarcia tocznego „ f ” jest zależna głównie od materiałów podłoża i koła. Jeżeli są spełnione powyższe warunki, to tarcie toczne (suche) nie zależy od szerokości toczzonego ciała.

Tarcie toczne

$$\vec{T} = -\vec{F}_r$$

$$N \cdot f = F_r \cdot R$$

$$T = N \frac{f}{R}$$

$$M_T \leq F_r \cdot R = f \cdot N$$

gdzie:

f – współczynnik tarcia tocznego [m]

M_T – moment tarcia tocznego [Nm]

Warunkiem koniecznym toczenia się koła bez poślizgu, jest to żeby tarcie ślizgowe (siła tarcia) było większe od tarcia tocznego.

$$\mu \geq \frac{f}{R}$$



Tarcie toczne

Przybliżone wartości współczynników tarcia tocznego:

<i>Material toczących się elementów (koło ⇔ podłoże)</i>	<i>Współczynnik tarcia tocznego f [mm]</i>
hartowana stal ⇔ hartowana stal	0.01
stal ⇔ stal	0.5
stal ⇔ asfalt	6
drewno miękkie ⇔ stal	0.8
drewno twarde ⇔ drewno twarde	0.8
ebonit ⇔ stal	7.7
polimer ⇔ stal	2
guma ⇔ beton	15-35

Środek ciężkości

Środek ciężkości (barycentrum) ciała lub układu ciał jest punktem, w którym przyłożona jest wypadkowa siła ciężkości danego ciała.

Założenie: Siły ciężkości poszczególnych części danego ciała są równoległe (mały rozmiar rozpatrywanych ciał w porównaniu do rozmiaru ziemi).

Oznaczając ciężary poszczególnych elementów ciała przez G_i , sumaryczny ciężar ciała wynosi:

$$G = \sum_{i=1}^n G_i$$

Środkiem ciężkości ciała nazywamy środek równoległych sił ciężkości.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \cdot x_i}{G}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \cdot y_i}{G}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \cdot z_i}{G}$$

Środek masy

Uwaga: Dla ciała znajdującego się w jednorodnym polu grawitacyjnym środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy dlatego pojęcia te często są mylone lub wręcz utożsamiane.

$$G = mg$$

Środek masy ciała:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{m}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{m}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_i}{m}$$

Jeżeli ciało jest jednorodne (masa właściwa $\rho = \text{const}$):

$$m_i = V_i \cdot \rho$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot x_i}{V}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot y_i}{V}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot z_i}{V}$$

Środek masy

Jeżeli ciało jest jednorodne (masa właściwa $\rho = \text{const}$):

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot x_i}{V}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot y_i}{V}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot z_i}{V}$$

Jeżeli ciało jest figurą płaską (o jednakowej grubości):

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{F}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{F}$$

Jeżeli ciało można zamodelować liniami (pomijalna grubość i szerokość – ciało jednowymiarowe):

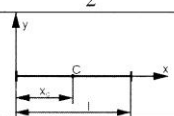
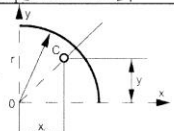
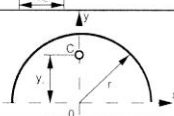
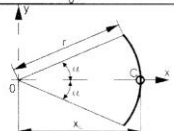
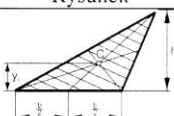
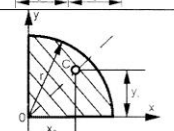
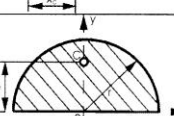
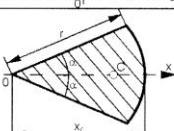
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n l_i \cdot x_i}{L}$$

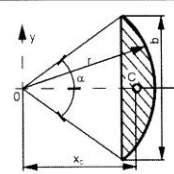
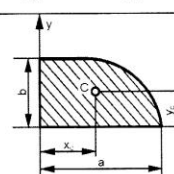
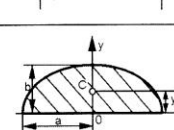
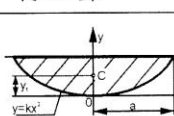
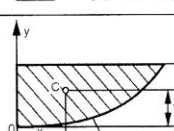
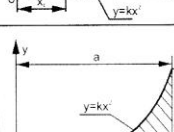
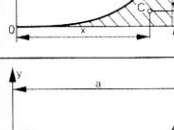
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n l_i \cdot y_i}{L}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n l_i \cdot z_i}{L}$$

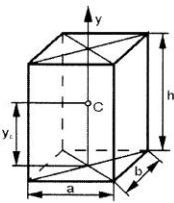
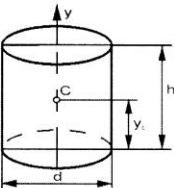
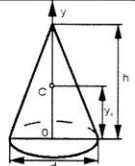
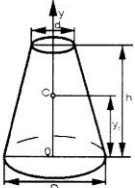
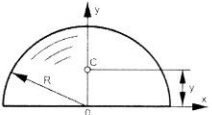
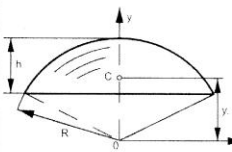
Przykłady środków ciężkości

Środki ciężkości wybranych linii, powierzchni i brył

Linia	Rysunek	x_c	y_c	Długość
1	2	3	4	5
Odcinek prosty		$\frac{l}{2}$	0	l
Ćwierćokrąg		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi \cdot r}{2}$
Półokrąg		0	$\frac{2r}{\pi}$	$\pi \cdot r$
Łuk okręgu		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$
Figura	Rysunek	x_c	y_c	Pole
Trójkąt			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Ćwierć koła		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Pół koła		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Wycinek koła		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Odcinek koła		$\frac{4r \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$	0	$r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$
Ćwierć elipsy		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Półowa elipsy		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Parabola		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Półowa paraboli		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{3ah}{3}$
Pod parabolą drugiego stopnia		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Pod parabolą n tego stopnia		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$

Przykłady środków ciężkości

Bryła	Rysunek	x_c	y_c	Objętość
Prostopadłościan		0	$\frac{h}{2}$	abh
Walec		0	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi d^2}{4} h$
Stożek		0	$\frac{h}{4}$	$\frac{\pi}{12} d^2 h$
Stożek ścięty		0	$\frac{h}{4} \left(\frac{D^2 + 2Dd + d^2}{D^2 + Dd + d^2} \right)$	$\frac{\pi}{12} (D^2 + Dd + d^2) h$
Półkula		0	$\frac{3}{8} R$	$\frac{2}{3} \pi R^3$
Odcinek kuli		0	$\frac{3}{4} \frac{(2R-h)^2}{(3R-h)}$	$\frac{1}{3} \pi h^2 (3R-h)$

Źródło: P. Krasowski, Z. Powierża,
Mechanika Ogólna – Statyka, WSM
Gdynia 2002

KINEMATYKA

Funkcja wektorowa

Funkcją wektorową nazywamy wektor którego zarówno wielkość jak i zwrot jest zmienny w czasie.

$$\vec{w} = \vec{w}(t)$$

w zapisie wersorowym (i, j, k):

$$\vec{w} = w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k}$$

gdzie:

$$w_x = w_x(t)$$

$$w_y = w_y(t)$$

$$w_z = w_z(t)$$

Reguły różniczkowania

1. Pochodna wektora stałego

$$\bar{w} = \text{const.} \rightarrow \frac{d\bar{w}}{dt} = 0$$

2. Pochodna sumy wektorów

$$\frac{d}{dt} [\bar{w}_1 + \bar{w}_2] = \frac{d\bar{w}_1}{dt} + \frac{d\bar{w}_2}{dt}$$

3. Pochodna iloczynu skalarnego wektorów

$$\frac{d}{dt} [\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2] = \bar{w}_1 \cdot \frac{d\bar{w}_2}{dt} + \bar{w}_2 \cdot \frac{d\bar{w}_1}{dt}$$

Reguły różniczkowania

4. Pochodna iloczynu wektorowego

$$\frac{d}{dt} [\bar{w}_1 \times \bar{w}_2] = \bar{w}_1 \times \frac{d\bar{w}_2}{dt} + \frac{d\bar{w}_1}{dt} \times \bar{w}_2$$

5. Pochodna wektora pomnożonego przez skalar

$$\frac{d}{dt} [m \cdot \bar{w}] = m \cdot \frac{d\bar{w}}{dt} + \bar{w} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$m = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} [m \cdot \bar{w}] = m \cdot \frac{d\bar{w}}{dt}$$

$$\bar{w} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} [m \cdot \bar{w}] = \bar{w} \cdot \frac{dm}{dt}$$

Reguły różniczkowania

6. Iloczyn skalarny wektora przez jego pochodną

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{dr}{dt}$$

7. Pochodna wektora o stałym module

$$|\vec{r}| = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{\tau} = r \cdot \omega \cdot \vec{\tau} = r \cdot \vec{\omega}$$

wektor jednostkowy $\vec{\tau} \perp$ do r



Pochodne wektorów jednostkowych

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = |\bar{\tau}| \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{n} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{n}$$

gdzie \bar{n} wektor jednostkowy normalny wektora $\bar{\tau}$ ($\bar{\tau} \perp \bar{n}$)

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = |\bar{n}| \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{\tau} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{\tau}$$

moduł pochodnej wektora jednostkowego:

$$\left| \frac{d\bar{n}}{dt} \right| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \cdot |\bar{\tau}| = \omega$$

Moduł pochodnej wektora jednostkowego jest równy prędkości kątowej, z jaką wektor jednostkowy zmienia swój kierunek.

Pochodne wektorów jednostkowych

$$\left| \frac{d\bar{n}}{dt} \right| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \cdot |\bar{r}| = \omega$$

Pochodną wektora jednostkowego możemy przedstawić jako iloczyn wektorowy prędkości kątowej przez wektor jednostkowy.

$$\dot{\bar{n}} = \bar{\omega} \times \bar{n}$$

ponieważ:

$$|\bar{\omega} \times \bar{n}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{n}| \cdot \sin 90^\circ = \omega$$

Pochodne wektorów obracającego się układu współrzędnych OXYZ:

$$\dot{\bar{i}} = \bar{\omega} \times \bar{i}$$

$$\dot{\bar{j}} = \bar{\omega} \times \bar{j}$$

$$\dot{\bar{k}} = \bar{\omega} \times \bar{k}$$



Matematyczny opis ruchu punktu

Ruchem punktu nazywamy zmianę położenia punktu w czasie, względem wybranego układu odniesienia (np. Ziemia).

Równania ruchu punktu są to współrzędne punktu (względem wybranego układu współrzędnych) podane w funkcji czasu.

$$x = x(t);$$

$$y = y(t);$$

$$z = z(t).$$

Tor punktu jest to krzywa łącząca miejsca geometryczne chwilowych położenia poruszającego się punktu.

Równania ruchu punktu są to jednocześnie równania parametryczne toru punktu. Nieparametryczne równanie krzywej po której porusza się punkt można otrzymać po redukcji parametru t z równań toru punktu.



Wektor wodzący

Wektor wodzący punktu jest to wektor którego początkiem jest początek wybranego układu współrzędnych a koniec jest związany z poruszającym się punktem.

Ruch punktu można określić zmiennym w czasie wektorem wodzącym.

Wektor wodzący jest wektorową funkcją czasu:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

Współrzędne wektora wodzącego są jednocześnie równaniami ruchu punktu. Tor ruchu punktu jest jednocześnie hodografem wektora wodzącego.



Prędkość punktu materialnego

Pierwsza pochodna względem czasu, wektora wodzącego jest równa prędkości ruchu punktu materialnego.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t) \cdot \vec{i} + \dot{y}(t) \cdot \vec{j} + \dot{z}(t) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

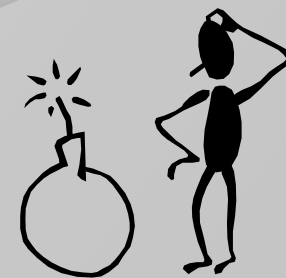
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Przykład:

$$\vec{r} = \frac{1}{2} t^2 \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j} + (2t - 3) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = t \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$$

Co to za ruch?



Przyśpieszenie punktu materialnego

Chwilowe przyśpieszenie punktu materialnego jest równe pochodnej wektora prędkości względem czasu.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t) \cdot \vec{i} + \ddot{y}(t) \cdot \vec{j} + \ddot{z}(t) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = \dot{v}_x \cdot \vec{i} + \dot{v}_y \cdot \vec{j} + \dot{v}_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Przykład:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}t^2 \cdot \vec{i} + t \cdot \vec{j} + (2t - 3) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = t \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k} \quad \longrightarrow \quad \vec{a} = \vec{i}$$

Krzywizna i promień krzywizny

Krzywiznę linii pomiędzy punktami A_1 i A_2 definiujemy jako stosunek kąta $\Delta\theta$ między stycznymi do krzywej w danych punktach a długością łuku Δs krzywej pomiędzy tymi punktami.

$$K_{\acute{s}r} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

$$K = \lim_{A_1 \rightarrow A_2} K_{\acute{s}r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

Promień krzywizny definiujemy jako odwrotność krzywizny linii.

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{ds}{d\theta}$$

Dla okręgu:

$$K_{\text{okręgu}} = \frac{2\pi}{2\pi R} = \frac{1}{R}$$



Ruch krzywoliniowy

$$\bar{a} = \frac{d}{dt} [v \cdot \bar{\tau}] = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + v \frac{d\bar{\tau}}{dt}$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \bar{n}$$

Pierwsza składowa powoduje zmianę długości wektora prędkości natomiast druga składowa jest odpowiedzialna za zmianę kierunku wektora prędkości.

gdzie \bar{n} to jednostkowy wektor normalny \perp do wektora $\bar{\tau}$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \bar{n}$$

$$\frac{ds}{dt} = v; \quad \frac{d\theta}{ds} = K = \frac{1}{\rho}$$

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$$

Ruch krzywoliniowy

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$$

a_t – przyśpieszenie styczne wynikające ze zmiany modułu wektora prędkości;

a_n – przyśpieszenie normalne wynikające ze zmiany kierunku wektora prędkości;

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$



Ruch krzywoliniowy

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \bar{n}$$

Wersor τ określa kierunek przyśpieszenia stycznego; zwrot wektora stycznego może być zgodny lub przeciwny do wektora prędkości.

Wersor n określa kierunek przyśpieszenia normalnego; zwrot wektora normalnego jest skierowany w kierunku chwilowego punktu obrotu.

Jeżeli ruch jest jednostajny ($v = \text{const.}$) to $a_t = 0$

Jeżeli ruch jest prostoliniowy ($\rho = \infty$) to $a_n = 0$ i wtedy całkowite przyśpieszenie:

$$a = a_t = \frac{dv}{dt}$$



Przykład: ruch jednostajny przyśpieszony

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{const.}$$

$$\int_0^t a dt = \int_{v_0}^{v(t)} dv$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t \{a \cdot t\} dt$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Opis ruchu we współrzędnych biegunowych

Kartezjański (prostokątny) układ współrzędnych nie jest jedyną metodą opisu położenia punktu materialnego; współrzędne biegunowe mogą być wygodniejsze w pewnych przypadkach do opisu ruchu punktu.

Położenie punktu można jednoznacznie określić przez podanie *promienia r , oraz dwóch kątów φ i ϑ* ; układ (r, φ, ϑ) nazywamy **współrzędnymi biegunowymi**.

$$x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi; \quad y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi; \quad z = r \cdot \cos\vartheta.$$

$$r = r(t); \quad \varphi = \varphi(t); \quad \vartheta = \vartheta(t).$$

W przypadku ruchu na płaszczyźnie $\vartheta=90^\circ$; do opisu położenia wystarczą dwie współrzędne (r, φ) .

Opis ruchu we współrzędnych biegunowych

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi$$

$$\vec{v}_r = v_r \cdot \bar{n} \quad \vec{v}_\varphi = v_\varphi \cdot \bar{\tau}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\{r \cdot \bar{n}\} = \frac{dr}{dt} \bar{n} + r \frac{d\bar{n}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \cdot \bar{n} + r \cdot \dot{\bar{n}}$$

$$\bar{n} = \bar{i} \cdot \cos\varphi + \bar{j} \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = -\bar{i} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi + \bar{j} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = \omega \cdot [-\bar{i} \cdot \sin\varphi + \bar{j} \cdot \cos\varphi]$$

$$\bar{\tau} = -\bar{i} \cdot \sin\varphi + \bar{j} \cdot \cos\varphi$$

$$\dot{\bar{n}} = \omega \cdot \bar{\tau}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \bar{n} + r \cdot \omega \cdot \bar{\tau}$$



Opis ruchu we współrzędnych biegunowych

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi$$

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{n} + r \cdot \omega \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{v}_r = \dot{r} \cdot \vec{n} \quad \vec{v}_\varphi = r \cdot \omega \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \dot{r} \cdot \vec{n} + r \cdot \omega \cdot \vec{\tau} \}$$

$$\vec{a} = \ddot{r} \cdot \vec{n} + \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{\tau} + \dot{r} \cdot \omega \cdot \vec{\tau} + r \cdot \varepsilon \cdot \vec{\tau} - r \cdot \omega \cdot \omega \cdot \vec{n}$$

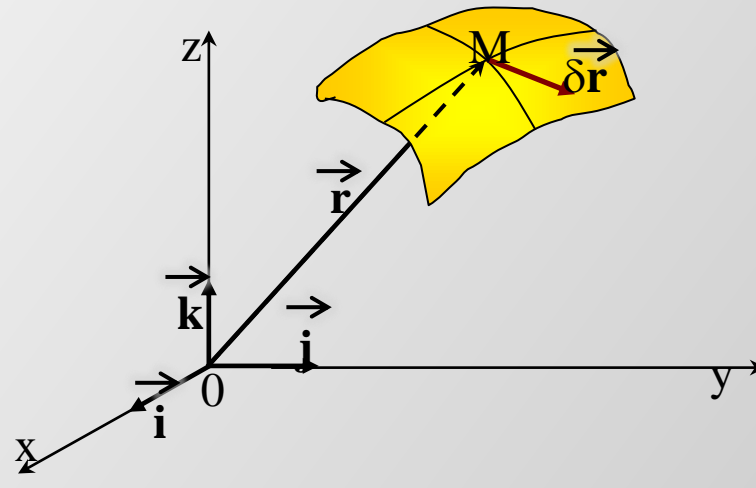
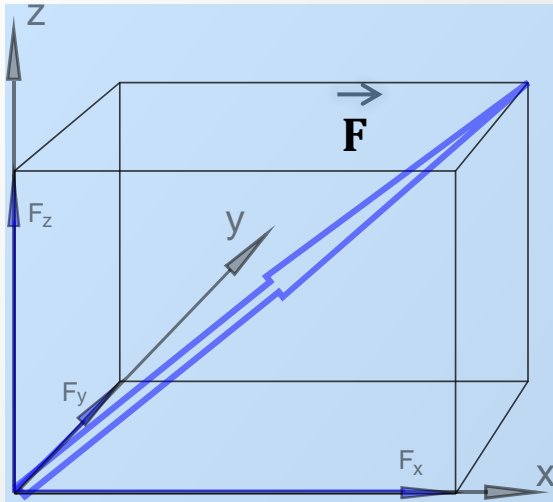
$$\vec{a} = \{ \ddot{r} - r \cdot \omega^2 \} \cdot \vec{n} + \{ 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega + r \cdot \varepsilon \} \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\varphi$$

$$\vec{a}_r = \{ \ddot{r} - r \cdot \omega^2 \} \cdot \vec{n} \quad \vec{a}_\varphi = \{ 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega + r \cdot \varepsilon \} \cdot \vec{\tau}$$

DYNAMIKA

Równania ruchu w układzie Kartezjańskim



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$F_x = m \cdot a_x$$

$$F_y = m \cdot a_y$$

$$F_z = m \cdot a_z$$

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$$

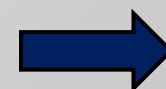
$$a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}$$



$$F_x = m \cdot \ddot{x}$$

$$F_y = m \cdot \ddot{y}$$

$$F_z = m \cdot \ddot{z}$$



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = m \cdot \ddot{x}$$

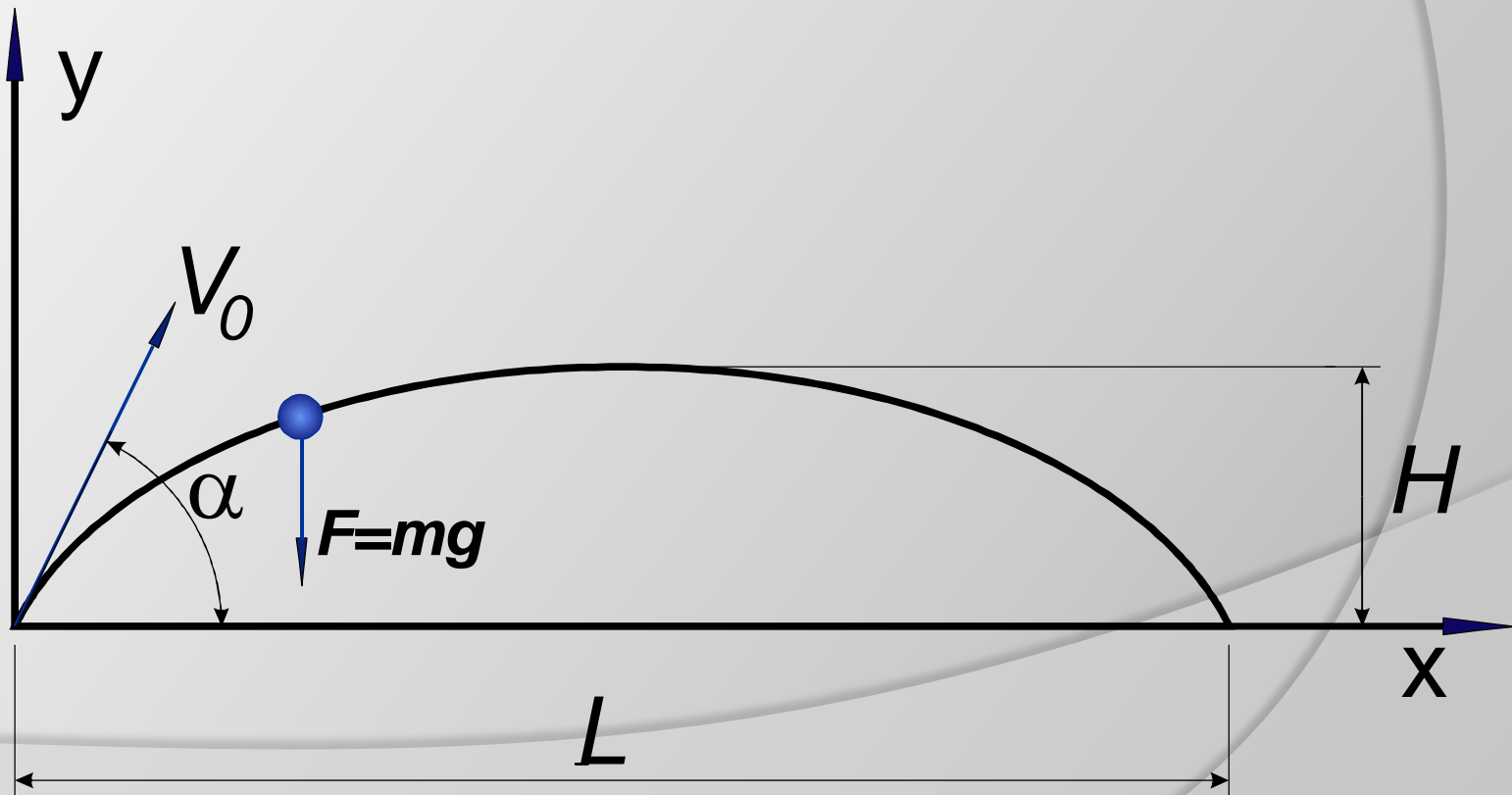
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = m \cdot \ddot{y}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = m \cdot \ddot{z}$$

Powyższe równania to równania różniczkowe ruchu punktu materialnego w prostokątnym układzie współrzędnych; ale mamy też inne układy odniesienia!

Rzut ukośny punktu materialnego

Szczególny przypadek drugiego zagadnienia dynamiki: Na punkt o zadanej stałej masie działa jedna, stała siła ciężkości. Dane są również warunki początkowe (sześć) – położenie początkowe i prędkość początkowa. Warunek brzegowy to płaszczyzna (ziemia) na który spada punkt materialny.



Rzutu ukośny cd.

Uwzględnienie oporu powietrza: dodatkowa siła skierowana przeciwnie do chwilowego kierunku ruchu, proporcjonalna \cong do kwadratu chwilowej prędkości.

Tor punktu materialnego \rightarrow krzywa balistyczna

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0;$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x = C_1; \quad \frac{dy}{dt} = v_y = -gt + C_2; \quad \frac{dz}{dt} = v_z = C_3$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\alpha); \quad v_y = -gt + v_0 \cdot \sin(\alpha); \quad v_z = 0$$

ale: $F_{op} \cong -c \cdot v^2$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -c \cdot \left\{ \frac{dx}{dt} \right\}^2; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg - c \cdot \left\{ \frac{dy}{dt} \right\}^2; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

Przykład:

- Maksymalny zasięg w próżni pocisku o $v_0=620m/s$ oraz $\alpha=45^\circ \rightarrow \cong 39$ km
- Maksymalny zasięg w powietrzu pocisku o $v_0=620m/s$ oraz $\alpha=32^\circ \rightarrow \cong 4$ km

Uwagi do rzutu ukośnego

Zakres zastosowania : pociski o zasięgu 200-600km (założenie brak oporu powietrza) ale $H=100-300\text{km}$ ($R_z=6378\text{km}$) przy $\alpha=45^\circ$

$$g = k \cdot \frac{M}{R_z^2}$$

$$g_{100} = 9.50 \text{ m/s}^2 \rightarrow -3.2\%$$

$$g_{300} = 8.94 \text{ m/s}^2 \rightarrow -8.9\%$$

Przykład: Rakieta V2 – start pionowy ale na $h=20\text{km}$ osiągała $v_0=1700\text{m/s}$ oraz $\alpha=45^\circ$ po wstawieniu do równań ruchu rzutu ukośnego otrzymujemy:

- zasięg 300 km
- wysokość lotu 75 km
- czas lotu 245 sek

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

Równanie z uwzględnieniem wysokości lotu:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -m \cdot k \cdot \frac{M}{(R_z + y)^2}; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

Mechanika bryły sztywnej – wstęp

Podstawowe modele ciał w mechanice:

- Ciało (bryła) idealnie sztywne (nieodkształcalne)
- Układ punktów materialnych
- Punkt materialny

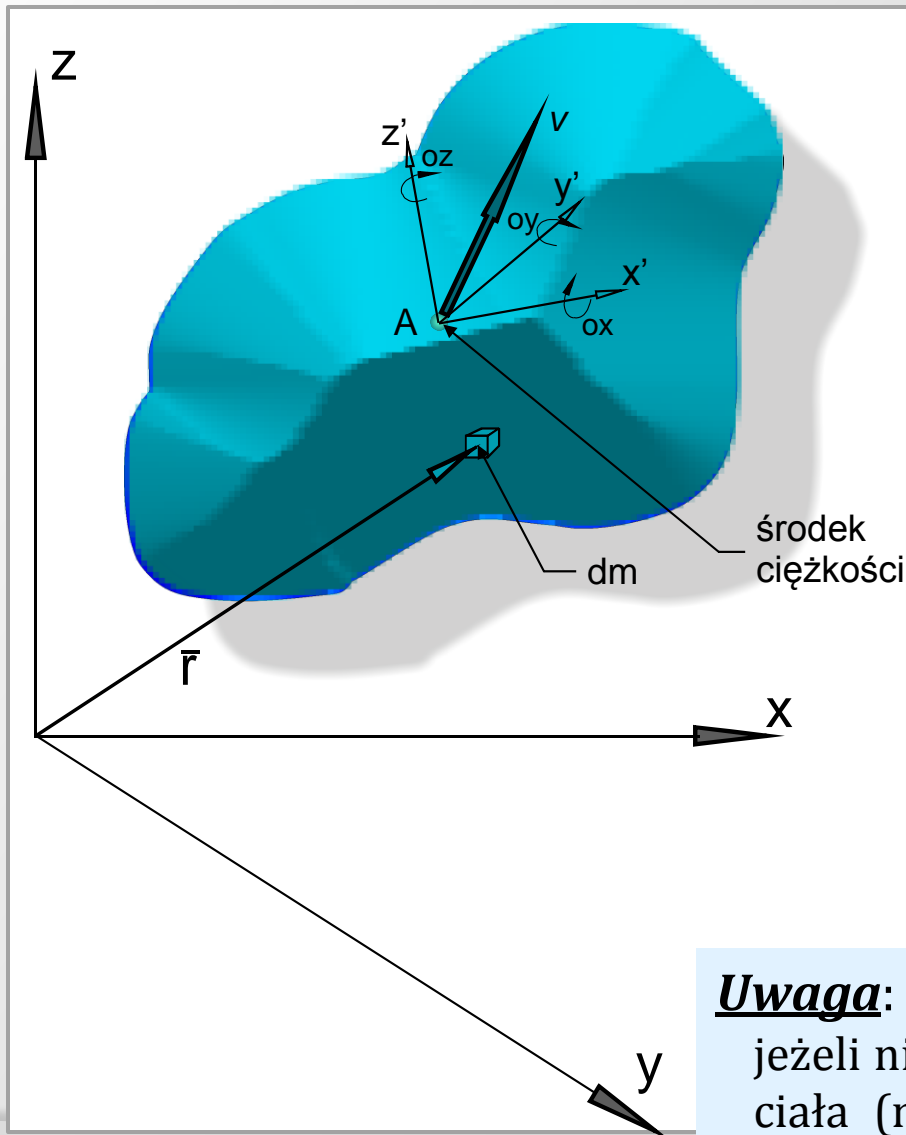
Bryła sztywna jest modelem ciała, w którym odległości pomiędzy poszczególnymi punktami są niezmiennie – ciało jest nieodkształcalne.

II prawo Newtona: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

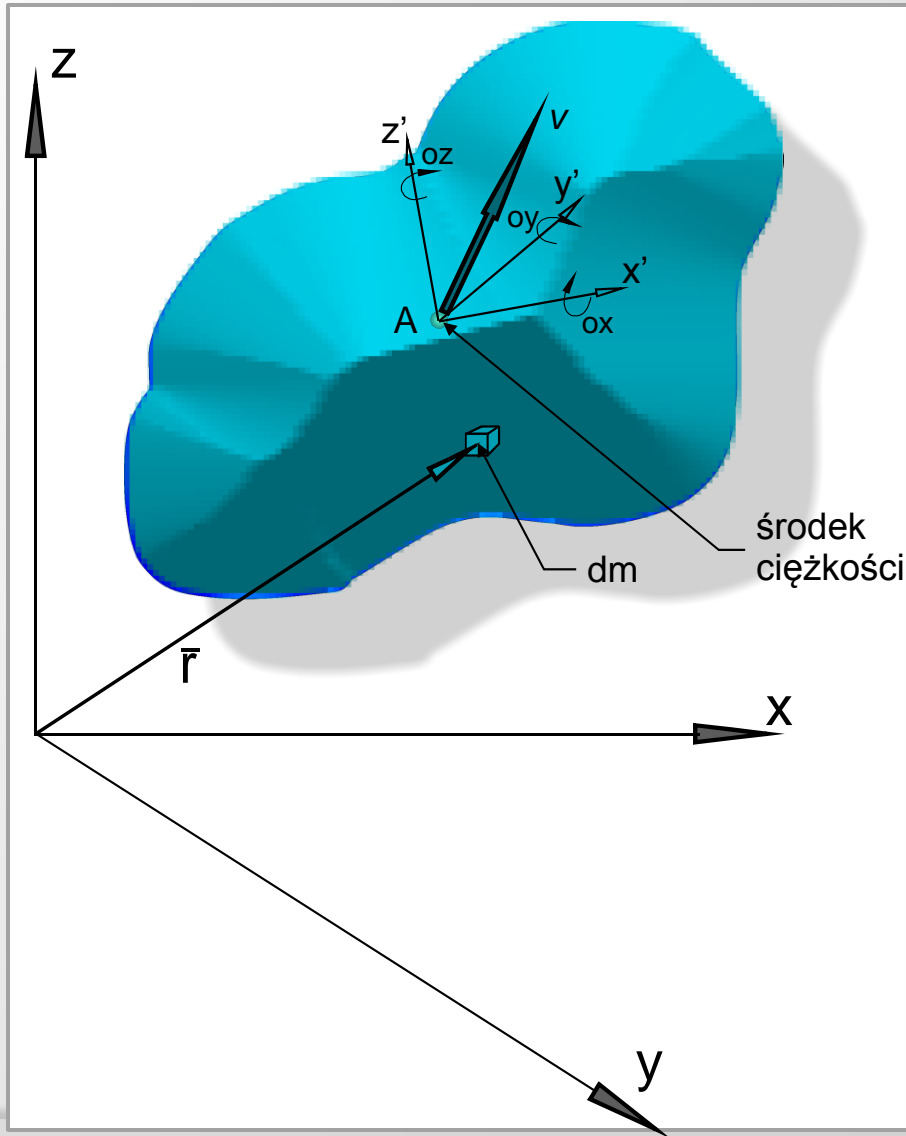
W ruchu obrotowym:

$$\vec{M} = I \cdot \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2} \quad \text{gdzie: } \vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

Uwaga: Ciało modelujemy przy pomocy bryły sztywnej jeżeli nie do pominięcia są efekty związane z obrotami ciała (natomiast nieistotne są jego odkształcenia → wytrzymałość materiałów)



Masowe momenty bezwładności



Masowym momentem bezwładności nazywamy iloczyn masy ciała przez kwadrat odległości od punktu, prostej lub płaszczyzny.

$$I = m \cdot r^2$$

Przykład: masowy moment bezwładności względem początku układu współrzędnych

$$I = \lim_{dm \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} dm_i \cdot r_i^2 = \int_m r^2 dm$$

Geometryczne momenty bezwładności

$$m = \rho \cdot V$$

jeżeli: $\rho = \text{const}$ to: $I = \int_m r^2 dm \rightarrow I = \rho \cdot \int_V r^2 dV$

$\rho = \text{const} \rightarrow$

$$D_{xy} = \rho \cdot \int_V (x \cdot y) dV$$

$$D_{yz} = \rho \cdot \int_V (y \cdot z) dV$$

$$D_{zx} = \rho \cdot \int_V (z \cdot x) dV$$

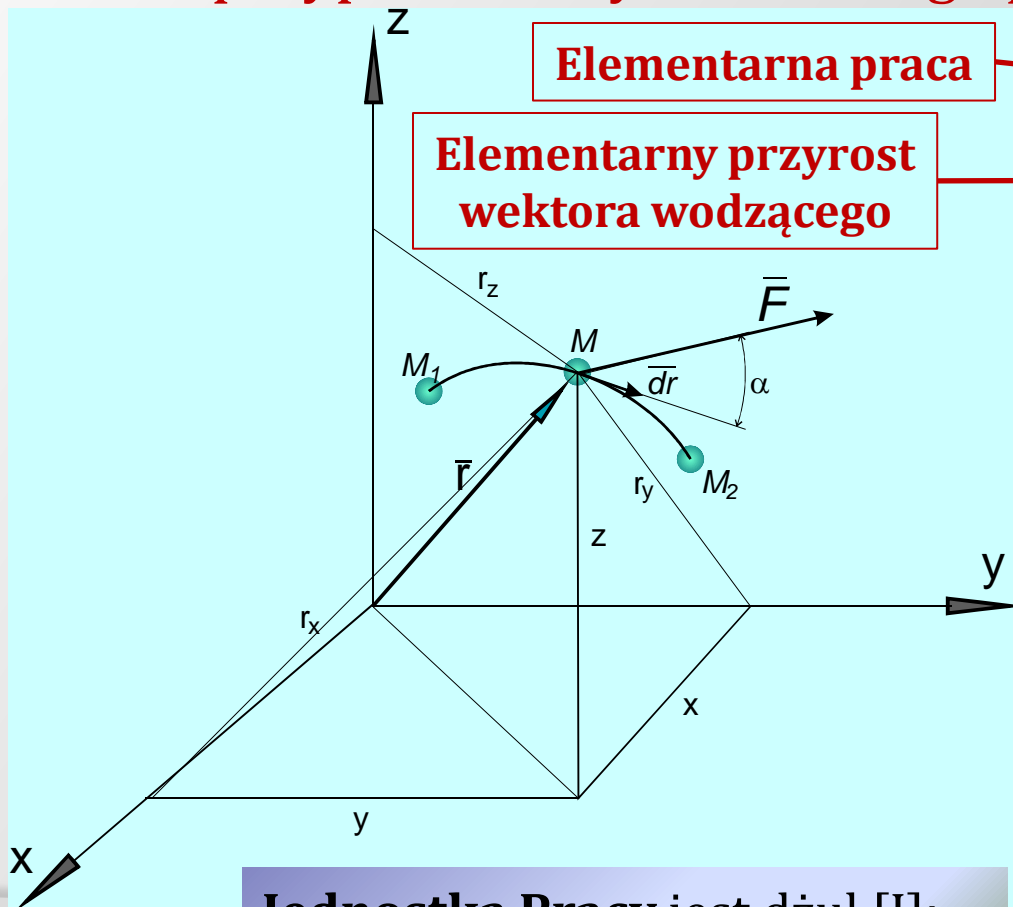
**Geometryczne
momenty
bezwładności**

Praca siły na krzywoliniowym przemieszczeniu

Praca jest to iloczyn skalarny wektora siły i wektora przemieszczenia

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Praca w przypadku krzywoliniowego przemieszczenia:



Elementarna praca

Elementarny przyrost
wektora wodzącego

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

$$dL = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

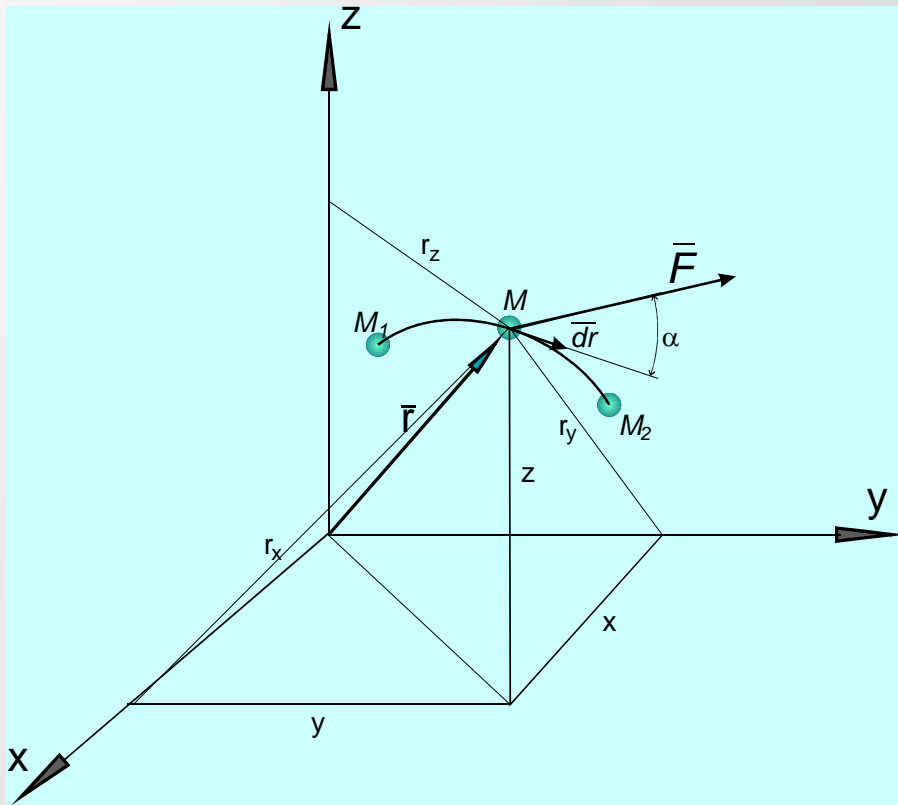
$$L = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$L = \int_{M_1}^{M_2} \{F_x dx + F_y dy + F_z dz\}$$

Jednostką Pracy jest dżul [J]:

Praca siły na krzywoliniowym przemieszczeniu

Siła \vec{F} może zależeć od czasu, położenia w przestrzeni punktu M oraz od prędkości tego punktu



$$L = \int_{M_1}^{M_2} \{F_x dx + F_y dy + F_z dz\}$$

Jeżeli dane są
równania ruchu punktu M tzn.:

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t)$$



$$dx = \dot{x}dt; dy = \dot{y}dt; dz = \dot{z}dt$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \{F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}\} dt$$

Praca siły ciężkości

Zadanie: wyznaczyć pracę siły ciężkości $F=mg$ działającej na punkt materialny M przy przejściu z położenia $\{x_1, y_1, z_1\}$ do położenia końcowego $\{x_2, y_2, z_2\}$ (*praca w polu sił potencjalnych*)

$$L = \int_{M_1}^{M_2} \{F_x dx + F_y dy + F_z dz\}$$

$$F_x = 0; F_y = 0; F_z = -mg$$

$$L = \int_{M_1}^{M_2} F_z dz$$

$$L = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mg[z_2 - z_1]$$

= Energia potencjalna

$$L = \pm mgh$$

Praca sił sprężystości

Zadanie: wyznaczyć pracę siły sprężystości $F_x = -kx$ proporcjonalnej do współrzędnej x .

$$L = \int_{M_1}^{M_2} \{F_x dx + F_y dy + F_z dz\}$$

$$F_x = -kx; F_y = 0; F_z = 0$$

$$L = \int_{M_1}^{M_2} F_x dx$$

$$L = -k \int_0^x x dx$$

$$L = -\frac{kx^2}{2}$$

Moc siły

Moc siły jest to pochodna pracy tej siły względem czasu.

$$N = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \longrightarrow \quad N = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} \quad \longrightarrow$$

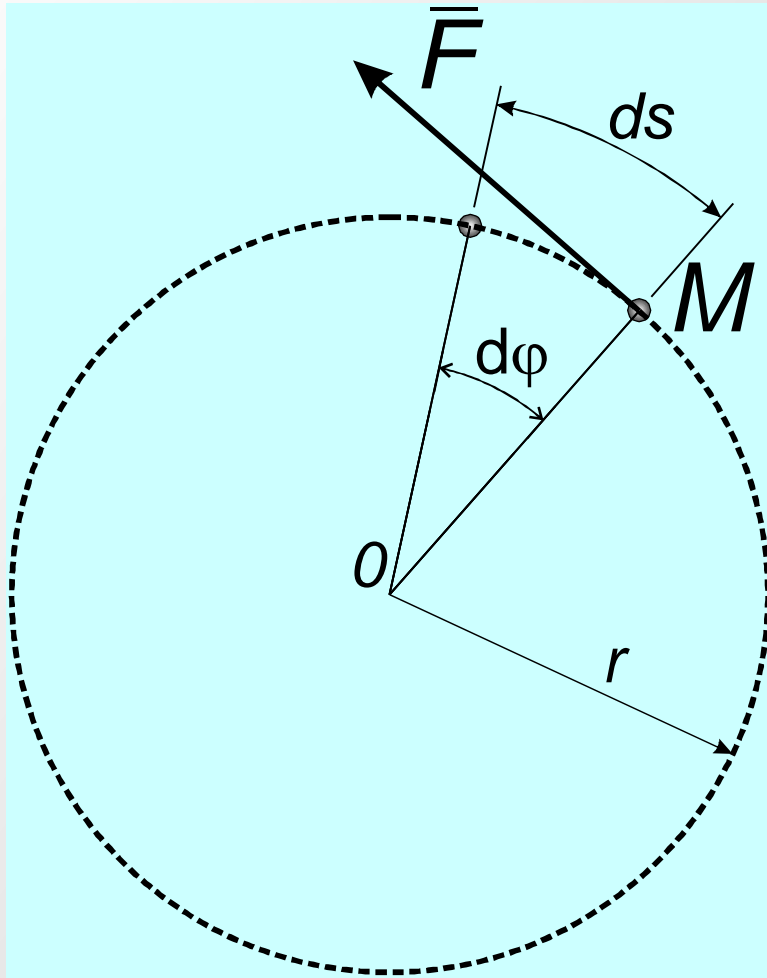
$$N = F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_z \cdot \dot{z}$$

$$\vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}$$

Jednostką Mocy jest wat [W]:

$$1[W] = 1 \left[\frac{J}{s} \right] = 1 \left[\frac{N \cdot m}{s} \right]$$

Praca i moc momentu skręcającego



$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dL = F \cdot ds = F \cdot r \cdot d\varphi$$

$$dL = M \cdot d\varphi$$

$$L = M \cdot \varphi$$

$$N = \frac{dL}{dt}$$

$$N = M \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$N = M \cdot \omega$$

Uwaga na jednostki SI!

$$\omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Jednostki mocy

Jednostką Mocy jest wat [W]:

$$1 [W] = 1 \left[\frac{J}{s} \right] = 1 \left[\frac{N \cdot m}{s} \right]$$

W praktyce używany jest kilowat [kW]:

$$1 [kW] = 1000 [W]$$

$$N = M \cdot \omega$$

$$\omega \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}; \quad n \left[obr/min \right]$$

$$M [Nm] = 9549 \frac{N [kW]}{n \left[obr/min \right]}$$

Można spotkać jednostkę mocy = 1 [KM]:

$$1 [KM] = 0.7355 [kW]$$

Po angielsku: 1 [KM] = 1 [HP]

[BHP] – brake horse power (moc uzyskana na hamowni)

Sprawność

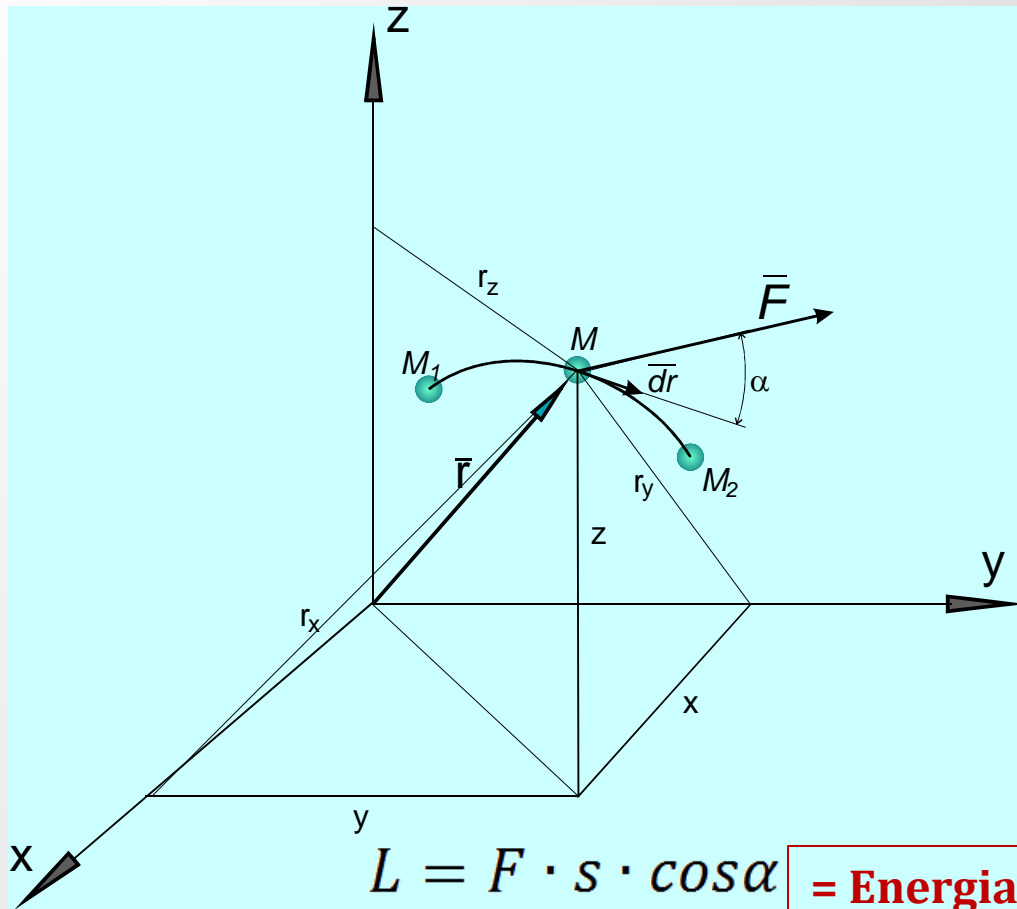
Sprawnością mechaniczną silnika nazywamy stosunek pracy (lub mocy) użytecznej do pracy (mocy) włożonej

$$\eta = \frac{L_u}{L_o} = \frac{N_u}{N_o}$$

Uproszczony przebieg mocy napędu statku (Trybologia):

- Moc – energia chemiczna paliwa
 - *Strata: ciepło gazów spalinowych -> kocioł utylizacyjny*
- Moc wewnętrzna silnika
 - *Strata: tarcie wewnętrzne -> chłodzenie układu -> wyparownik*
- Moc na końcu napędowym silnika
 - *Strata: tarcie łożysk -> chłodzenie łożysk*
- Moc na stożku śruby napędowej
 - *Straty hydrodynamiczne -> wake, kilwater*
- Moc napędu statku

Energia kinetyczna -> Praca



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$F \cdot \cos \alpha = m \frac{dv}{dt} \cdot v dt$$

$$F \cos \alpha \cdot v dt = m v dv$$

$$v dt = ds \quad v dv = d\left(\frac{1}{2} \cdot v^2\right)$$



$$F(\cos \alpha) ds = m d\left(\frac{1}{2} v^2\right)$$

$$dL = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dE_k$$

$$L_{1,2} = E_2 - E_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Energia kinetyczna -> Moc

$$L_{1,2} = E_2 - E_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Zasada energii i pracy: przyrost energii kinetycznej równa się pracy wszystkich sił na drodze, na której ten przyrost nastąpił.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Energia kinetyczna punktu materialnego jest to wielkość skalarna (zawsze dodatnia) równa połowie iloczynu masy punktu i kwadratu jego prędkości.

$$N = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = dE_k$$



$$N = \frac{dE_k}{dt} = \dot{E}_k$$

Postać różniczkowa zasady energii: Moc równa się pochodnej energii kinetycznej względem czasu.

Energia kinetyczna

Energia kinetyczna ciała materialnego jest to wielkość skalarna równa połowie iloczynu masy ciała i kwadratu prędkości jego środka ciężkości.

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2}$$

Energia kinetyczna ciała materialnego w ruchu obrotowym jest to wielkość skalarna równa połowie iloczynu masowego momentu bezwładności ciała i kwadratu jego prędkości kątowej.

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Energia kinetyczna ciała materialnego w ruchu płaskim (twierdzenie Koeniga) jest równa sumie energii ruchu postępowego i energii ruchu obrotowego wokół środka masy.

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Zasada zachowania energii

Zasada pracy i energii kinetycznej:

$$L_{1,2} = E_k^2 - E_k^1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Zasada pracy i energii potencjalnej:

$$L_{1,2} = E_p^2 - E_p^1 = mgz_1 - mgz_2$$



$$E_p + E_k = \text{const.}$$

Twierdzenie o zachowaniu energii mechanicznej: w układzie izolowanym energia mechaniczna (suma energii kinetycznej i potencjalnej) ciała materialnego jest wielkością stałą.

Pęd punktu materialnego

Pędem punktu materialnego nazywamy iloczyn masy punktu przez jego prędkość

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$$

$$\sum_{i=0}^n \bar{F}_i = m \cdot \bar{a} = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$\sum_{i=0}^n \bar{F}_i = \frac{d}{dt} \{ \bar{Q} \}$$

Pochodna pędu jest równa sumie sił działających na dany punkt materialny

Impuls siły - popęd

$$\sum_{i=0}^n \bar{F}_i = \frac{d}{dt} \{ \bar{Q} \} \quad \longrightarrow \quad \bar{F}_w = \frac{d}{dt} \{ \bar{Q} \}$$

$$d\bar{Q} = \bar{F}_w dt$$

**Elementarny
impuls siły**

$$\int_{Q_1}^{Q_2} d\bar{Q} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_w dt$$


$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_w dt$$

Popęd

Popęd dla bardzo krótkich chwil czasu nazywamy impulsem siły

Zasada pędu i popędu

$$\overline{Q}_2 - \overline{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}_w dt$$

jeżeli: $\overline{F}_w = const$  $\overline{Q}_2 - \overline{Q}_1 = \overline{F}_w \cdot \{t_2 - t_1\}$


$$m \cdot \overline{v}_2 - m \cdot \overline{v}_1 = \overline{F}_w \cdot \{t_2 - t_1\}$$

Zasada pędu i popędu (twierdzenie o przyroście pędu) pozwala na powiązanie (wyznaczenie) początkowych i końcowych parametrów ruchu przy stałej sile oddziaływania; nie określimy jednak przy jej pomocy równań ruchu.

Zasada zachowania pędu

$$\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_w dt$$

jeżeli: $\bar{F}_w(t) = 0$  $\bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 = 0$


 $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2 = \text{const}$


 $m \cdot \bar{v} = \text{const}$

$$m \cdot v_x = \text{const} \quad m \cdot v_y = \text{const} \quad m \cdot v_z = \text{const}$$

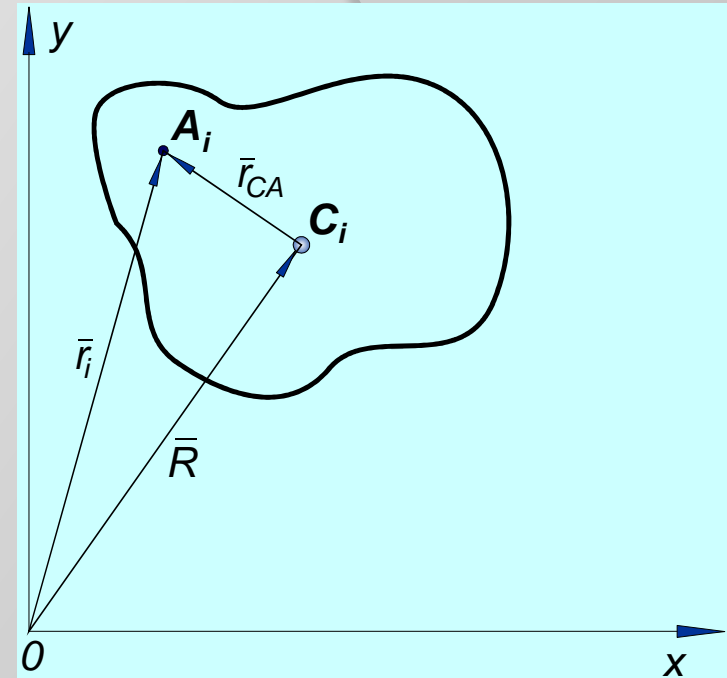
Zasada zachowania pędu jest słuszna również dla układu punktów materialnych lub dla ciała sztywnego.

Zasada pędu ciała sztywnego (układu punktów materialnych)

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}_C$$

Pęd ciała sztywnego jest równy iloczynowi sumarycznej masy ciała przez prędkość jego środka masy (ciężkości).

Powyższa zasada pędu ciała sztywnego jest słuszna dla dowolnego ruchu bryły sztywnej



$$\sum_{i=0}^n \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \{ \vec{Q} \}$$

Suma sił zewnętrznych działających na układ punktów materialnych równa się pochodnej względem czasu, pędu tego układu

Siły wewnętrzne nie mogą zmienić pędu całego układu!

Zasada ruchu środka masy

$$\sum_{i=0}^n \bar{F}_i = \frac{d}{dt} \{\bar{Q}\}$$

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}_C$$



$$\sum_{i=0}^n \bar{F}_i = \frac{d}{dt} \{m \cdot \bar{v}_C\}$$

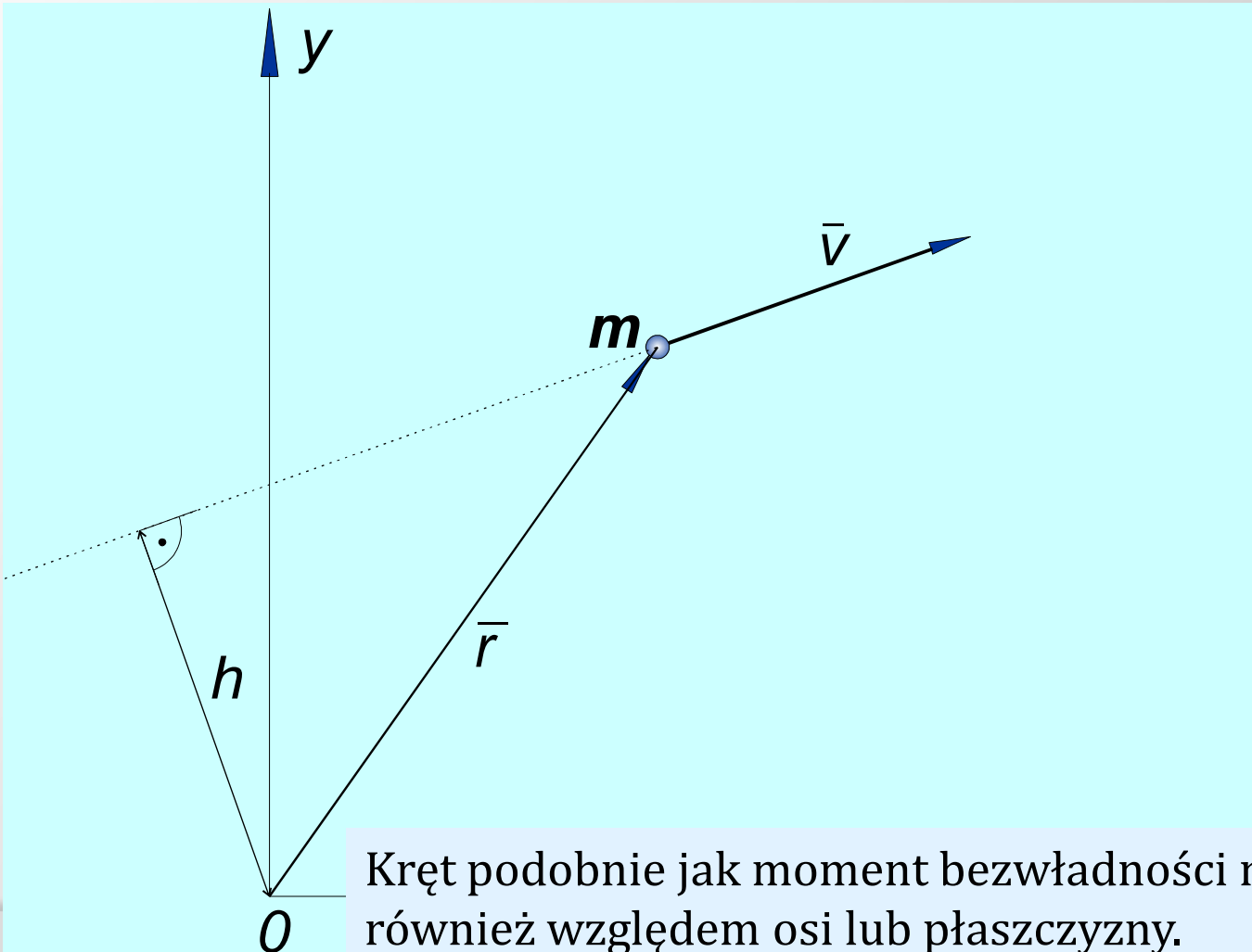
$$\sum_{i=0}^n \bar{F}_i = m \cdot \bar{a}_C$$

Środek masy ciała porusza się w ten sposób, jakby działały na niego wszystkie siły działające na ciało (jak punkt materialny)

Pierwsza zasada dynamiki odnosi się również do ruchu środka masy. Siły wewnętrzne nie wpływają na ruch środka masy ciała lub układu punktów materialnych. Wszystkie zasady dotyczące pędu punktu materialnego dotyczą również środka masy ciała sztywnego.

Kręt punktu materialnego

Krętem punktu materialnego względem punktu O nazywamy iloczyn wektorowy pędu tego punktu oraz wektora wodzącego tego punktu.



$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

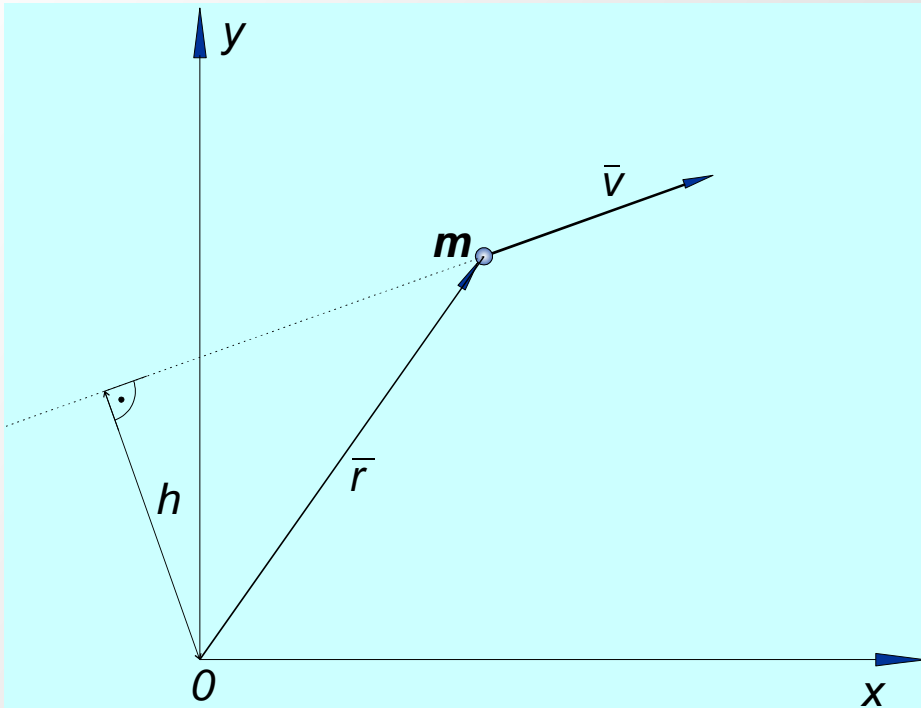
$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times \vec{Q}$$

Moduł
wektora krętu:

$$K_0 = mv \cdot h$$

Kręt podobnie jak moment bezwładności może być wyznaczany również względem osi lub płaszczyzny.

II zasada dynamiki w ruchu obrotowym



$$\bar{F} = m \cdot \bar{a} = m \cdot \ddot{\bar{r}}$$

$$\bar{M}_0 = \bar{F} \times \bar{r}$$

$$\bar{F} \times \bar{r} = m \cdot \ddot{\bar{r}} \times \bar{r}$$

$$\bar{M}_0 = \frac{d}{dt} \{m \cdot \dot{\bar{r}}\} \times \bar{r}$$

$$m \cdot \dot{\bar{r}} = \bar{Q}$$

$$\bar{M}_0 = \frac{d}{dt} \{\bar{K}\}$$

Postać różniczkowa zasady krętu: moment sił zewnętrznych działających na ciało materialne jest równy pochodnej krętu względem czasu.

Postać całkowa zasady krętu

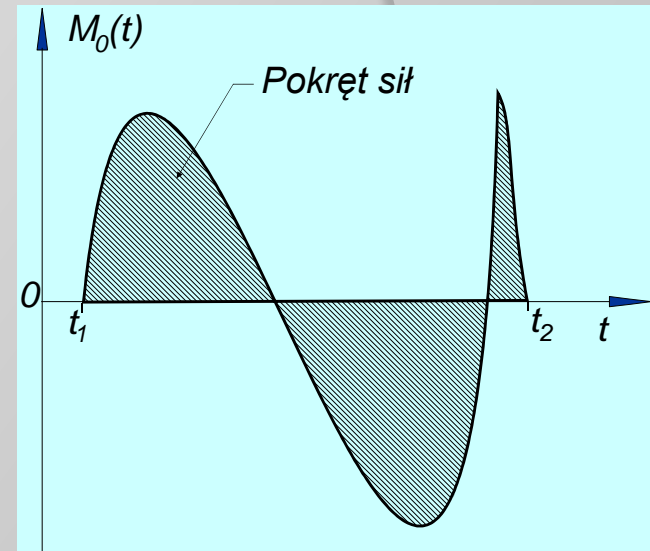
$$\overline{M}_0 = \frac{d}{dt} \{ \overline{K} \}$$

$$\overline{M}_0 dt = d\overline{K}$$

Pokręt siły
działającej
w czasie Δt

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{M}_0 dt = \int_{K_1}^{K_2} d\overline{K}$$

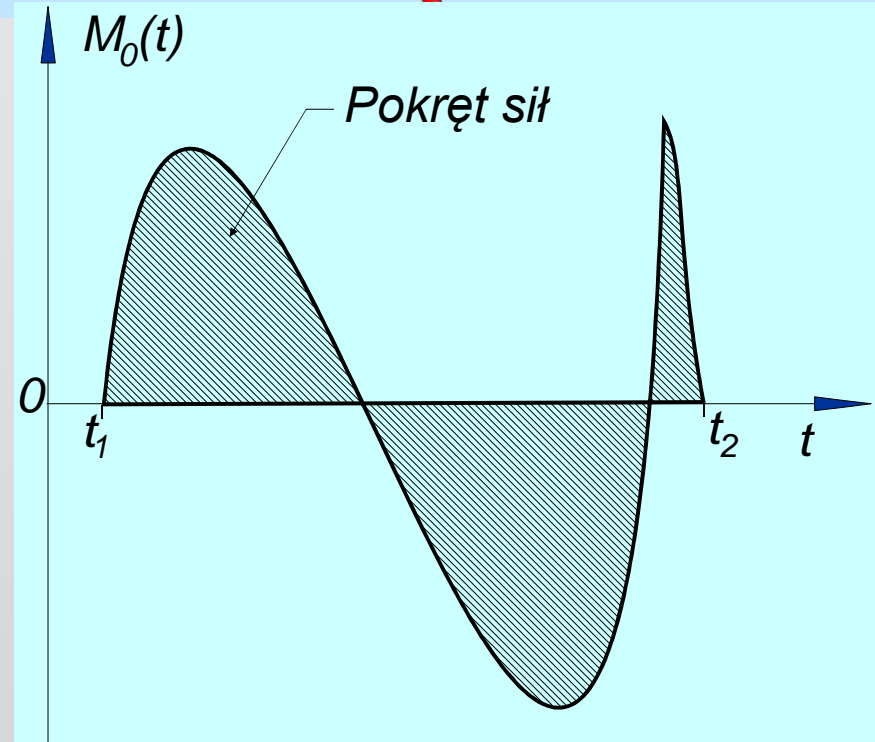
$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{M}_0 dt = \overline{K}_2 - \overline{K}_1$$



Przyrost krętu punktu materialnego względem punktu O jest równy pokrętowi sił działających na ten punkt względem punktu O .

Zasada zachowania krętu

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{M_0} dt = \overline{K_2} - \overline{K_1}$$



jeżeli: $\int_{t_1}^{t_2} \overline{M_0} dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{K_1} = \overline{K_2} = \overline{K} = \text{const.}$

$$\vec{r} \times m \cdot \vec{v} = \text{const.}$$

Jeżeli pokręt sił zewnętrznych działających na punkt materialny jest równy zeru, to kręt tego punktu nie ulega zmianie.

Zasady krętu dla bryły sztywnej

Krętem bryły sztywnej względem punktu O nazywamy sumę krętów poszczególnych punktów tego ciała względem punktu O .

$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$



$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1}^n \{\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i\}$$

$$\overline{M}_0 = \frac{d}{dt} \{\overline{K}\}$$



$$\sum_{i=1}^n \overline{M}_{i,0} = \frac{d}{dt} \{\overline{K}_0\}$$

Suma momentów wszystkich sił zewnętrznych względem dowolnego nieruchomego bieguna " O " równa jest pochodnej względem czasu krętu układu punktów materialnych względem tego samego bieguna.

Zasady krętu dla bryły sztywnej

Jeżeli za bieżący przyjmujemy początek prostokątnego układu współrzędnych $\{0,x,y,z\}$ to równania wektorowej zasady krętu można przekształcić w równania skalarne:

Moment
siły zewnętrznej
względem osi Ox

$$\sum_{i=1}^n \overline{M_{i,0}} = \frac{d}{dt} \{ \overline{K_0} \}$$

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{ix}$$

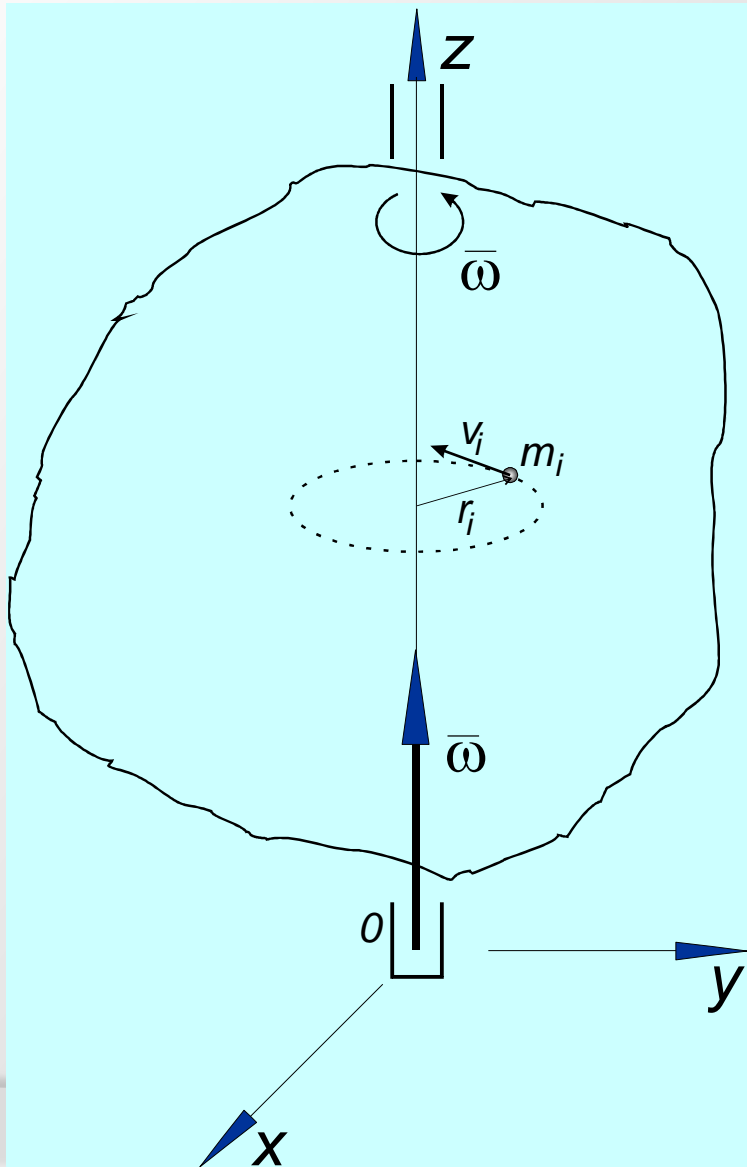
$$\frac{dK_y}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iy}$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iz}$$

Jeżeli suma momentów wszystkich sił zewnętrznych względem dowolnego bieguna „ O ” równa się zeru, to kręt układu względem tego bieguna jest wielkością stałą.

$$\overline{K_1} = \overline{K_2} = \overline{K} = const.$$

Kręt bryły sztywnej w ruchu obrotowym wokół stałej osi



$$v_i = \omega \cdot r_i$$

pęd: $Q_i = m_i \cdot v_i$

kręt: $K_{iz} = m_i v_i \cdot r_i$

$$K_{iz} = m_i \omega r_i^2$$

$$K_z = \sum_{i=1}^n K_{iz} = \omega \cdot \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

$$K_z = \bar{K} = I_z \cdot \bar{\omega}$$

Kręt bryły sztywnej względem stałej osi obrotu jest równy iloczynowi momentu bezwładności względem tej osi obrotu i prędkości kątowej ciała.

Dynamiczne równanie ruchu obrotowego

$$\overline{M}_0 = \frac{d}{dt} \{ \overline{K} \}$$

$$\overline{K} = I \cdot \overline{\omega}$$



$$\overline{M}_0 = \frac{d}{dt} \{ I \cdot \overline{\omega} \}$$

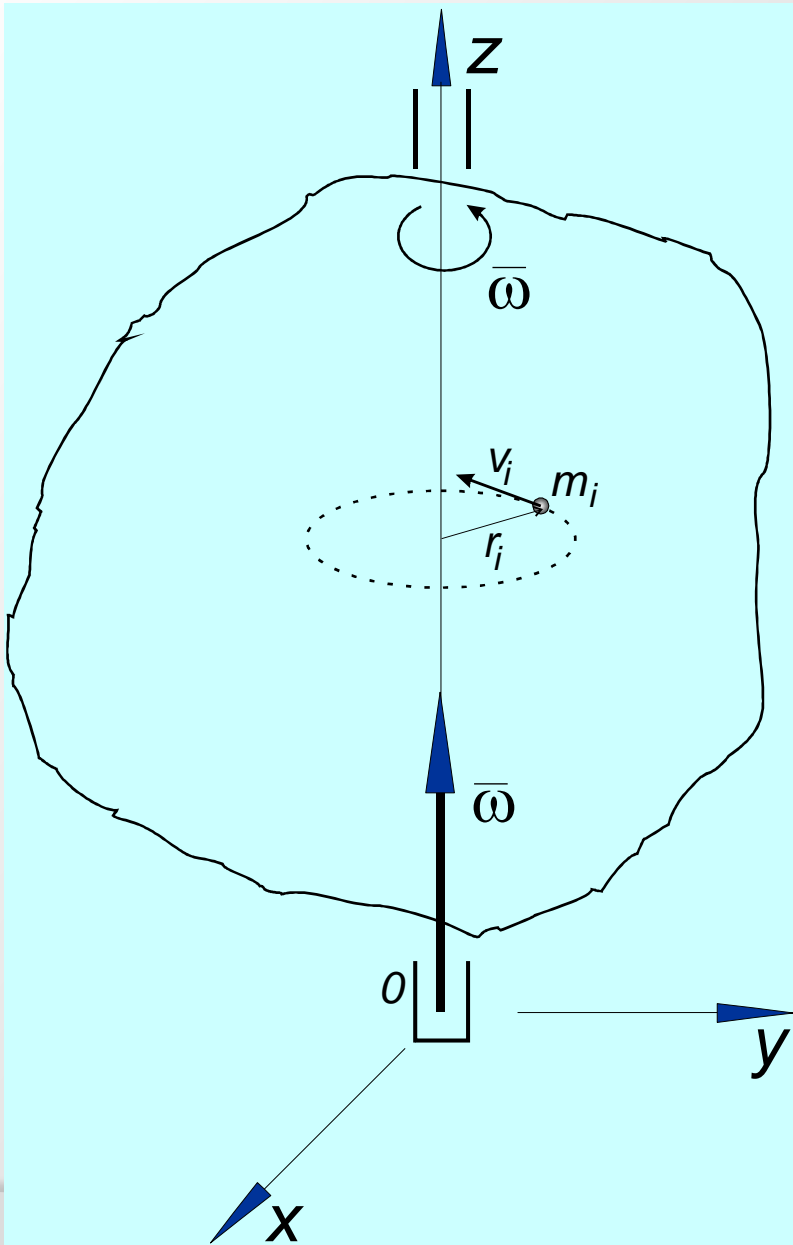
$$\overline{M}_0 = I \cdot \overline{\varepsilon}$$

Moment sił zewnętrznych działający na bryłę w ruchu obrotowym, wokół stałej osi, równa się iloczynowi momentu bezwładności względem tej osi przez przyspieszenie kątowe.

a w ruchu postępowym:

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a}$$

Równania dynamiczne ruchu obrotowego



$$K_z = \bar{K} = I_z \cdot \bar{\omega}$$

kręt: $K_{iz} = m_i v_i \cdot r_i$

$$K_{iz} = m_i \omega r_i^2$$

postać różniczkowa zasady krętu:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_{i,0} = \frac{d}{dt} \{\bar{K}\}$$

dynamiczne równania ruchu obrotowego:

$$\bar{M}_0 = \frac{d}{dt} \{I \cdot \bar{\omega}\}$$

$$\bar{M}_0 = I \cdot \bar{\varepsilon}$$

Reakcje łożysk obracającej się bryły

$$\sum_{i=1}^n \overline{M}_{l,0} = \frac{d}{dt} \{\overline{K}\}$$

$$\sum_{i=0}^n \overline{F}_l = \frac{d}{dt} \{\overline{Q}\}$$

$$\overline{M}_0 = \frac{d}{dt} \{I \cdot \overline{\omega}\}$$

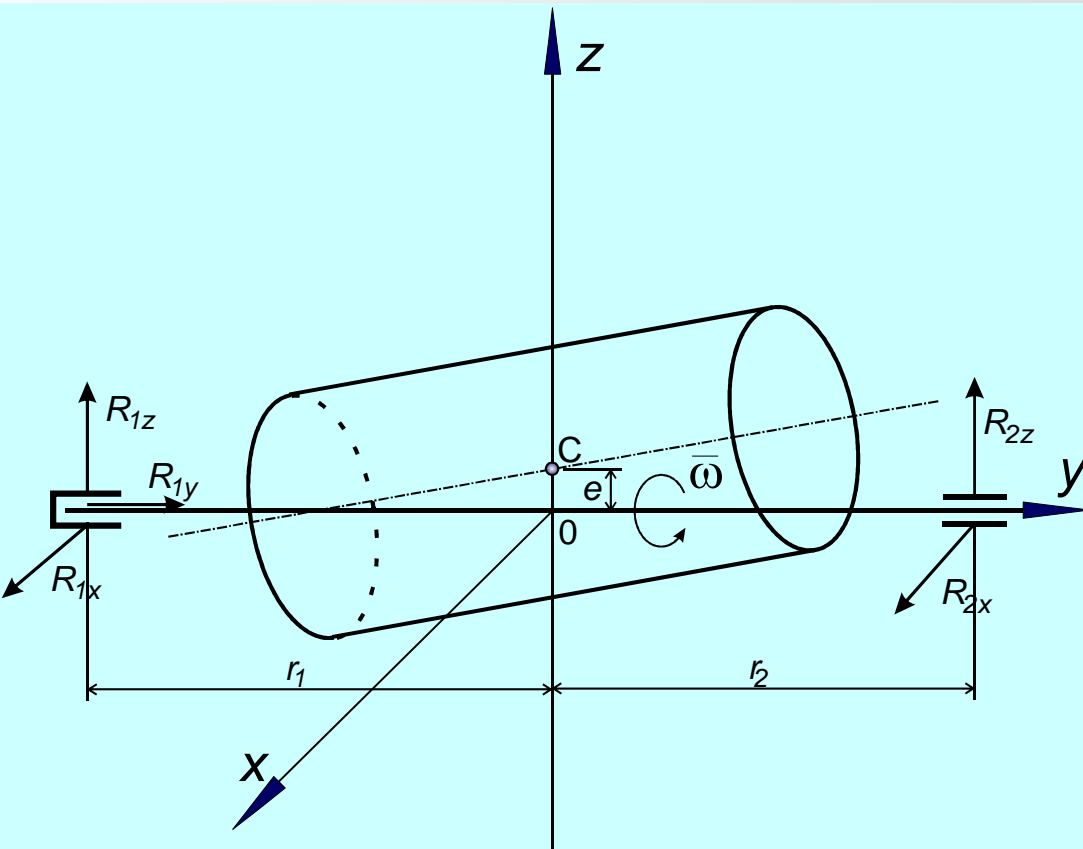
$$\overline{F}_w = \frac{d}{dt} \{m \cdot \vec{v}\}$$

Rozpatrujemy ruch bryły względem stałej osi (ułożyskowanej) ze stałą prędkością kątową ω

- **Reakcje statyczne:** reakcje niezależne od prędkości kątowej bryły (mogą być zależne od czasu) spowodowane działaniem czynnych sił zewnętrznych np. ciężar ciała, napęd obrotowy bryły (przekładnia, pas napędowy)
- **Reakcje dynamiczne:** reakcje zależne od prędkości kątowej bryły związane z niewyrównoważeniami bryły a nie spowodowane działaniem czynnych sił zewnętrznych.

Wyznaczanie reakcji

1. -> postać różniczkowa zasady pędu



$$\sum_{i=0}^n \bar{F}_i = \frac{d}{dt} \{ \bar{Q} \}$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{d(m\bar{v}_c)}{dt} = \frac{d(m\bar{\omega} \cdot \bar{r}_c)}{dt}$$

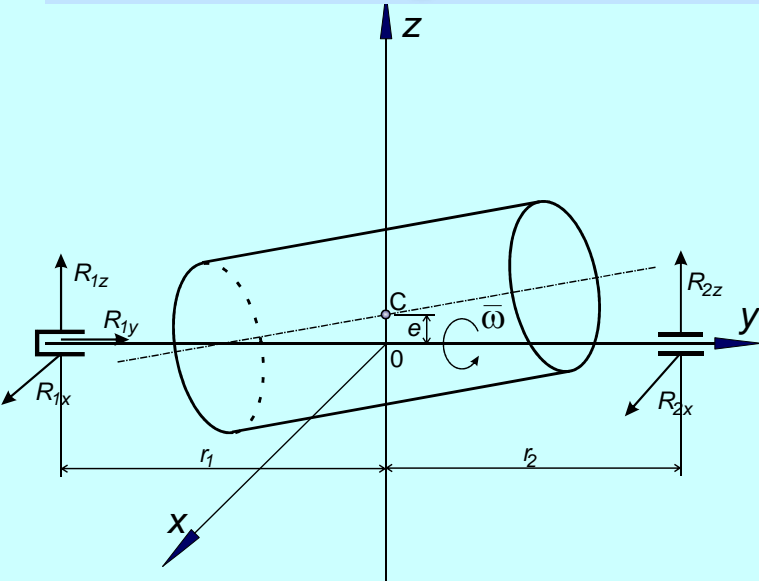
$$\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c = \bar{\omega} \cdot e$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = m\omega^2 e$$

$$m\omega^2 e = R_1 + R_2$$

Wyznaczanie reakcji

2. -> postać różniczkowa zasady krętu



$$\sum_{i=1}^n \overline{M}_{i,0} = \frac{d}{dt} \{\overline{K}\} \Rightarrow \frac{dK_{x,z}}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{i_{x,z}}$$

ponieważ: $v_y = 0 \rightarrow K_y = 0$

$$\frac{dK_x}{dt} = \frac{d(mv_x z)}{dt} = \frac{d(m\omega z \cdot z)}{dt}$$

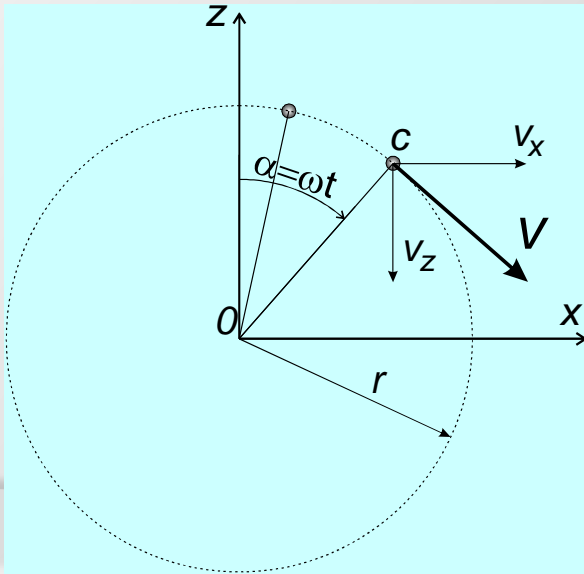
ponieważ: $v_x = \omega \cdot z$

$$z = r \cdot \cos \alpha = r \cdot \cos(\omega t)$$

$$\frac{dz^2}{dt} = \frac{d}{dt} [r^2 \cos^2(\omega t)] = -r^2 \omega \cdot \sin(2\omega t)$$

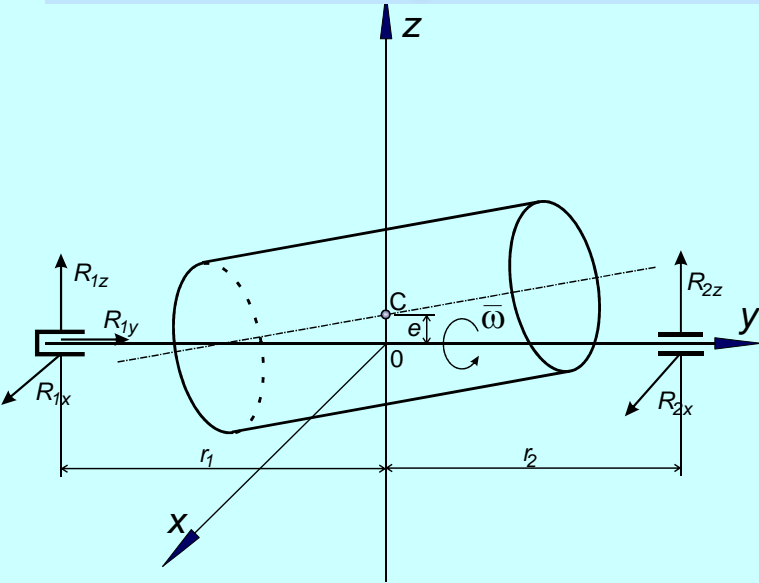
$$\frac{dK_x}{dt} = -m\omega^2 r^2 \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\frac{dK_x}{dt} = -I_0 \omega^2 \cdot \sin(2\omega t)$$



Wyznaczanie reakcji

2. -> postać różniczkowa zasady krętu



$$\frac{dK_Z}{dt} = \frac{d(mv_z x)}{dt} = \frac{d(m\omega x \cdot x)}{dt}$$

$$x = r \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin(\omega t)$$

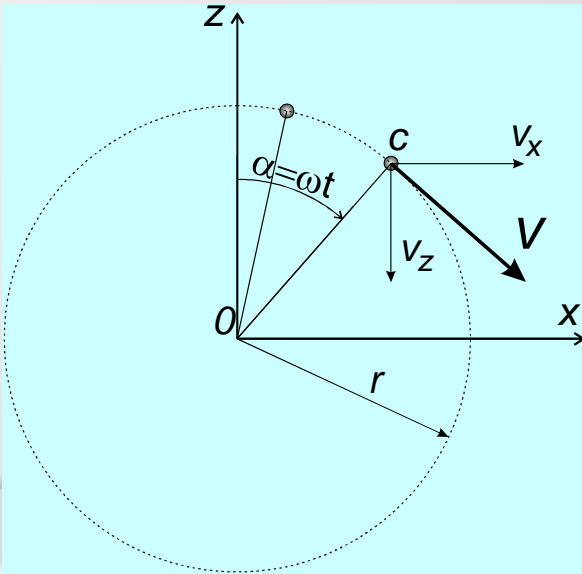
$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{d}{dt} [r^2 \sin^2(\omega t)] = r^2 \omega \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\frac{dK_Z}{dt} = m\omega^2 r^2 \cdot \sin(2\omega t)$$

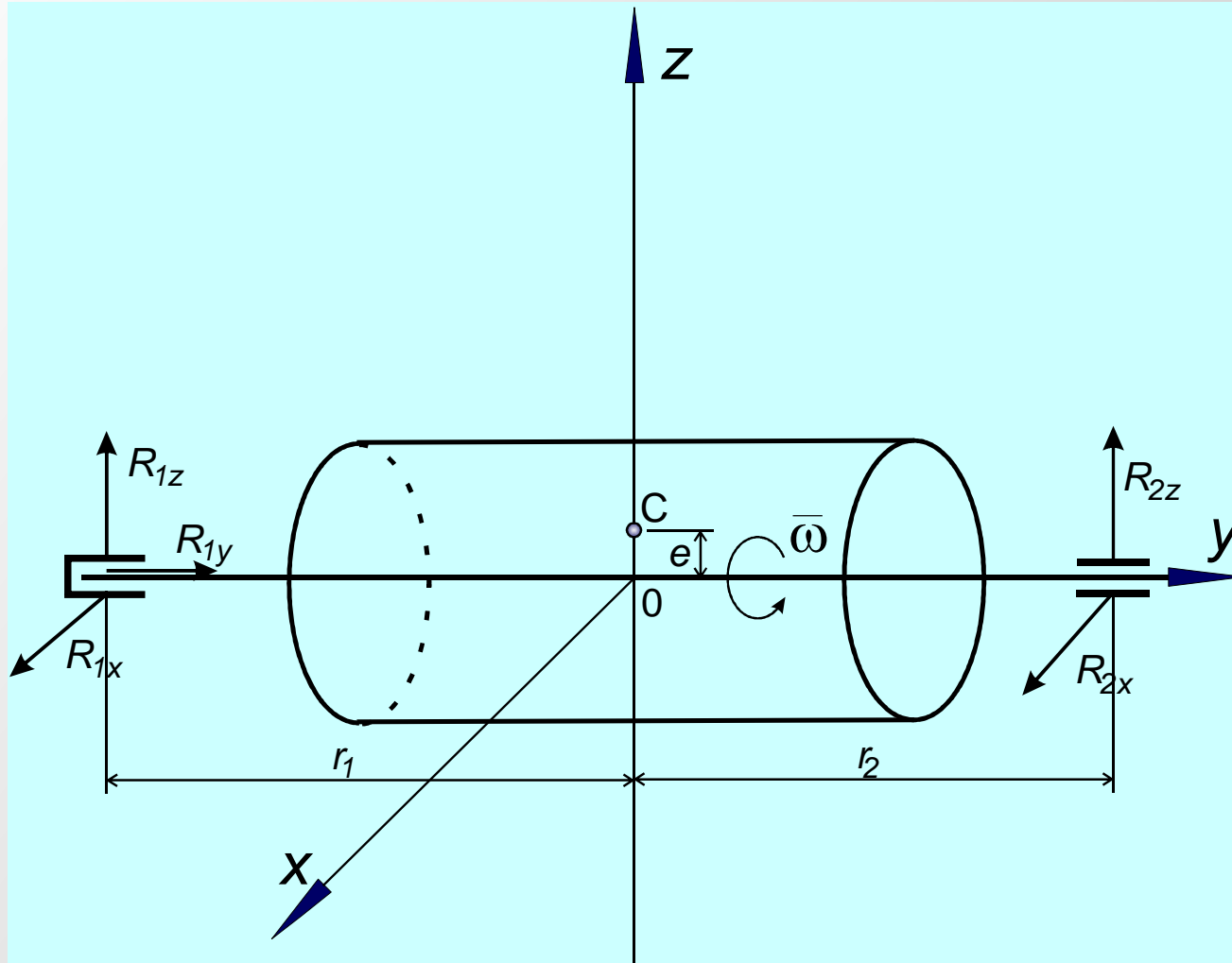
$$\frac{dK_Z}{dt} = I_0 \omega^2 \cdot \sin(2\omega t)$$

$$-I_0 \omega^2 \cdot \sin(2\omega t) = R_{1z} \cdot r_1 - R_{2z} \cdot r_2$$

$$I_0 \omega^2 \cdot \sin(2\omega t) = R_{1x} \cdot r_1 - R_{2x} \cdot r_2$$



Wyznaczanie reakcji niewyrównoważenie statyczne



z zasady pędu:

$$m\omega^2 e = R_1 + R_2$$

z zasady krętu:

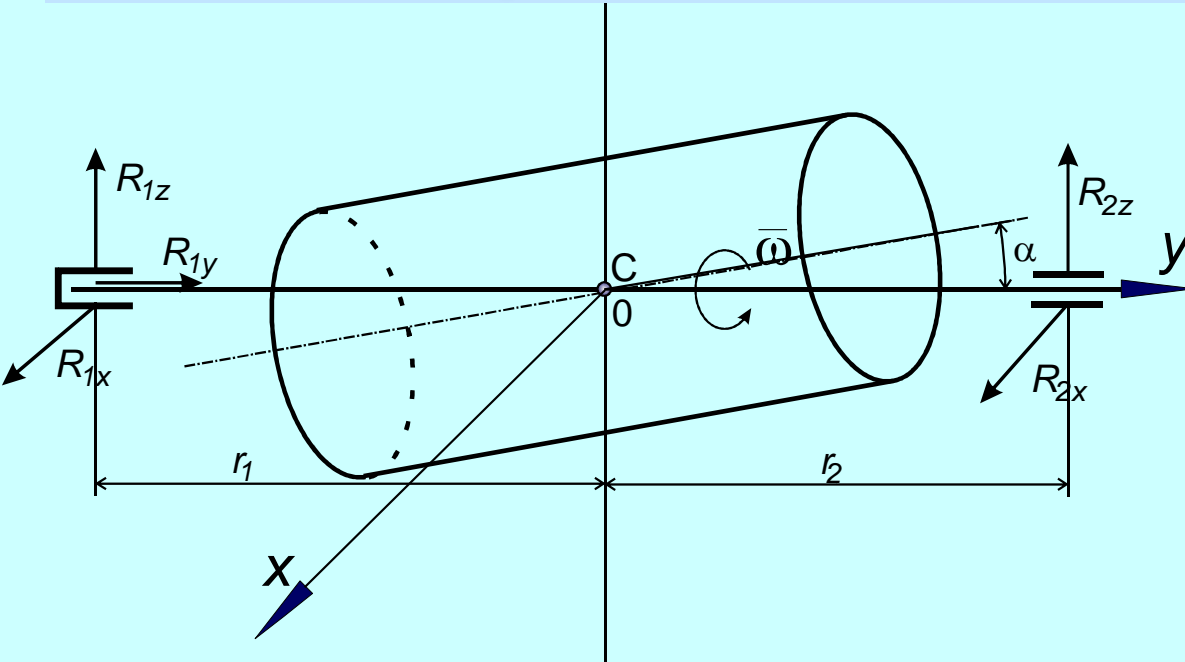
$$R_1 \cdot r_1 + R_2 \cdot r_2 = 0$$

bo kręt jest stały

$$R_1 = me\omega^2 \frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

$$R_2 = me\omega^2 \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

Wyznaczanie reakcji niewyrównoważenie dynamiczne



z zasady pędu:

$$R_1 + R_2 = 0$$

bo pęd jest zerowy

z zasady krętu:

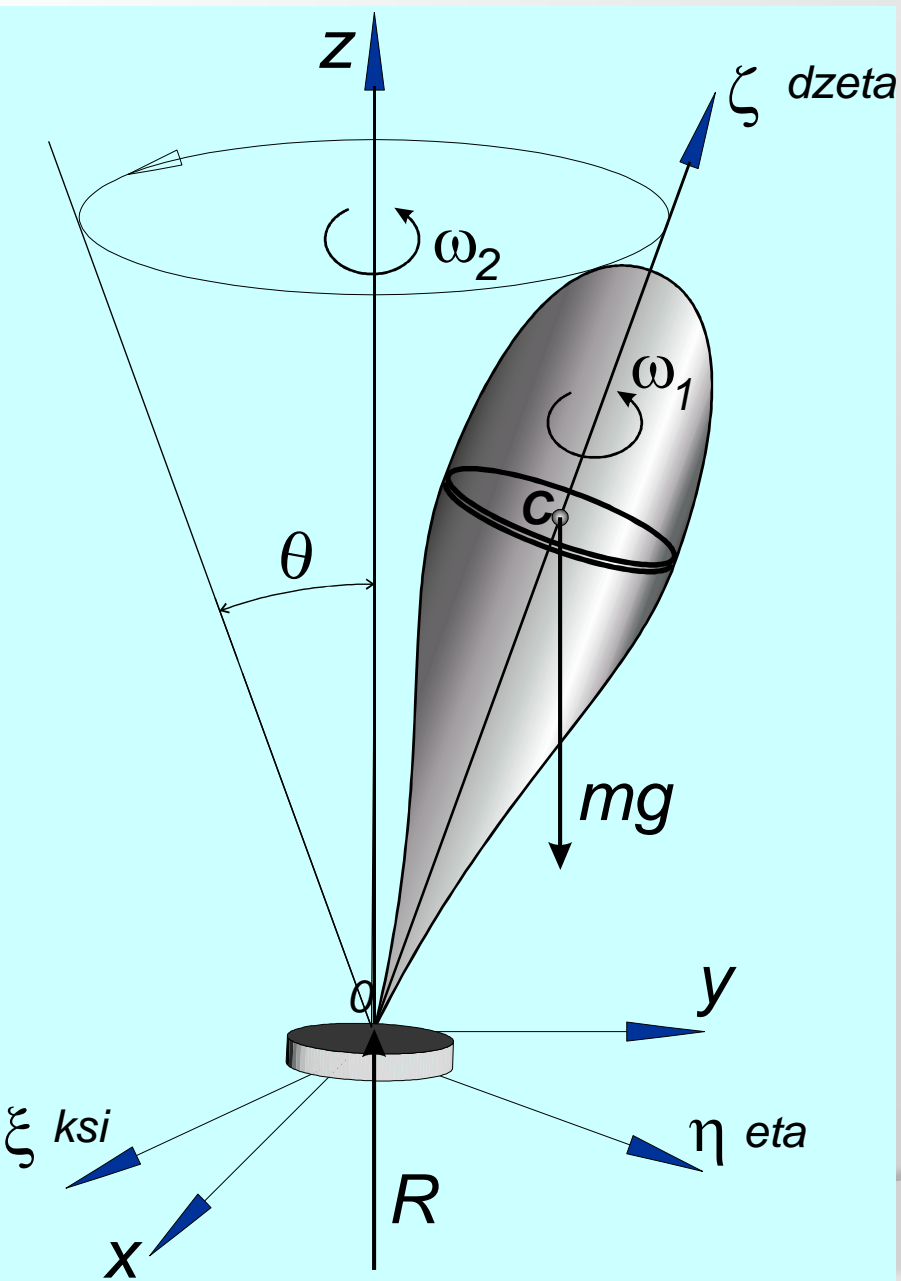
$$-I_0 \omega^2 \cdot \sin(2\alpha) = R_{1x} \cdot r_1 + R_{1x} \cdot r_2$$

$$I_0 \omega^2 \cdot \sin(2\alpha) = R_{1z} \cdot r_1 + R_{1z} \cdot r_2$$

$$R_1 = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1z}^2}$$

$$R_1 = -R_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{I_0 \omega^2 \cdot \sin(2\alpha)}{r_1 + r_2}$$

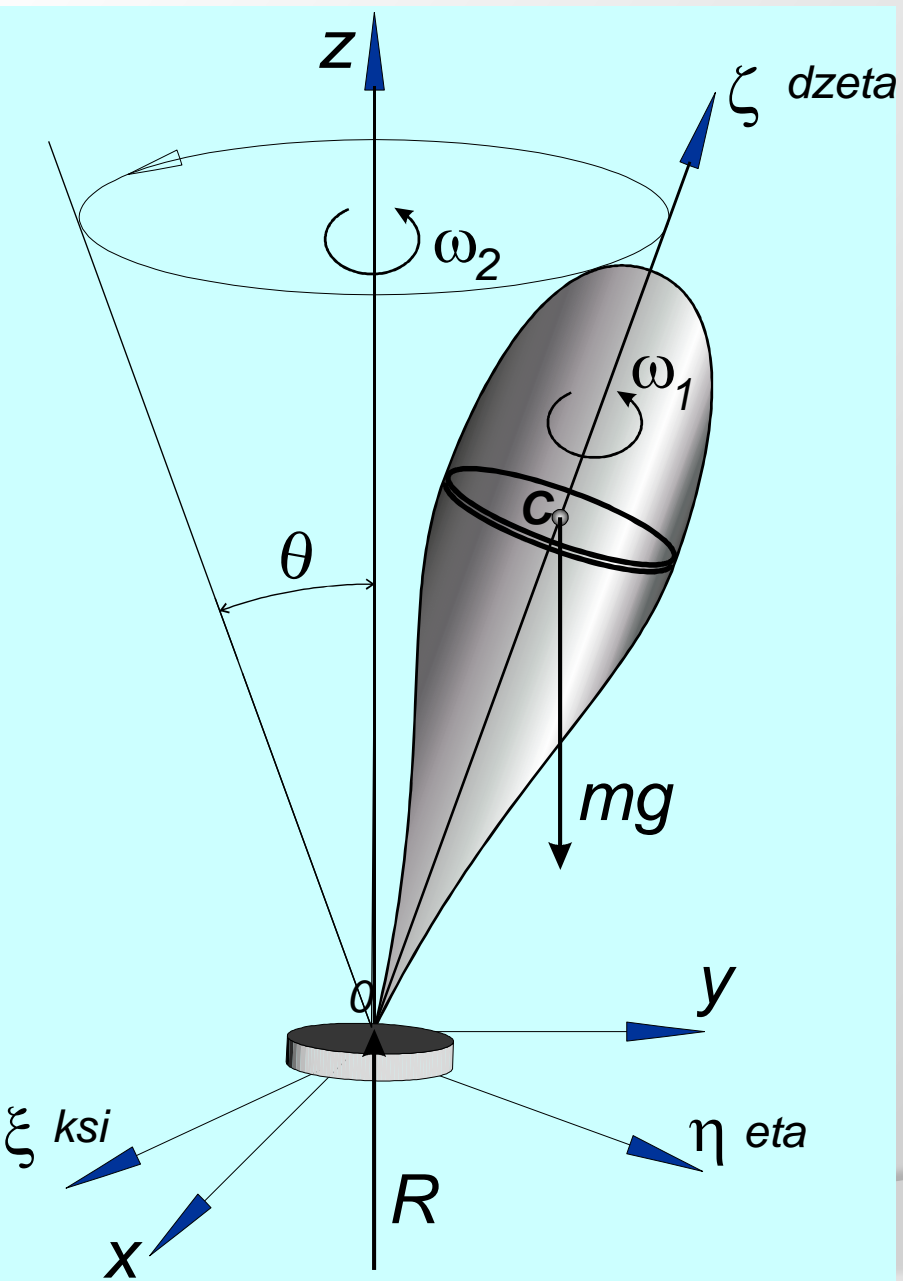
Żyroskop



Żyroskopem nazywamy ciało, w postaci bryły obrotowej, posiadające oś symetrii i obracające się wokół tej osi.

Efekt żyroskopowy jest to zjawisko, zachodzące kiedy obracająca się bryła, w sposób wymuszony, zmienia w przestrzeni położenie osi swojego obrotu; efekt żyroskopowy wywołuje powstanie dodatkowego momentu sił bezwładności, który przeciwdziała zmianie położenia osi obrotu bryły.

Żyroskop



Jeżeli $z \equiv \zeta$ to $M_z = 0$ (siła ciężkości i reakcja leżą w jednej płaszczyźnie) i mamy równowagę chwiejną (chwilową) gdzie:

$$K_z = \bar{K} = I_z \cdot \bar{\omega}$$

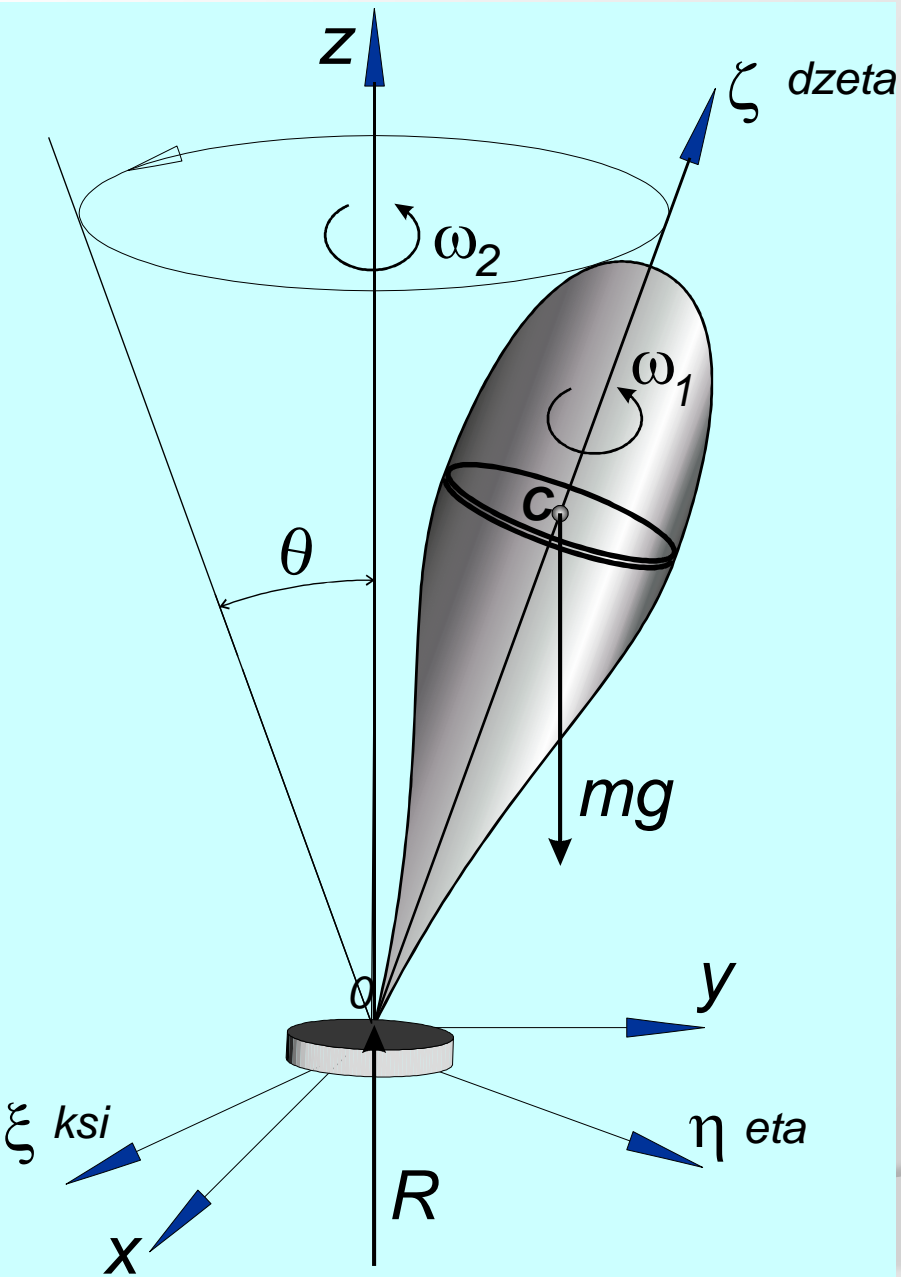
Jeżeli $z \neq \zeta$ (odchylenie o kąt θ) to M_z spowoduje powstanie prędkości kątowej **precesji** (wirowanie osi obrotu ζ wokół osi z).

Ponieważ $\omega_2 \ll \omega_1$ to zakładamy że:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \cong \vec{\omega}_1$$

$$\vec{K} = I \cdot \vec{\omega}_1$$

Żyroskop



Zakładamy, że:

$$\omega_1 = \text{const} \quad \theta = \text{const}$$

$$\overline{M}_0 = \frac{d}{dt} \{ \overline{K} \}$$



$$\overline{M}_0 = \overline{\omega}_2 \times I \overline{\omega}_1$$

**Uprozczone równanie
teorii żyroskopu**

$$\omega_2 = \frac{mg \cdot |OC|}{I \omega_1}$$

Żyroskop - uwagi

$$\omega_2 = \frac{mg \cdot |OC|}{I\omega_1}$$

$$M_0 = I\omega_1\omega_2 \cdot \sin \theta$$

Im większa jest prędkość obrotu własnego tarczy, tym mniejsza powinna być prędkość precesji, przy której oś bryły będzie zachowywała swoje położenie, pomimo braku sił (momentów) podtrzymujących bryłę.

Z wystąpieniem **efektu żyroskopowego** (pojawienie się dodatkowego momentu sił) trzeba liczyć się w maszynach, w których mamy do czynienia z szybko-obracającym się wirnikiem, których oś obrotu zostaje dodatkowo wprowadzona w ruch **precesyjny**.

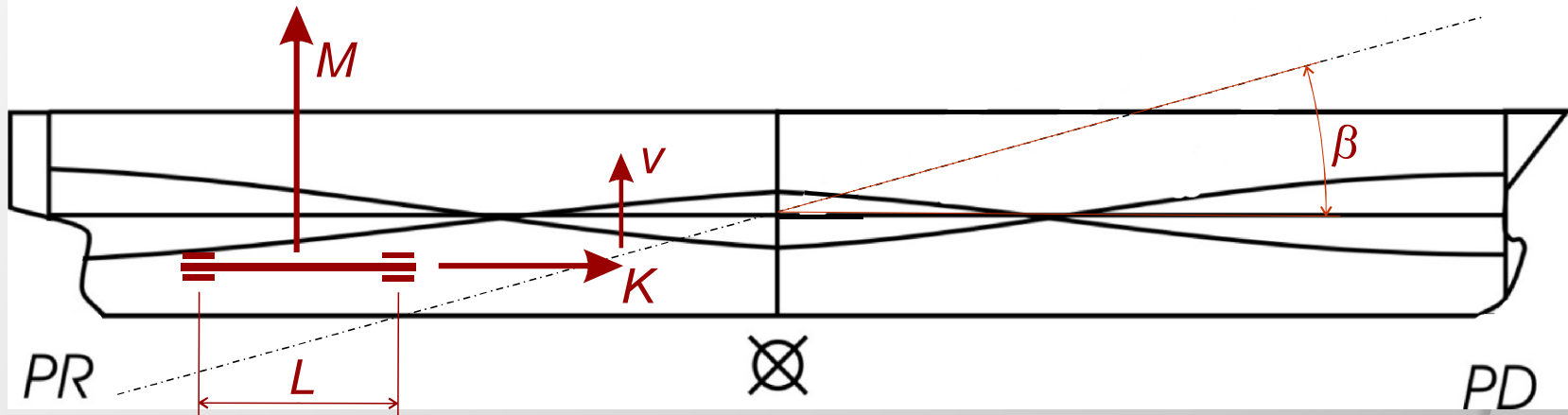
Przykład: wał turbiny okrętowej, w której łożyskach podczas zwrotu statku lub jego kołysania, wystąpią dodatkowe reakcje dynamiczne.

Zastosowania zjawiska żyroskopowego:

- Tłumik kołysania bocznego statku (prędkości kątowe prostopadłe ω_1 i ω_2 do siebie)
- Szybko obracająca się tarcza w zawieszeniu Cardana -> żyrokompas, żyrohoryzont, automatyczny pilot itp.

Żyroskop - przykład 2

Zadanie: Wyznaczyć dodatkowe (żyroskopowe) reakcje łożysk turbiny związane z kołysaniem wzdłużnym statku (pominąć nieosiowość usytuowania turbiny względem osi statku)



$$\beta = \beta_{max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

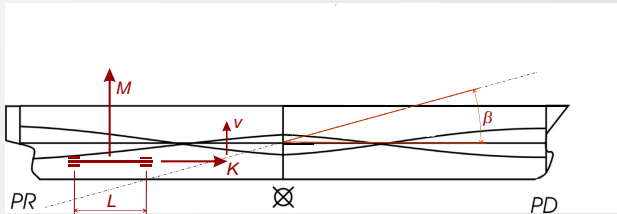
gdzie: T - okres kołysania [s]

Żyroskop - przykład 2

$$\beta = \beta_{max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

prędkość kątowna kołysania ω_2 :

$$\omega_2 = \dot{\beta} = \beta_0 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$



$$\omega_{2max} = \beta_0 \frac{2\pi}{T}$$

prędkość kątowna obrotów turbiny ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n}{30}$$

gdzie: n – prędkość obrotowa wirnika turbiny [*obr/min*]

Żyroskop - przykład 2

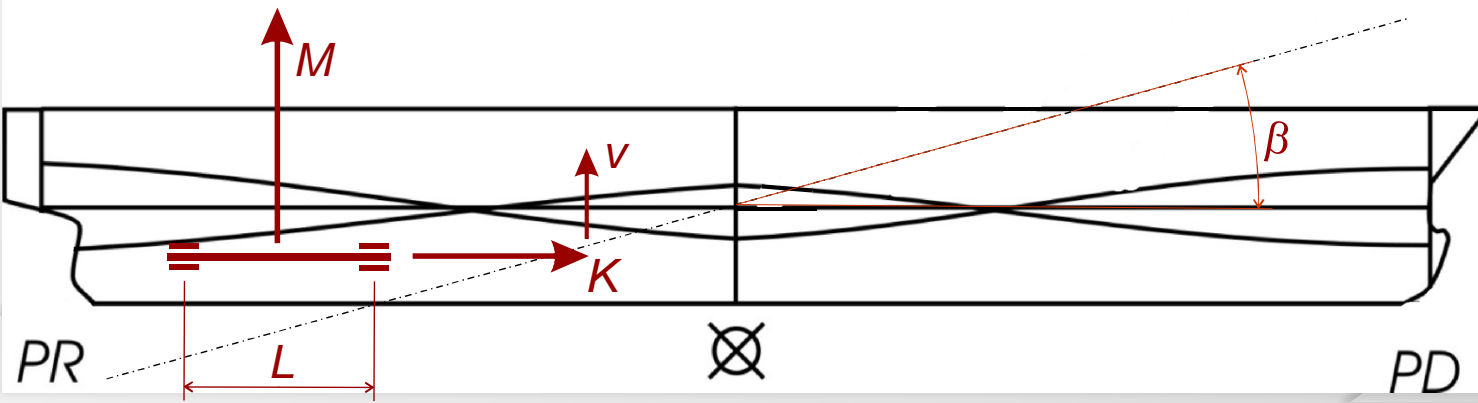
$$M_0 = I \omega_1 \omega_2 \cdot \sin \theta$$

ponieważ ω_1 jest prostopadłe do ω_2 to:

$$R_{max} \cdot L = I \frac{\pi n}{30} \cdot \beta_0 \frac{2\pi}{T}$$

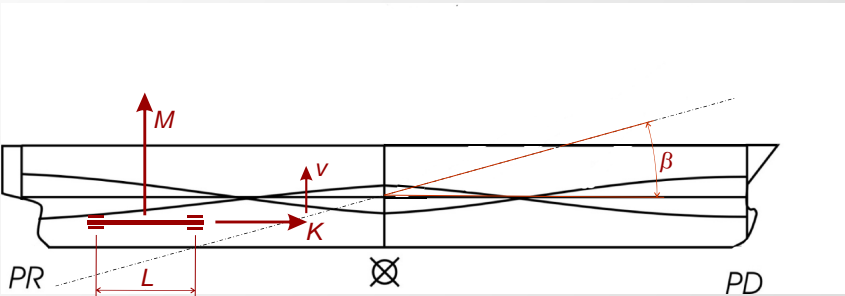
$$R_{max} = \frac{2\pi^2 \beta_0 I n}{30 \cdot T \cdot L}$$

Żyroskopowe reakcje łożysk są zmienne co do wielkości i kierunku (zanurzanie się i wynurzanie się statku); reakcje żyroskopowe mogą osiągać duże wartości (większe od reakcji statycznych związanych z ciężarem wirnika) w przypadku turbin.



Żyroskop - przykład 2

$$R_{max} = \frac{2\pi^2 \beta_0 I n}{30 \cdot T \cdot L}$$



$$R_{max} \cong 460 \text{ kN}$$

Falowanie morza:

$$\beta_0 = 10^\circ \cong 0.1745 \text{ rad}$$

$$T \cong 5 \text{ s}$$

Parametry turbiny:

$$n = 8000 \text{ rpm}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

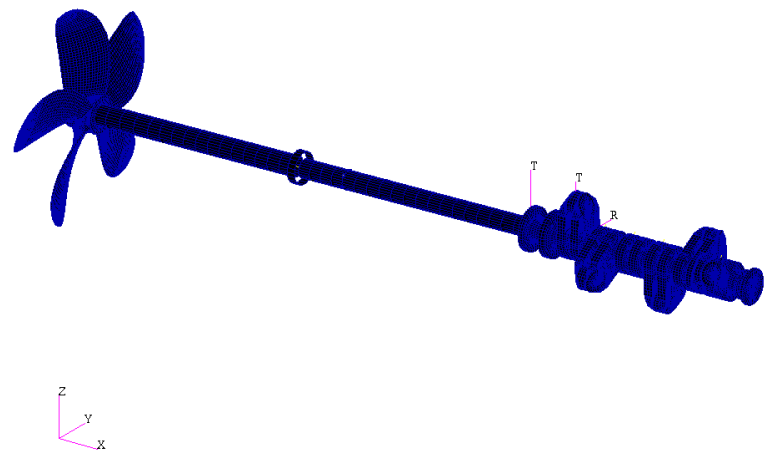
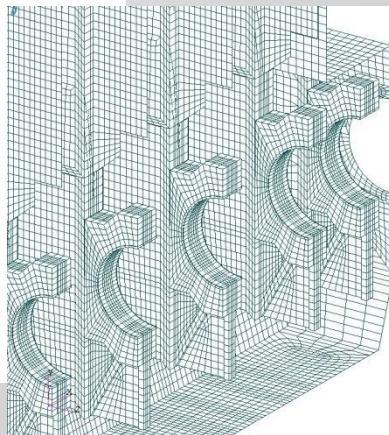
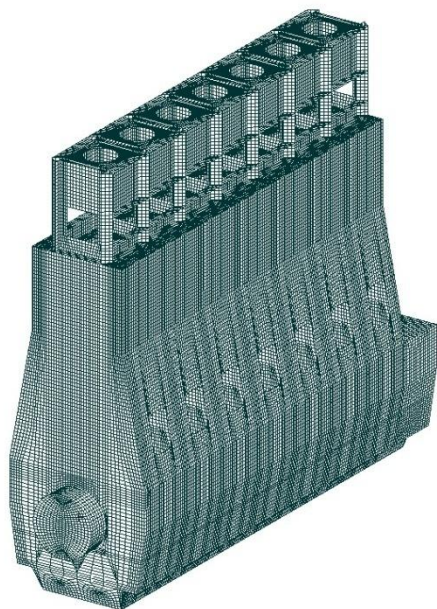
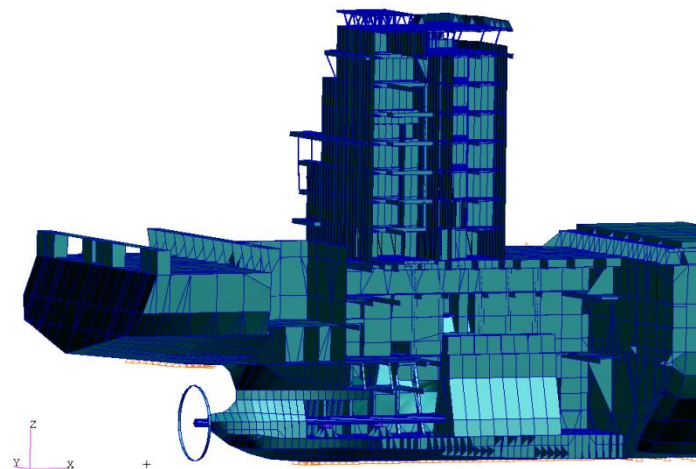
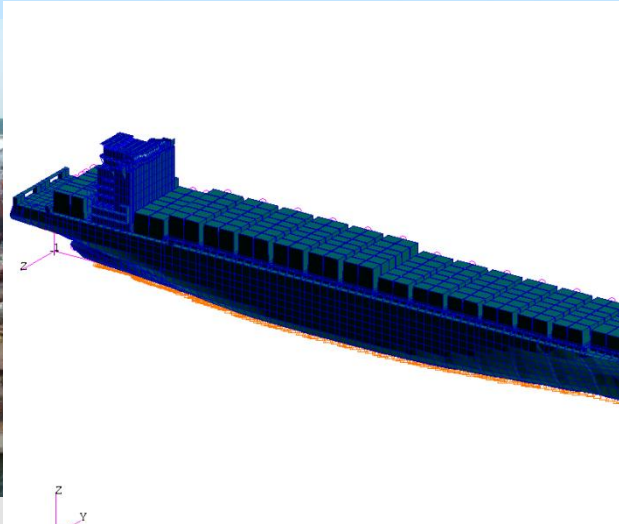
$$m_{\text{wirnika}} = 50 \text{ ton}$$

$$d_{\text{wirnika}} = 2 \text{ m}$$

$$I_{\text{wirnika}} = \frac{m r^2}{2} \cong 2.5 \times 10^4 \text{ kgm}^2$$

PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA

Przykład: analiza sił masowych układu tłokowo-korbowego



Układ napędowy kontenerowca

SILNIK GŁÓWNY:

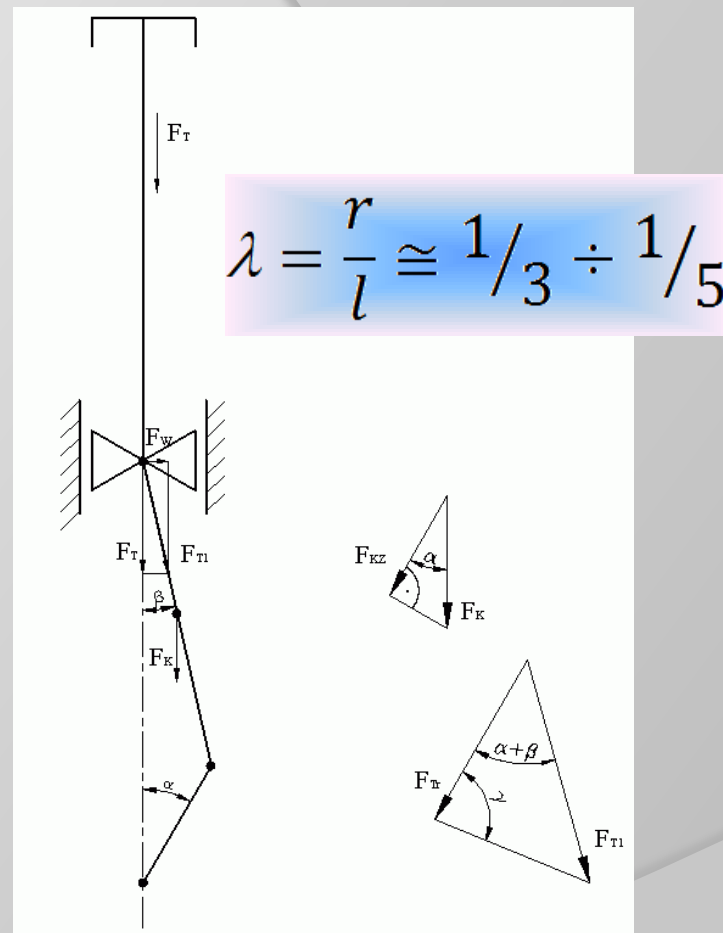
- Typ	8 RTA 96C
- Moc	43920 kW
- Prędkość obrotowa	100 rpm
- Średnie ciśnienie indykowane	19.3 bar
- Skok	2500 mm
- Średnica cylindra	960 mm
- Masa oscylująca jednego cylindra	17834 kg
- Współczynnik λ	0.434
- Koło zamachowe	19100 kgm ²
- Średnica czopa głównego	990 mm
- Średnica czopa korbowego	990/400 mm
- Kolejność zapłonu	18347256

LINIA WAŁÓW:

- Średnica wału pośredniego	695 mm
- Średnica wału śrubowego	845 mm

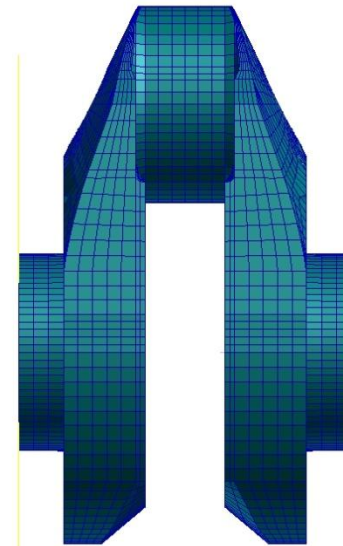
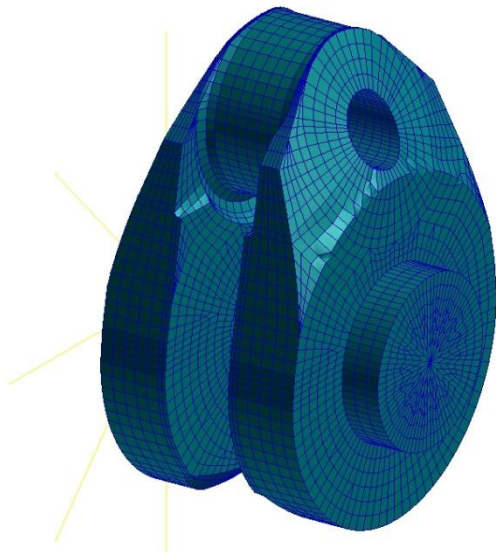
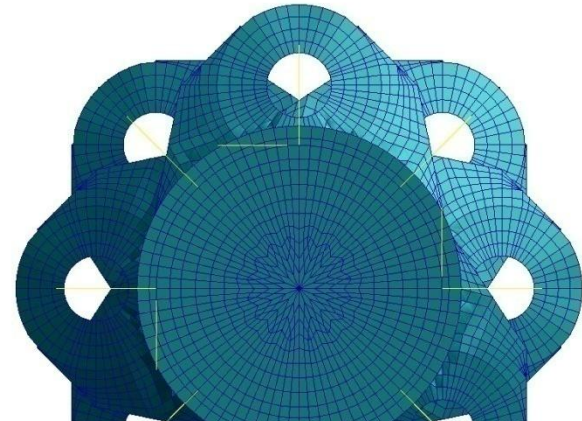
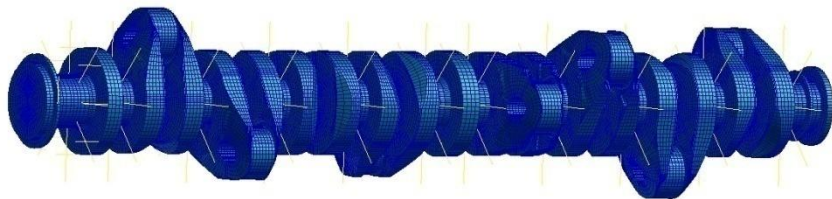
ŚRUBA NAPĘDOWA:

- Średnica	8.40 m
- Liczba skrzydeł	5
- Współczynnik posuwu	0.9367
- Współczynnik powierzchni	0.8505
- Masa	73785 kg
- Masowy moment bezwładności w pow.	247620 kgm ²

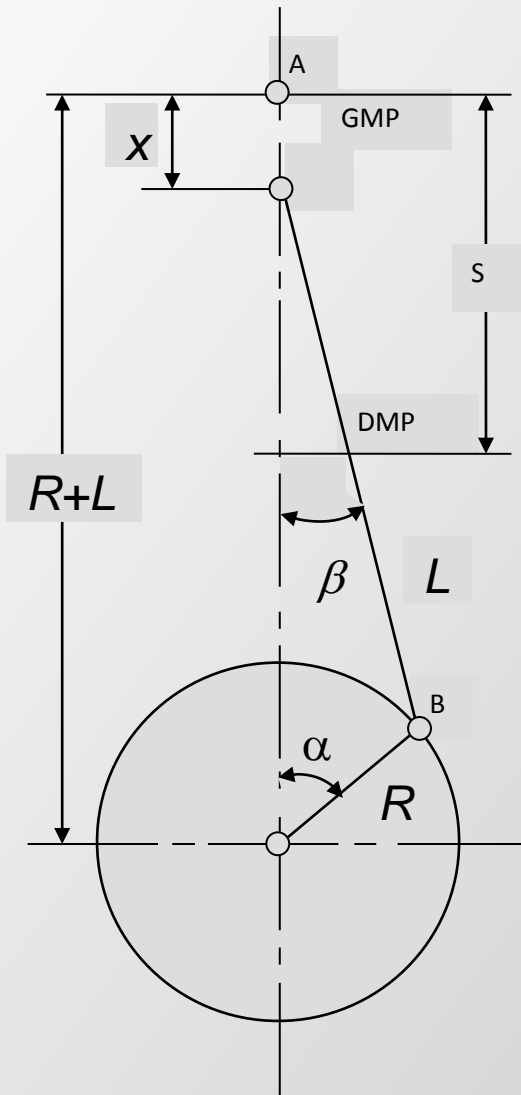


Tłok z tłoczyskiem	5 970 kg
Wodzik – komplet	7460 kg
Korbowód – komplet	7 900 kg

Ruch posuwisto-zwrotny tłoka silnika



Ruch posuwisto-zwrotny tłoka silnika



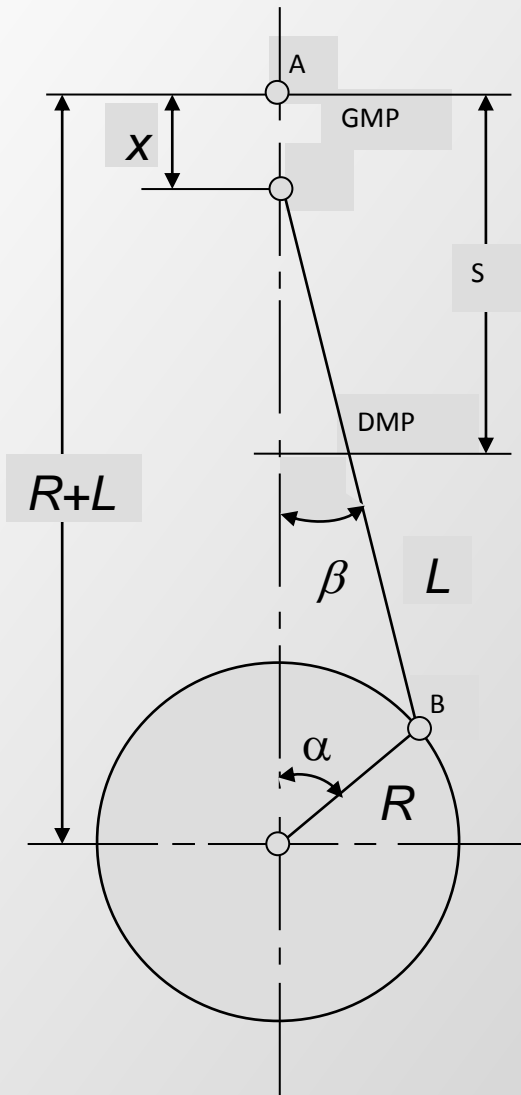
Schemat kinematyczny układu tłokowo-korbowego

Ile i jakie współrzędne uogólnione można wyznaczyć w analizowanym układzie?



$x, y, z, \alpha, \beta?$

Ruch posuwisto-zwrotny tłoka silnika



Schemat kinematyczny układu tłokowo-korbowego

$$x = R \cdot (1 - \cos\alpha) + L(1 - \cos\beta)$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha} \cong 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2\alpha$$

$$x = R \cdot \left[1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin^2\alpha \right]$$

$$\alpha = \omega \cdot t$$

$$v_T = R \cdot \omega \cdot \left[\sin\alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\alpha \right]$$

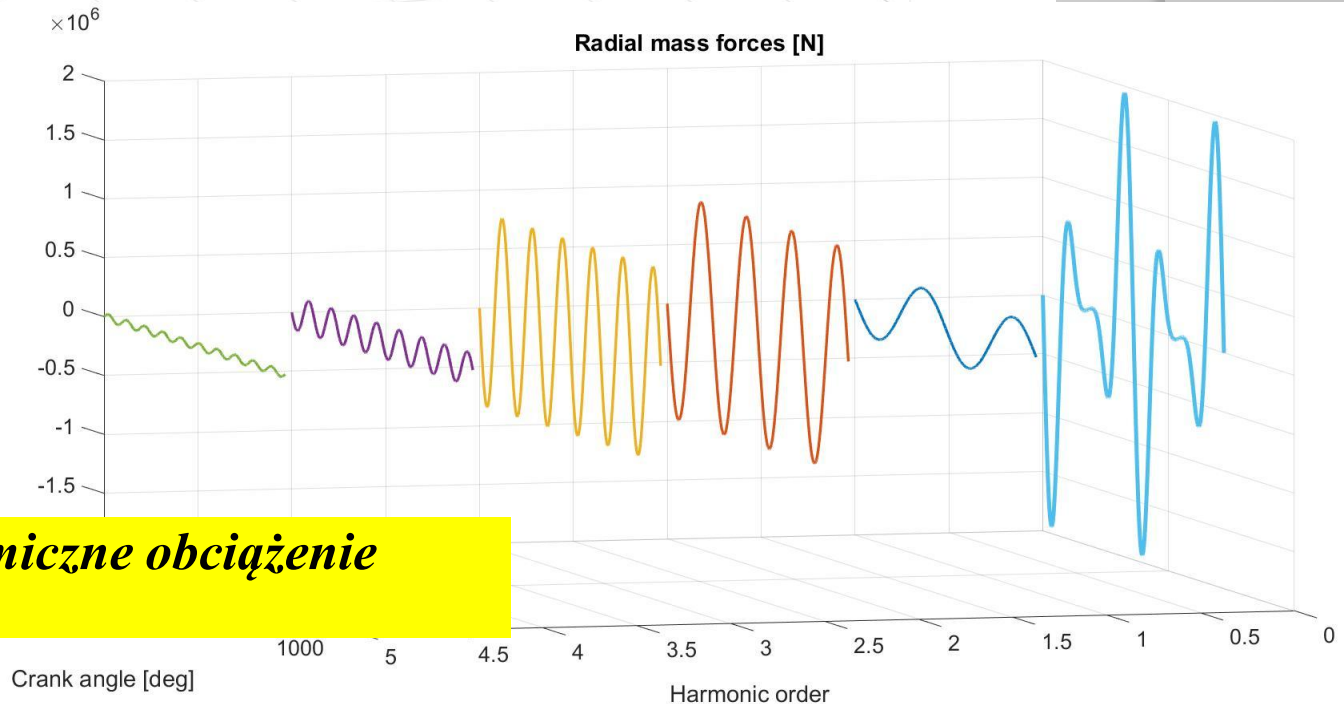
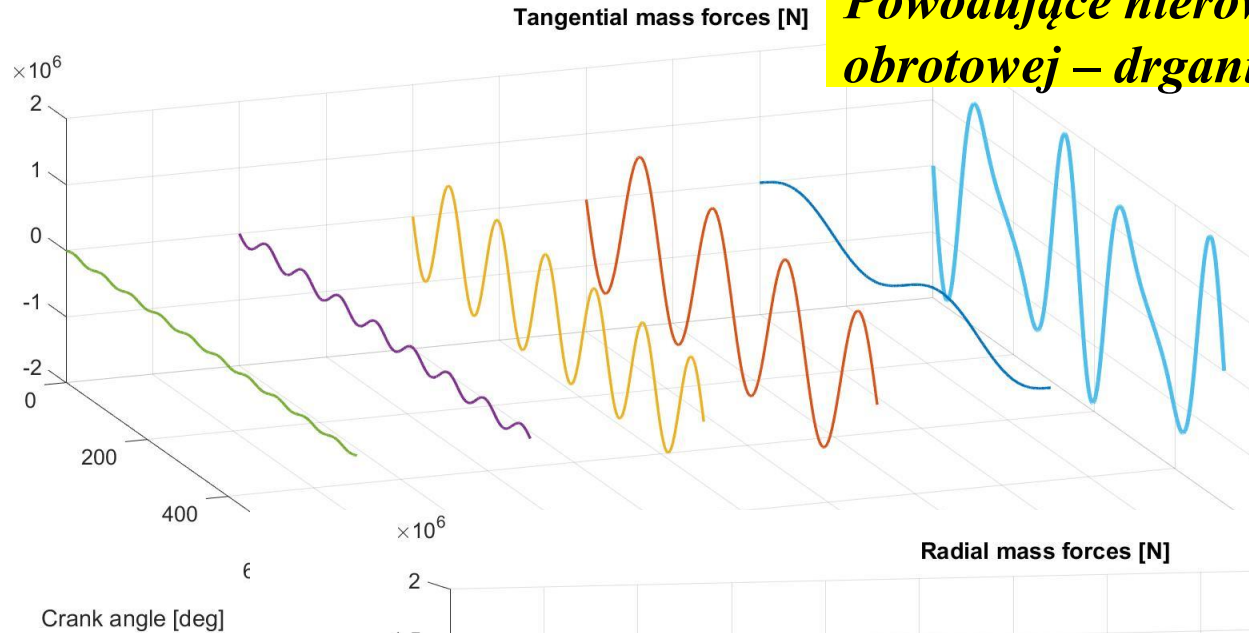
$$v_{max} = R \cdot \omega \cdot \sqrt{1 + \lambda^2}$$

$$a_T = R \cdot \omega^2 \cdot [\cos\alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha]$$

$$a_{max} = R \cdot \omega^2 \cdot [1 + \lambda]$$

Siły masowe układu tłokowo-korbowego

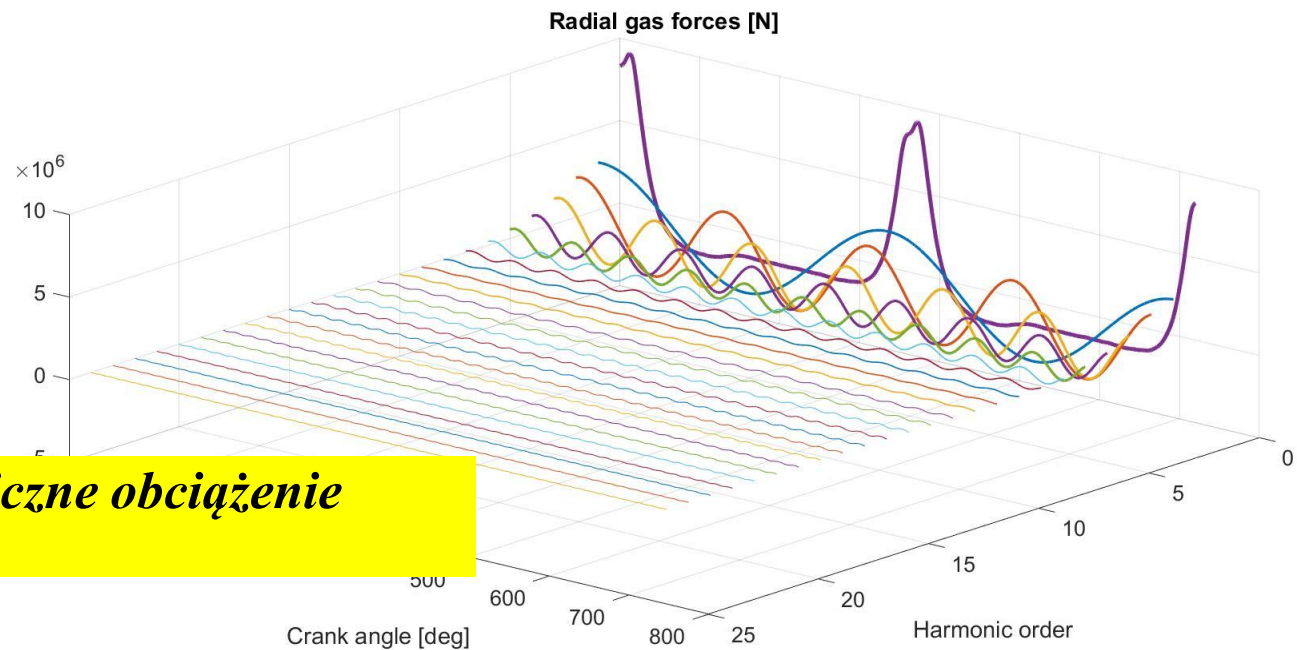
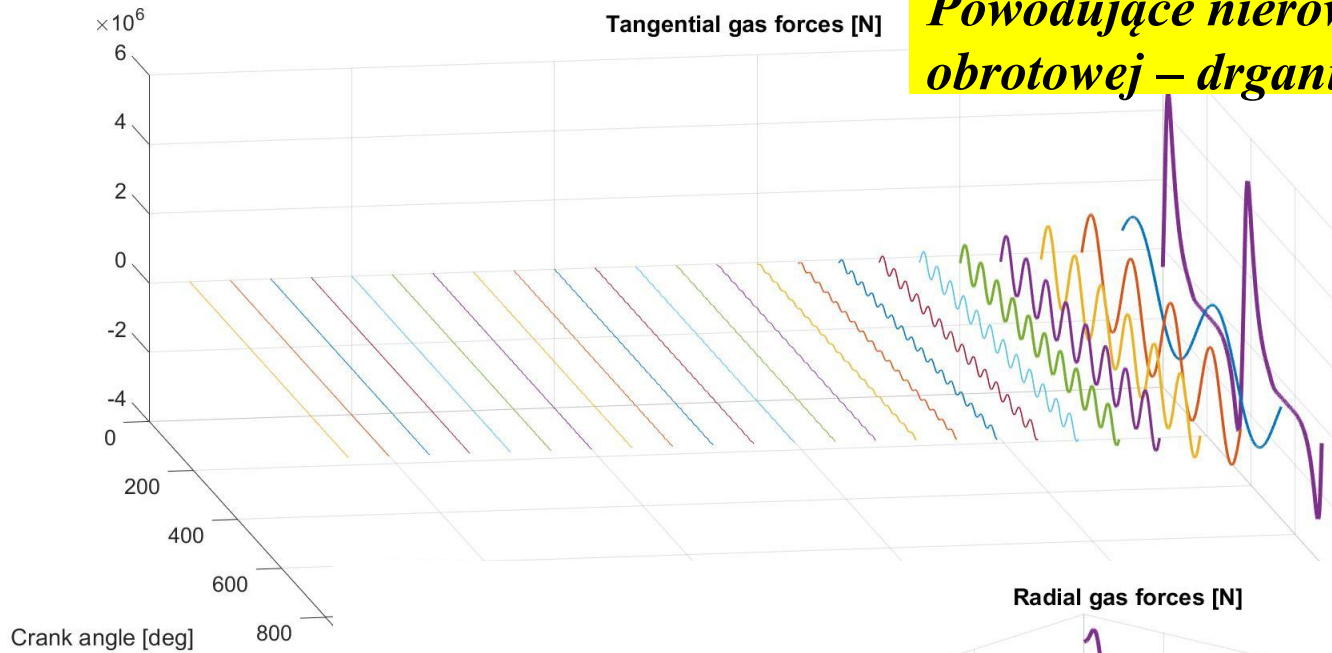
Powodujące nierównomierność prędkości obrotowej – drgania skrętne



Powodujące dynamiczne obciążenie łożysk głównych

Siły gazowe układu tłokowo-korbowego

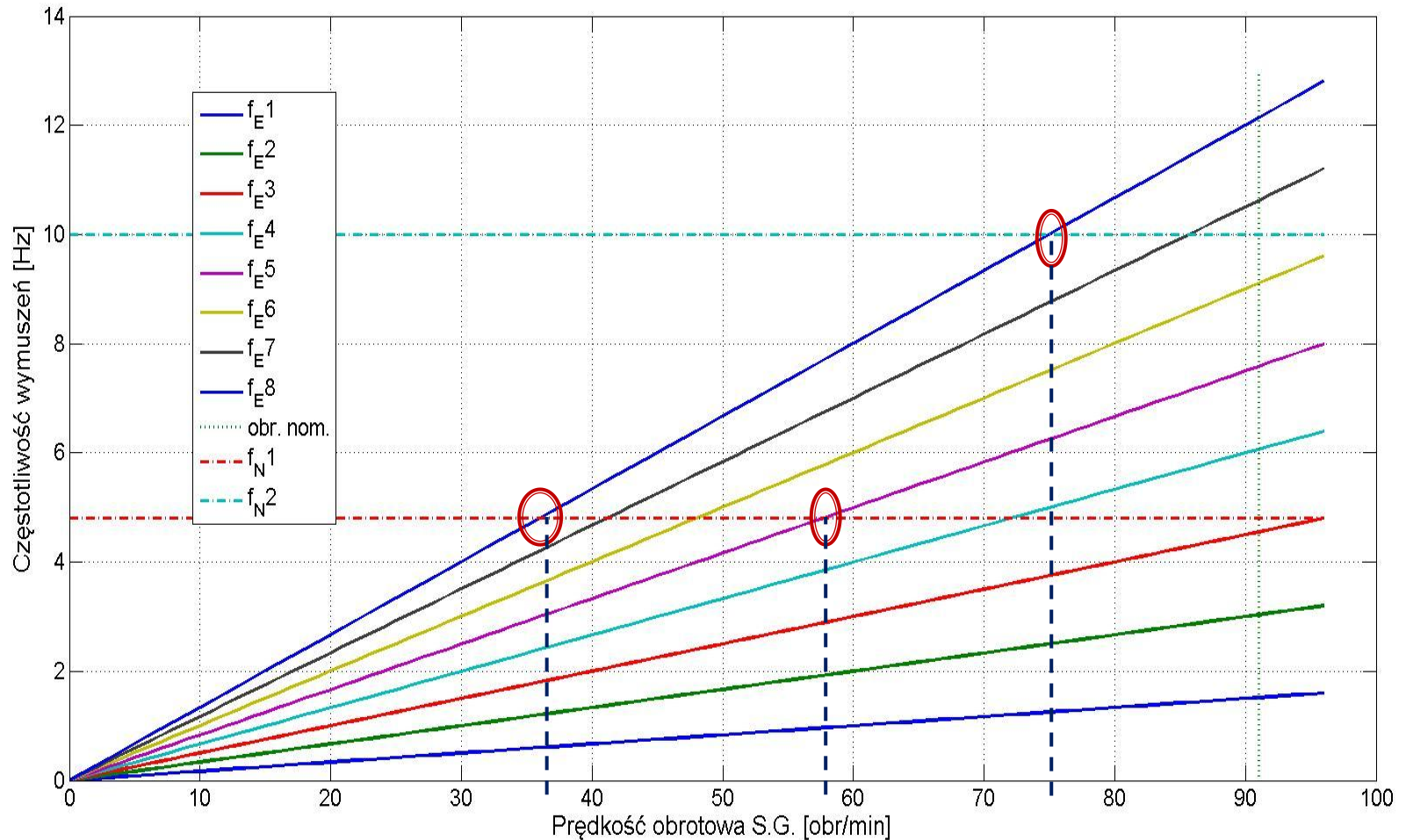
Powodujące nierównomierność prędkości obrotowej – drgania skrętne



Powodujące dynamiczne obciążenie łożysk głównych

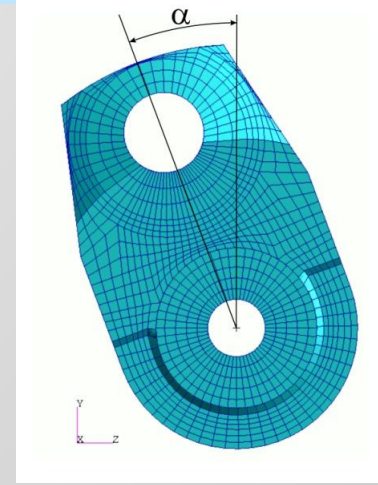
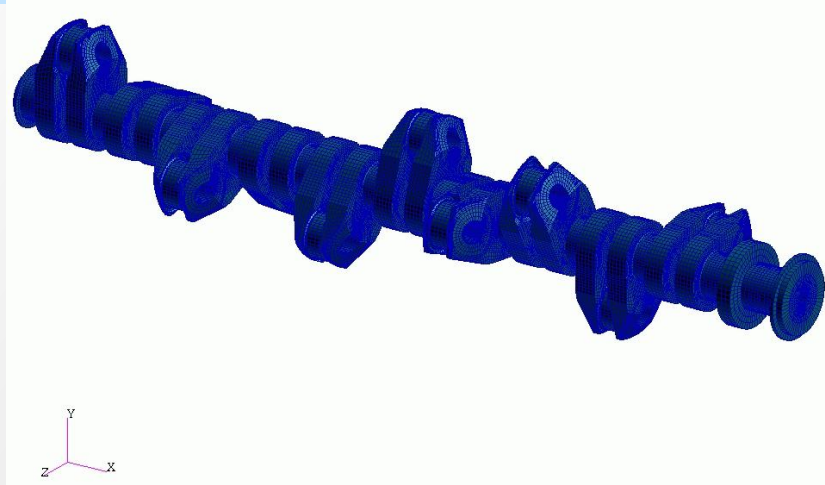
Składowe harmoniczne w silniku

Przykład: układ napędowy z ośmiocylindrowym S.G. (np. MAN B&W 8 S 70 MC-C) oraz pięcioskrzydłową śrubą napędową.

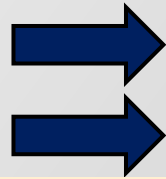


MECHANIKA A DETERMINIZM

Chaos deterministyczny



$$\alpha_0 = 36,001^\circ \pm 0,001^\circ$$



$$\alpha = 36,00149\dots^\circ \text{ lub } \alpha = 36,00050\dots^\circ$$
$$\alpha_0 = 36,001nnnnn\dots^\circ$$

Po dziesięciu zapłonach wykorbienie obróci się o $10 \times 36^\circ$, liczbę α_0 wystarczy pomnożyć przez dziesięć (w systemie dziesiętnym sprowadza się to do przesunięcia przecinka).

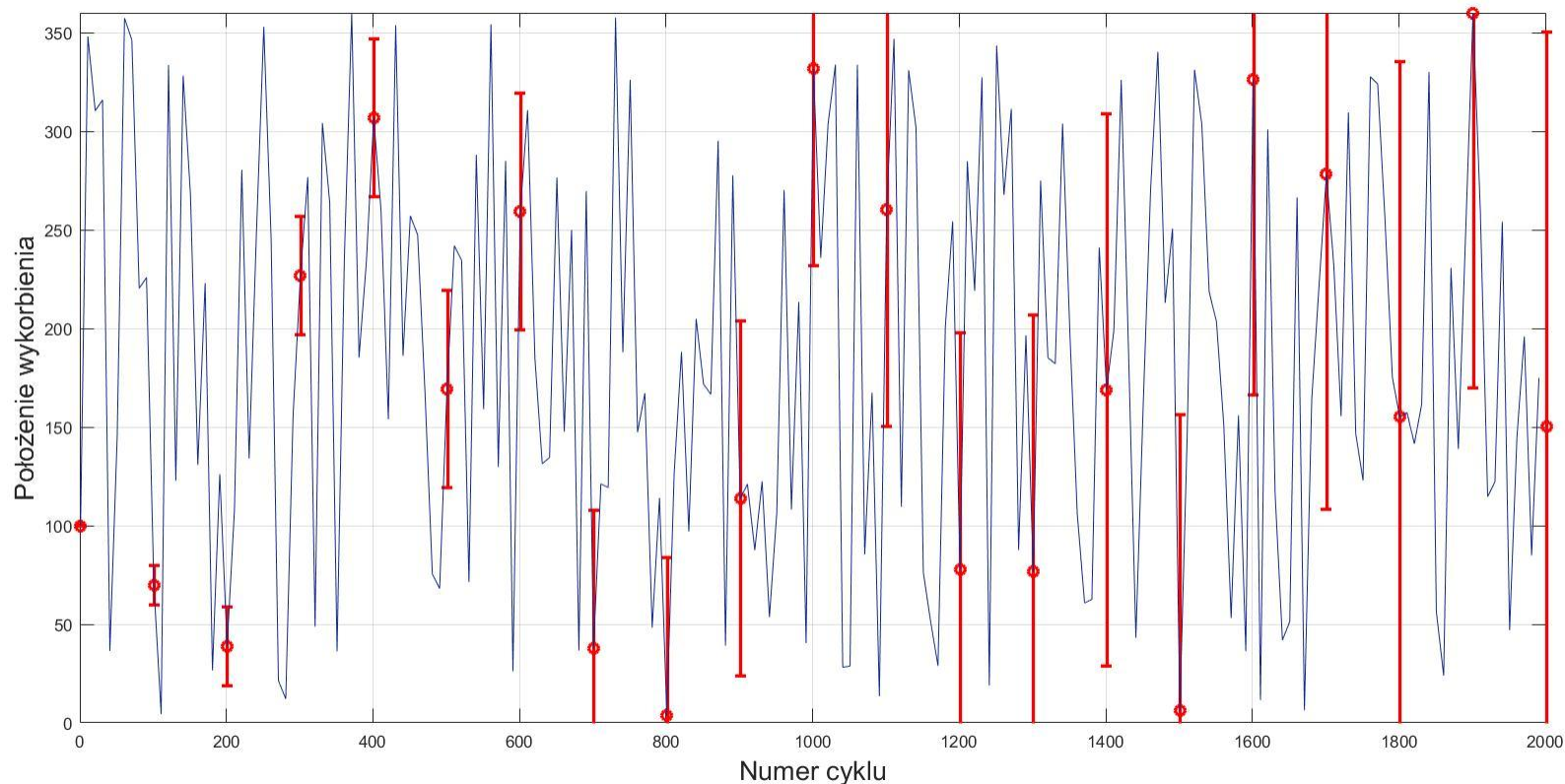
$$\alpha_{10} = 360,01nnnnn\dots^\circ = 0,01nnnnn\dots^\circ$$
$$\alpha_{1000} = 36001,nnnnn\dots^\circ = 1,nnnnn\dots^\circ$$

Po 10 tys. zapłonów dokładność położenia wykorbienia spada do wielkości $\pm 100^\circ$. Jeżeli prędkość obrotowa rozważanego silnika wynosi $n = 100 \text{ obr/min}$ to dla silnika 10-cylindrowego 100 tys. zapłonów nastąpi po 100 min. Mając idealnie deterministyczne zależności (z nieskończenie dokładnymi parametrami czasu i prędkości obrotowej) nie potrafimy określić szukanej wielkości.

Chaos deterministyczny

$\alpha_0 = 10,01^\circ$ \longrightarrow $\pm 0,01^\circ$ \longrightarrow $\alpha_0 = 10,01nnnnn\dots^\circ$

$\alpha_{10} = 100,1 \pm 0,1^\circ$ \longrightarrow $\alpha_{10} = 99,9 \div 100,1^\circ$



Chaos deterministyczny

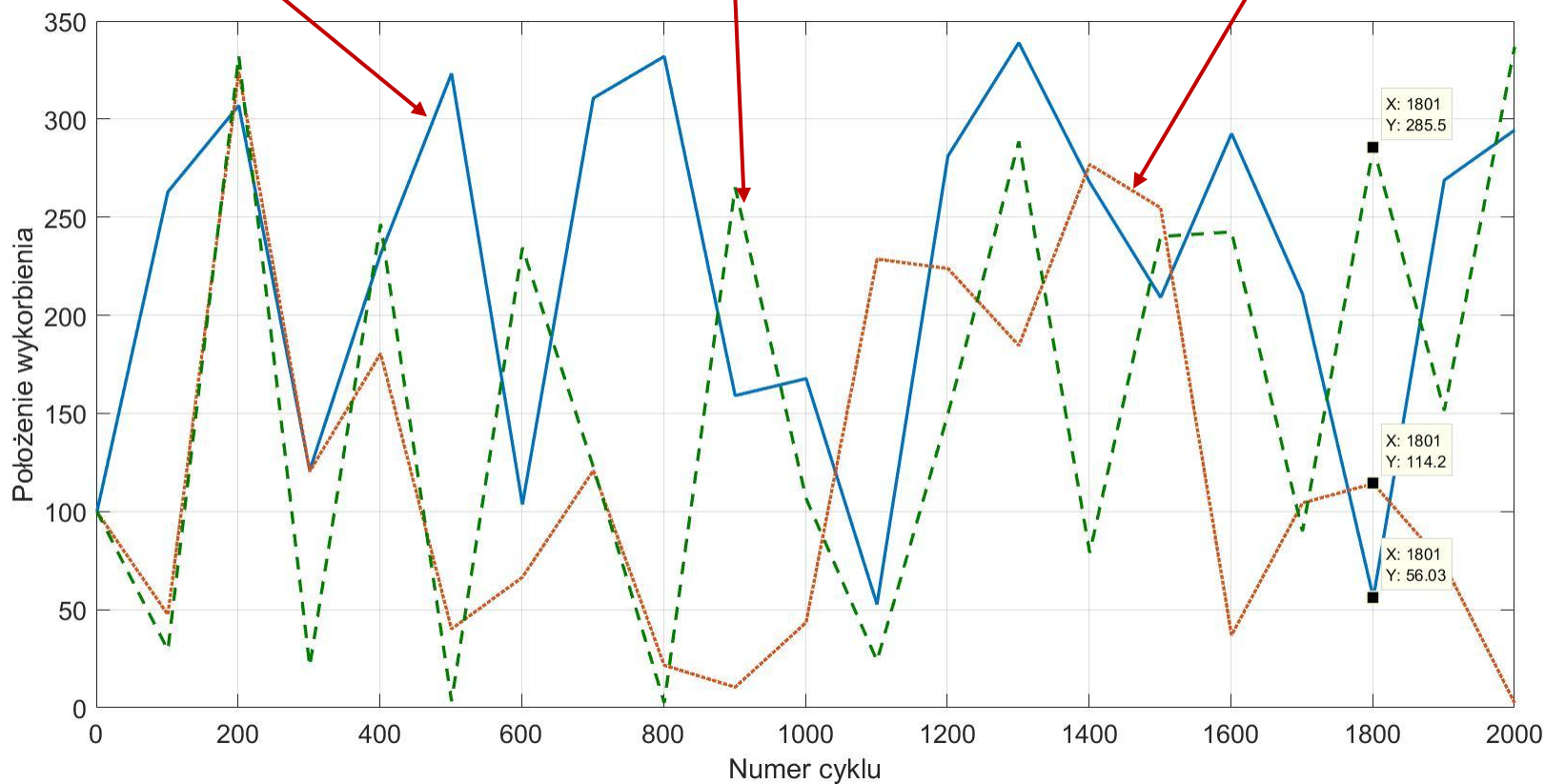
$\alpha_0 = 10,00^\circ$

lub

$\alpha_0 = 9,99^\circ$

lub

$\alpha_0 = 10,01^\circ$



Pomiary a obliczenia

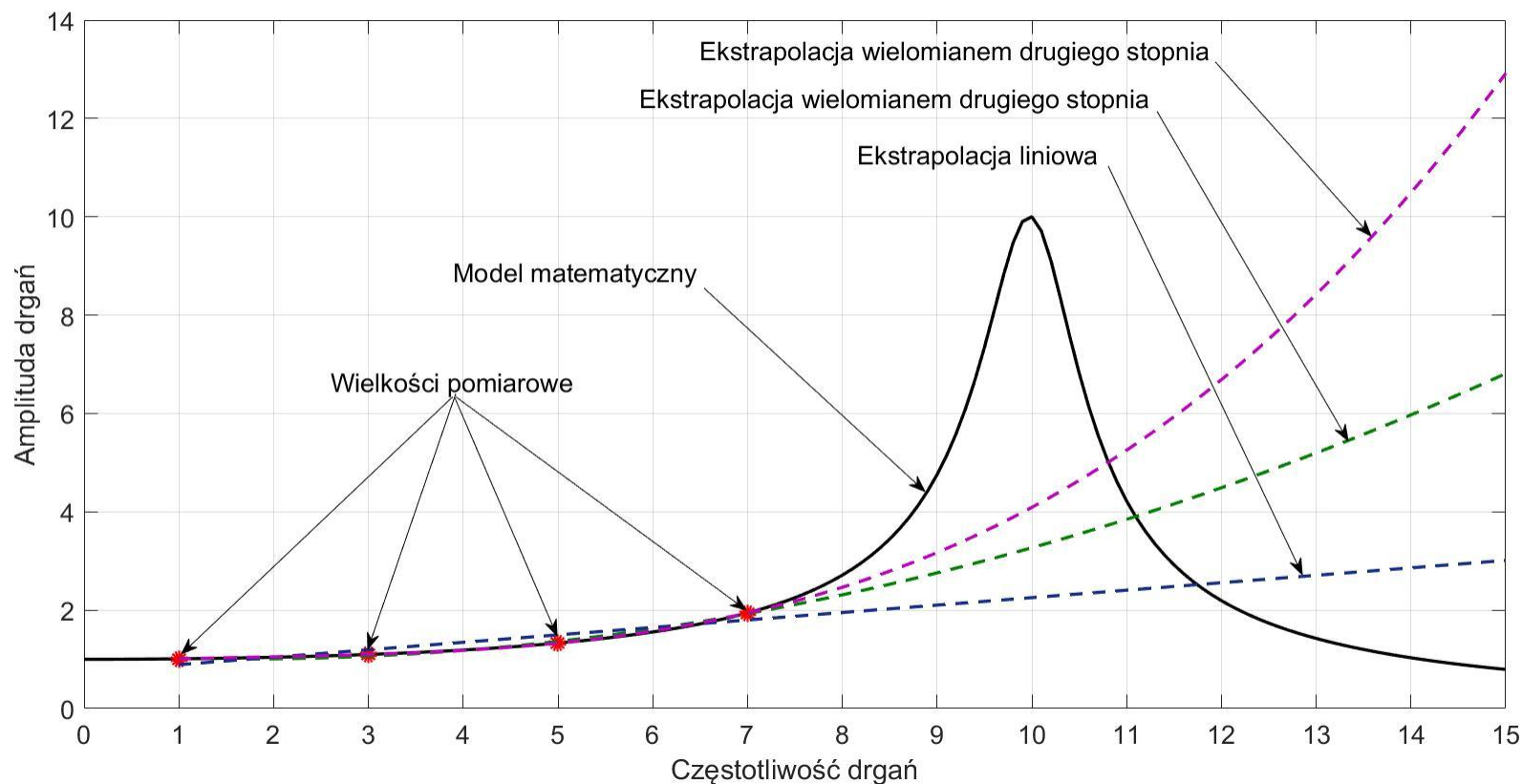
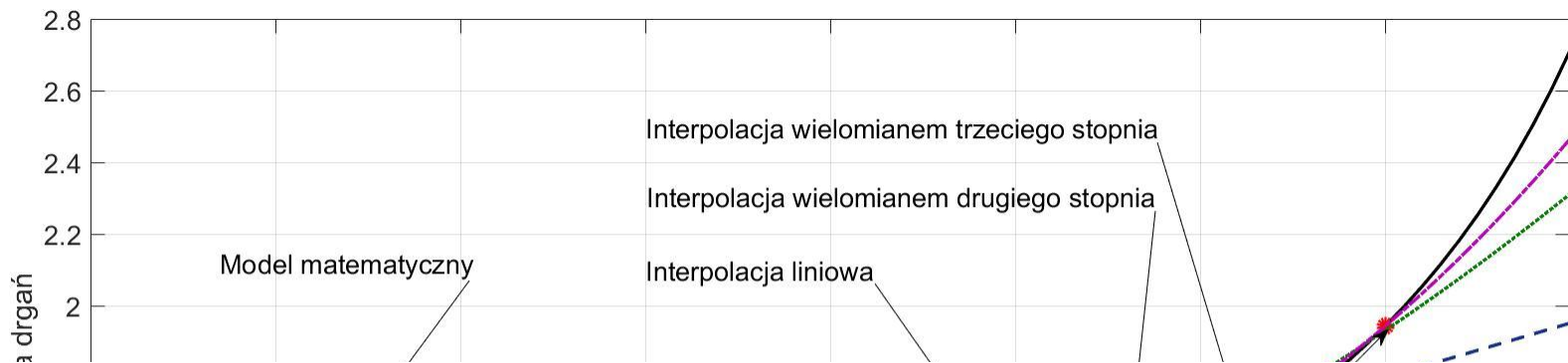
A. Einstein:

A theory is something nobody believes, except the person who made it.
An experiment is something everybody believes, except the person who made it.

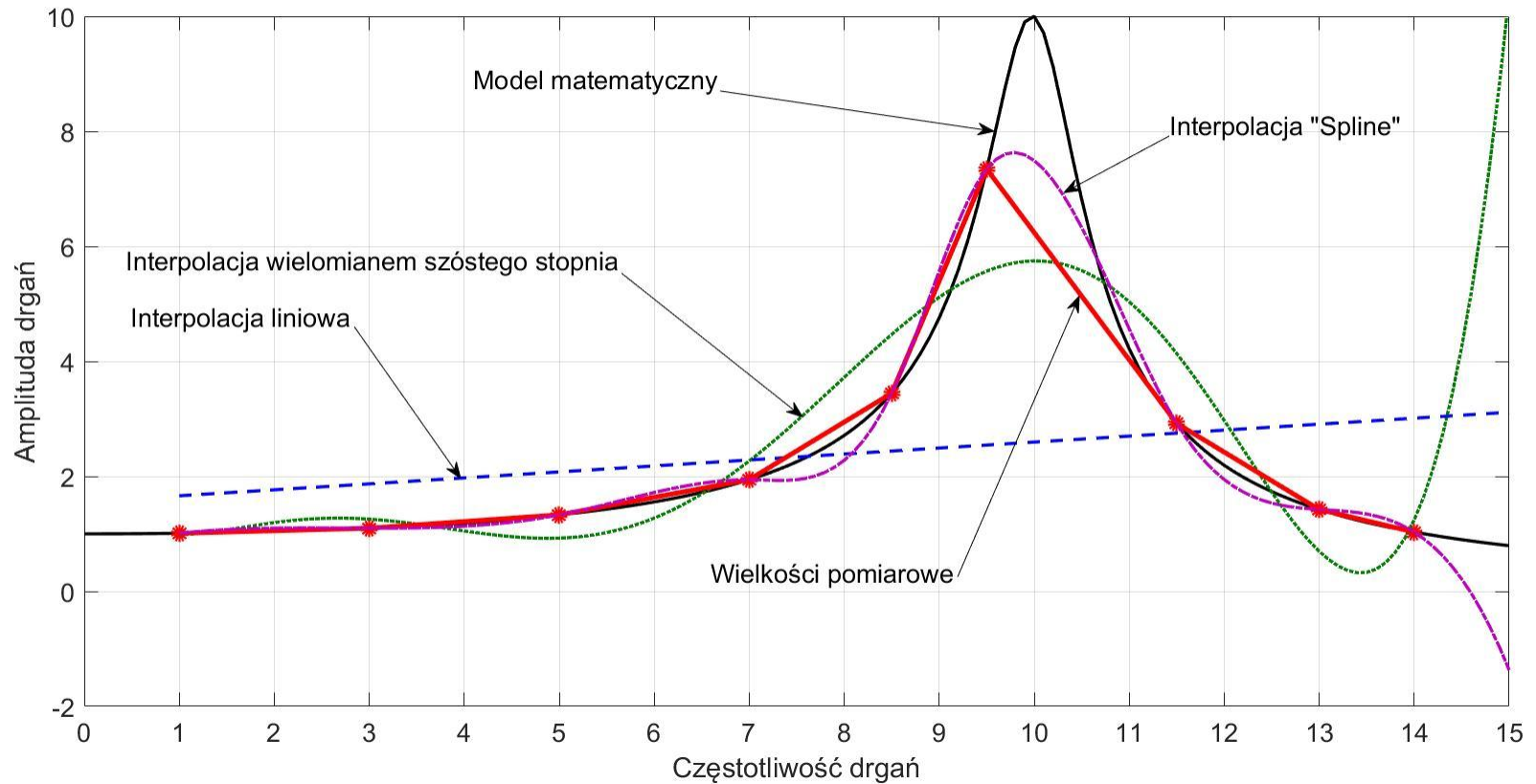
*Nikt nie wierzy w obliczenia za wyjątkiem liczącego,
wszyscy wierzą w pomiary za wyjątkiem mierzącego*

*Ekstrapolacja powinna być zabroniona
w badaniach inżynierskich,
dopuszczalna jest tylko interpolacja.*

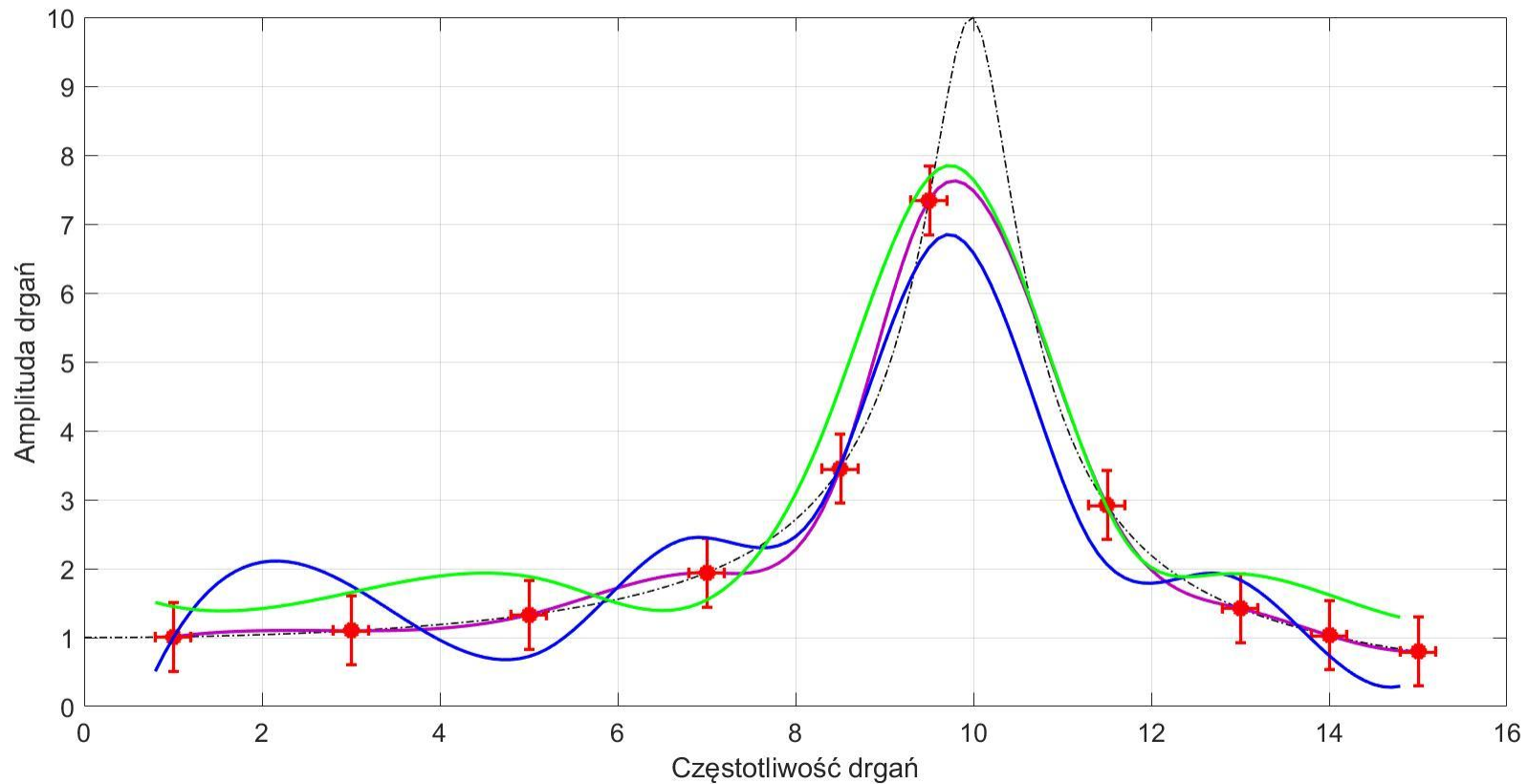
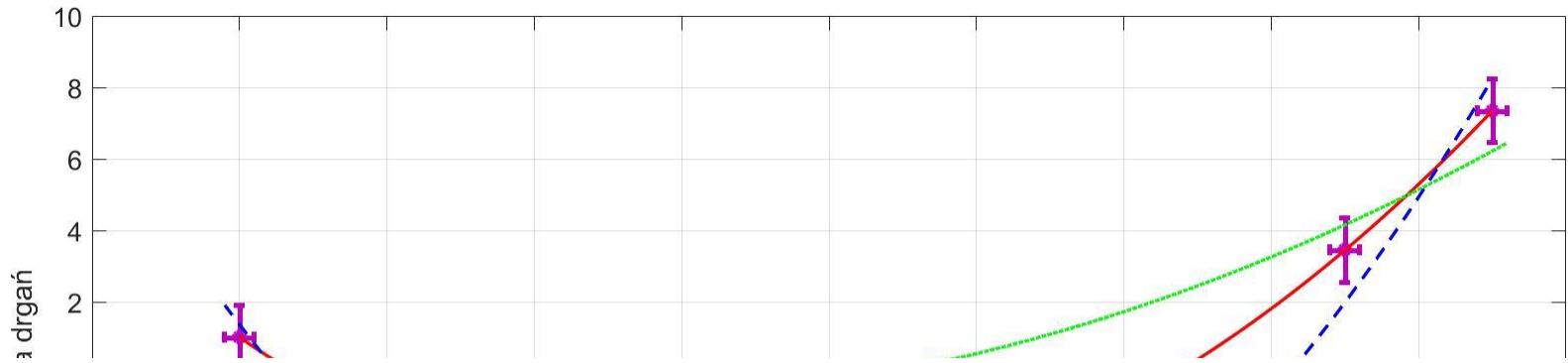
Interpolacja - Ekstrapolacja



Pomiary a obliczenia



Pomiary a obliczenia



Dziękuję za uwagę!

